МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1992

УДК 531.3

© 1992 г. Р. Ф. НАГАЕВ

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ СОУДАРЕНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Показано, что известные уравнения импульсивного движения с проскальзыванием [1] задачи о пространственном соударении двух твердых тел могут быть обобщены на случай анизотропного сухого трения между площадками контакта. Получены явные неравенства, выполнение которых достаточно для скользящего характера соударения. Определены условия, гарантирующие возможность длительного контакта, а также мгновенной перемены направления проскальзывания. Подробно изучено импульсивное движение при неизменном направлении скорости проскальзывания.

1. Уравнения импульсивного движения с проскальзыванием. В ходе ударного взаимодействия, как и обычно [2], пренебрегается изменением положения тел. Поэтому единичный орт внешней нормали к площадке контакта второго тела $\mathbf{n} = \mathbf{i}_1$ неизменен по направлению. В непосредственной близости от площадок контакта скорость точек первого тела относительно точек второго имеет нормальную и касательную составляющие:

$$\mathbf{v} = v_n \mathbf{n} + v_\tau \vec{\tau} \tag{1.1}$$

где орт $\vec{\tau}$ указывает направление относительного проскальзывания ($v_\tau \geq 0$) и переменен во времени. Поэтому в начальный момент относительная скорость

$$\mathbf{v}_- = v_{n-}\mathbf{i}_1 + v_{\tau-}\mathbf{i}_2 \quad (v_{n-} < 0, \ v_{\tau-} > 0) \tag{1.2}$$

имеет касательную составляющую, ориентированную по орту $\mathbf{i}_2$. Соответственно в неподвижном базисе $(\mathbf{i}_1, \ \mathbf{i}_2, \ \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2)$ текущая относительная скорость представляется в виде

$$\mathbf{v} = v_n \mathbf{i}_1 + v_\tau (\mathbf{i}_2 \cos\theta + \mathbf{i}_3 \sin\theta) \quad (\theta = \angle(\mathbf{i}_2, \ \tau)) \tag{1.3}$$

Площади площадок контакта полагаются малыми и поэтому совокупность контактных усилий, передаваемых на первое тело со стороны второго, может быть сведена только к силе ударного взаимодействия

$$\mathbf{F} = F_n \mathbf{i}_1 + F_\tau (\mathbf{i}_2 \cos\theta + \mathbf{i}_3 \sin\theta) \tag{1.4}$$

где нормальная составляющая F_n всегда положительна, а касательная составляющая согласно законам сухого трения равна $F_\tau = -fF_n$. Будем предполагать, что фрикционные свойства площадок контакта носят анизотропный характер в том смысле, что $f = f(\theta) > 0$. В частном случае может быть введен так называемый эллипс трения

$$f = f_x f_y \, [f_x^2 \sin(\theta + \theta_x) + f_y^2 \cos(\theta + \theta_x)\,]^{-1/2} \tag{1.5}$$

где f_x и f_y — коэффициенты трения скольжения по главным направлениям эллипса x и y, а $\theta_x = \angle(x, \mathbf{i}_2)$.

Введем в рассмотрение ударный импульс

$$\mathbf{S} = S_n \mathbf{i}_1 + S_2 \mathbf{i}_2 + S_3 \mathbf{i}_3 \tag{1.6}$$

Отметим, что нормальный ударный импульс $S_n = \int\limits_{t_-}^{t} F_n dt$ является монотонно возрастающей функцией времени. Поскольку $\mathbf{F} = d\mathbf{S}/dt$, из (1.4) сразу же получим

$$S_2^{\bullet} = -fS_n^{\bullet} \cos\theta, \quad S_3^{\bullet} = -fS_n^{\bullet} \sin\theta \tag{1.7}$$

В стереомеханической теории удара, естественно, невозможно определить зависимость всех ранее введенных величин внутри интервала удара (t_-, t_+) от времени. Поэтому далее вводится новый монотонный аргумент S_n. В связи с этим перепишем (1.7) в виде

$$S_2' = -f\cos\theta, \quad S_3' = -f\sin\theta \tag{1.8}$$

причем штрихом здесь и далее обозначено дифференцирование по S_n. Существенно, что вследствие переменности угла поворота θ относительной скорости проскальзывания равенства (1.8) являются неинтегрируемыми (неголономными).

Выпишем теперь уравнения изменения количества движения и момента количества движения взаимодействующих тел

$$m_i(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_{i-}) = -(-1)^i\mathbf{S}, \quad \mathbf{J}_i(\omega_i - \omega_{i-}) = -(-1)^i\mathbf{r}_i \times \mathbf{S} \quad (i = 1,\ 2) \tag{1.9}$$

Здесь $\mathbf{V}_i$ и ω_i — скорость центра масс и угловая скорость i-го тела, m_i и $\mathbf{J}_i = J_{jk}^{(i)}\mathbf{i}_j\mathbf{i}_k$ $(j, k = 1, 2, 3)$ — масса и центральный тензор инерции, а r_i — радиус-вектор, соединяющий центр масс с точкой контакта. Учтем, что относительная скорость в силу вышесказанного равна

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_1 + \omega_1 \times \mathbf{r}_1 - \mathbf{V}_2 - \omega_2 \times \mathbf{r}_2 \tag{1.10}$$

Проектируя это равенство на направления $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ при учете (1.2), (1.3), (1.6) и (1.9), получим

$$v_n = v_{n-} + a_{11}S_n + a_{12}S_2 + a_{13}S_3$$

$$v_\tau \cos\theta = v_{\tau-} + a_{12}S_n + a_{22}S_2 + a_{23}S_3$$

$$v_\tau \sin\theta = a_{13}S_n + a_{23}S_2 + a_{33}S_3 \tag{1.11}$$

Здесь постоянные числа a_{sr} образуют симметричную положительную 3×3 — матрицу A и определяются по формулам

$$a_{sr} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\delta_{sr} + J_{jk}^{(1)}n_{sj}^{(1)}n_{rk}^{(1)} + J_{jk}^{(2)}n_{sj}^{(2)}n_{rk}^{(2)} \quad (s, r = 1, 2, 3) \tag{1.12}$$

где δ_{sr} — символ Кронекера, $n_{sj}^{(i)} = \mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_j)$, а J_{jk} – матрица обратных моментов инерции

$$J_{jk}J_{lj} = \delta_{kl} \tag{1.13}$$

Продифференцируем теперь второе и третье уравнения (1.11) по S_n. В результате при учете (1.8) получим

$$v_\tau' \cos\theta - v_\tau\theta' \sin\theta = a_{12} - f(a_{22}\cos\theta + a_{23}\sin\theta)$$

$$v_\tau' \sin\theta + v_\tau\theta' \cos\theta = a_{13} - f(a_{23}\cos\theta + a_{33}\sin\theta) \tag{1.14}$$

Из (1.14) окончательно приходим к следующей системе двух дифференциальных уравнений

$$v_\tau' = V(\theta), \quad v_\tau\theta' = U(\theta) \tag{1.15}$$

$$V = a_{12}\cos\theta + a_{13}\sin\theta - f(a_{22}\cos^2\theta + a_{23}\sin 2\theta + a_{33}\sin^2\theta)$$

$$U = a_{13}\cos\theta - a_{12}\sin\theta - f(a_{23}\cos 2\theta - ½\,(a_{22} - a_{33})\sin 2\theta) \qquad (1.16)$$

Интегрирование системы (1.15) при начальных условиях $S_n = 0$, $\theta = 0$, $b_\tau = v_{\tau-}$ дает (см. [1]):

$$v_\tau = v_{\tau-}\exp\int_0^\theta \frac{V}{U}d\theta, \quad S_n = v_{\tau-}\int_0^\theta \exp\left(\int_0^\theta \frac{V}{U}d\theta\right)\frac{d\theta}{U} \qquad (1.17)$$

Кроме того, поскольку в начальный момент $S_2 = S_3 = 0$, из (1.8) и первого уравнения (1.11) получим

$$S_2 = -v_{\tau-}\int_0^\theta \exp\left(\int_0^\theta \frac{V}{U}d\theta\right)f\cos\theta\frac{d\theta}{U}, \quad S_3 = -v_{\tau-}\int_0^\theta \exp\left(\int_0^\theta \frac{V}{U}d\theta\right)f\sin\theta\frac{d\theta}{U}$$

$$v_n = v_{n-} + v_{\tau-}\int_0^\theta [a_{11} - f(a_{12}\cos\theta + a_{13}\sin\theta)]\exp\left(\int_0^\theta \frac{V}{U}d\theta\right)\frac{d\theta}{U} \qquad (1.18)$$

Непосредственное использование квадратур (1.17), (1.18) оказывается невозможным, если $U(0) = a_{13} - f(0)a_{23} = 0$ и крайне неудобным, если величина $\varepsilon = a_{13} - f(0)a_{23}$ является малым параметром. В последнем случае лучше решение системы (1.15) искать в виде ряда по целым степеням ε. В результате вместо (1.17) с точностью до величин порядка ε включительно получим

$$v_\tau = v_{\tau-} + [a_{12} - f(0)a_{22}]S_n + \frac{f(0)a_{23} + f'(0)a_{22}}{f(0)(a_{22} - a_{33}) - a_{12} - f'(0)a_{23}} \times$$

$$\times\left\{\frac{v_{\tau-}}{f(0)a_{33} - f'(0)a_{23}}\left[\left(1 + \frac{a_{12} - f(0)a_{22}}{v_{\tau-}}S_n\right)^{-\lambda} - 1\right] + S_n\right\}\varepsilon + \varepsilon^2\ldots$$

$$\theta = \frac{(1 + (a_{12} - f(0)a_{22})S_n/v_{\tau-})^{-1-\lambda} - 1}{f(0)(a_{22} - a_{33}) - a_{12} - f'(0)a_{23}}\varepsilon + \varepsilon^2\ldots \qquad (1.19)$$

$$f'(0) = df/d\theta\,|_{\theta=0}, \quad \lambda = (f(0)a_{33} + f'(0)a_{23})/(a_{12} - f(0)a_{22})$$

При $\varepsilon = 0$ из (1.19) следует $\theta = 0$, поэтому на этапе проскальзывания направление касательной составляющей относительной скорости неизменно.

2. Анализ движения после прекращения проскальзывания. Если $U(0) = a_{13} - f(0)a_{23} > 0$, то вследствие положительности нормального ударного импульса $S_n\,\theta > 0$ (см. (1.17)). Если же наоборот $a_{13} < f(0)a_{23}$, то $\theta < 0$. Более того, решение (1.17) (1.18) при $a_{13} > f(0)a_{23}$ существует внутри интервала $0 < \theta < \theta_*$, где θ_* — наименьший положительный корень уравнения

$$U(\theta) = 0 \qquad (2.1)$$

Соответственно, при $a_{13} < f(0)a_{23}$ решение существует в интервале $\theta_* < \theta < 0$, где θ_* — наименьший по модулю отрицательный корень уравнения (2.1). Таким образом θ_* есть предельно возможное значение угла поворота касательной составляющей скорости. Отметим, что первое равенство (1.17) может быть переписано в виде

$$v_\tau = v_{\tau-}\left(1 - \frac{\theta}{\theta_*}\right)^k \exp\int_0^\theta W(\theta)\,d\theta, \quad k = \left(\frac{dU}{d\theta}\right)^{-1}V\,\Big|_{\theta=\theta_*} \qquad (2.2)$$

а функция $W(\theta)$ при $\theta = \theta_*$ ограничена. Поскольку, как нетрудно видеть, всегда

$dU/d\theta\,|_{\theta=\theta_*} < 0$, из (2.2) вытекает, что $v_\tau \to 0$ при $\theta \to \theta_*$, если $k > 0$ или, что то же самое

$$V(\theta_*) < 0 \tag{2.3}$$

Таким образом неравенство (2.3) гарантирует прекращение проскальзывания при $\theta = \theta_*$. Существенно, что значение нормального импульса $S_{n*} = S_n\,|_{\theta=\theta_*}$ в этот момент ограничено и положительно. Если же неравенство (2.3) выполняется с противоположным знаком, то соударение необходимым образом носит скользящий характер, а значение $\theta = \theta_*$ недостижимо.

После мгновенной остановки в соответствии с (1.15) импульсивное движение может характеризоваться равенствами

$$\theta = \theta^*, \quad v_\tau = V(\theta^*)\,(S_n - S_{n*}) \tag{2.4}$$

где θ^* — отличный от θ_* корень уравнения (2.1), для которого $V(\theta^*) > 0$. Если же корень, удовлетворяющий последнему неравенству, отсутствует, то при $S_n > S_{n*}$ и вплоть до окончания удара $v_\tau = 0$. При этом непосредственно из (1.11) при $v_\tau = 0$ будем иметь

$$S_2 = \frac{1}{A_{11}}(A_{12}S_n - a_{33}v_{\tau-}), \quad S_3 = \frac{1}{A_{11}}(A_{13}S_n + a_{23}v_{\tau-})$$

$$v_n = v_{n-} + \frac{A}{A_{11}}S_n + \frac{A_{12}}{A_{11}}v_{\tau-} \tag{2.5}$$

где A_{sr} — алгебраическое дополнение элемента a_{sr} определителя матрицы A.

Отметим, что уравнение (2.1) может иметь либо два, либо четыре существенно различных корня, которые можно рассматривать как непрерывные функции аргумента $f = \max f(\theta)$. Два корня θ_1 и θ_2 существуют при любых положительных f, а вблизи нулевой точки представимы в виде рядов

$$\theta_{1,2} = \alpha \pm \frac{\pi}{2} \pm f\frac{\varphi(\alpha \pm \pi/2)}{(a_{12}^2 + a_{13}^2)^{1/2}}\left(a_{23}\cos 2\alpha - \frac{a_{22} - a_{33}}{2}\sin 2\alpha\right) + f^2\ldots$$

$$\varphi(\theta) = \frac{f(\theta)}{f}, \quad \sin\alpha = \frac{a_{13}}{(a_{12}^2 + a_{13}^2)^{1/2}} \quad \cos\alpha = -\frac{a_{12}}{(a_{12}^2 + a_{13}^2)^{1/2}}$$

Что же касается двух других корней θ_3 и θ_4, то они существуют только при $f > f^{(0)}$, причем на нижней границе $f = f^{(0)}$ имеет место двукратный корень $\theta_3 = \theta_4 = \theta^{(0)}$. Соответственно постоянные $f^{(0)}$ и $\theta^{(0)}$ определяются из системы $U = 0$, $dU/d\theta = 0$. В случае изотропного трения ($\varphi \equiv 1$) эта система двух трансцендентных уравнений допускает построение решения в явном виде. Для этого следует представить функцию U в виде

$$U = \Delta\,[f\sin(2\theta - \beta) - a\sin(\theta - \beta/2) - b\cos(\theta - \beta/2)] \tag{2.6}$$

$$\Delta = \left[a_{23}^2 + \frac{(a_{22} - a_{33})^2}{4}\right]^{1/2}, \quad \sin\beta = \frac{a_{23}}{\Delta}, \quad \cos\beta = \frac{a_{22} - a_{33}}{2\Delta} \tag{2.7}$$

$$a = \frac{1}{\Delta}\left(a_{13}\sin\frac{\beta}{2} + a_{12}\cos\frac{\beta}{2}\right), \quad b = \frac{1}{\Delta}\left(a_{12}\sin\frac{\beta}{2} - a_{13}\cos\frac{\beta}{2}\right)$$

В результате окончательно получим

$$f^{(0)} = 1/2\,(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}, \quad \theta^{(0)} = \beta/2 + \gamma$$

$$\sin\gamma = b^{1/3}(a^{2/3} + b^{2/3})^{-1/2}, \quad \cos\gamma = a^{1/3}(a^{2/3} + b^{2/3})^{-1/2}$$

При $f \to \infty$ все четыре корня представляются в виде рядов по целым степеням $1/f$.

Если $0 < f < f^{(0)}$, то в качестве предельного угла θ_* может выступать только один из корней первой группы, например, θ_1. При $f > f^{(0)}$ может оказаться, что $\theta_* = \theta_3$. Для этого при $a_{13} > f(0)a_{23}$ необходимо выполнение неравенства $\theta_1 |_{f=f(0)} > \theta^{(0)} > 0$, а при $a_{13} < f(0)a_{23} - \theta_1 |_{f=f(0)} < \theta^{(0)} < 0$. В противном случае всегда $\theta_* = \theta_1$.

Может сложиться впечатление, что при $f > f^{(0)}$ в момент остановки ($S_n = S_{n*}$) не один, а два или даже три корня уравнения (2.1) могут удовлетворять неравенству $V(\theta_i) > 0$ (см. (2.4)). При этом, естественнс, возникла бы неоднозначность в последующем импульсивном движении. Покажем, что такая ситуация исключена. Для этого прежде всего отметим, что совместное рассмотрение уравнений $U = 0$, $V = 0$ приводит к строго определенным значениям $f = f_0$ и $\theta = \theta_0$, которые в изотропном случае равны

$$f_0 = \frac{1}{A_{11}}(A_{12}^2 + A_{13}^2)^{1/2}, \quad \sin\theta_0 = -\frac{A_{13}}{(A_{12}^2 + A_{13}^2)^{1/2}}, \quad \cos\theta_0 = -\frac{A_{12}}{(A_{12}^2 + A_{13}^2)^{1/2}}$$

В качестве корня уравнения (2.1), который при $f = f_0$ равен θ_0, может выступать либо θ_1, либо θ_2. Действительно, в силу положительности матрицы A коэффициент при f в выражении (1.11) для V положителен при любых θ. Поэтому величины $V(\theta_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), рассматриваемые как функции f, при $f \to \infty$ отрицательны. Допустим теперь, что при $f = f_0$ $V(\theta_3) = 0$ ($\theta_3 = \theta_0, f_0 > f^{(0)}$). Тогда при $f > f_0$ $V(\theta_3) < 0$, а при $f^{(0)} < f < f_0$ $V(\theta_3) > 0$. В то же время очевидно $V(\theta_4) < 0$ при $f > f^{(0)}$. Это противоречит очевидному равенству $V(\theta_3) = V(\theta_4)$ при $f = f^{(0)}$.

Вышесказанное позволяет однозначно определить характер импульсивного движения после прекращения проскальзывания ($S_n > S_{n*}$). В частности мгновенное изменение направления проскальзывания согласно (2.4) наступит, если

$$1.\ V(\theta_2)|_{S_n = S_{n*}} > 0 \quad (\theta^* = \theta_2, \quad \theta_* = \theta_{1,3}, \quad 0 < f < f_0)$$

$$2.\ V(\theta_1)|_{S_n = S_{n*}} > 0 \quad (\theta^* = \theta_1, \ \theta_* = \theta_3, \ f^{(0)} < f < f_0)$$

Напомним, что здесь символами θ_1 и θ_3 обозначены корни уравнения (2.1), которые в соответствующих диапазонах изменения f выступают в качестве предельного угла θ_*. Отметим, что угол изменения направления проскальзывания, вообще говоря, отличен от π. С другой стороны проскальзывание при $S_n > S_{n*}$ отсутствует ($v_\tau = 0$), если $f > f_0$. И, наконец, остановка невозможна только при $\theta_0 = \theta_1$ в интервалах $0 < f < f_0$, если в качестве предельного угла θ_* также выступает θ_1, и $0 < f < f^{(0)}$, если $f^{(0)} < f_0$, а в интервале $(f^{(0)}, f_0)$ $\theta_* = \theta_3$.

3. О гипотезах стереомеханической теории удара. В рассматриваемой задаче особняком стоит случай, когда существующие при любых f корни $\theta_{1,2}$ уравнения (2.1) не зависят от f. Такая возможность появляется, если $ab = 0$ (см. (2.6) и (2.7)) и поэтому либо $a_{23} = 0$, либо $a_{13} = \pm a_{12}$. В этом случае все корни уравнения (2.1) находятся в явном виде, величины $V(\theta_{1,2})$ являются линейно убывающими функциями f и расчет значительно упрощается. В еще более частном случае $a_{13} = a_{23} = 0$ проскальзывание на начальном этапе происходит в неизменном направлении ($\theta = 0$) и характеризуется равенствами

$$v_\tau' = v_{\tau-} + [a_{12} - f(0)\, a_{22}]\, S_n, \quad S_2 = -f(0)\, S_n, \quad S_3 = 0$$

$$v_n = v_{n-} + [a_{11} - f(0) a_{12}]\, S_n \tag{3.1}$$

Отметим, что этот случай полностью включает в себя так называемое плоское соударение, а также удар круглых тел, обладающих центральной симметрией, когда вообще

$$a_{sr} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{r_1^2}{J_1} + \frac{r_2^2}{J_2}\right) \delta_{sr} - \left(\frac{r_1^2}{J_1} + \frac{r_2^2}{J_2}\right) \delta_{1r}$$

Здесь J_i и r_i — центральный момент инерции и радиус i-го шара ($i = 1, 2$). Скорость проскальзывания согласно (3.1) обращается в нуль, если $S_n = S_{n*} = v_{\tau-}/(fa_{22} - a_{12})$. Далее для простоты полагаем трение изотропным ($f = \mathrm{const}$). При этом естественно должно выполняться неравенство

$$f > a_{12}/a_{22} \tag{3.2}$$

которое также прямо следует из (2.3). Из уравнения (2.1) в данном случае вытекает $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$. Поэтому здесь возможно только изменение направления проскальзывания на противоположное. При учете (3.2) имеем $V(\theta_1) = a_{12} - fa_{22} < 0$, $V(\theta_2) = -a_{12} - fa_{22}$.

В соответствии со сказанным мгновенное изменение направления проскальзывания произойдет, если $V(\theta_2) > 0$ и следовательно, $0 < f < -a_{12}/a_{22}$, $a_{12} < 0$. В результате при $S_n > S_{n*}$ будем иметь

$$v_\tau = -(a_{12} + fa_{22})(S_n - S_{n*}) \quad (\theta = \pi) \tag{3.3}$$

В противном случае при $S_n = S_{n*}$ $v_\tau = 0$. Введем в рассмотрение работу ударной нормальной силы F_n, которая в общем случае определяется по формуле

$$A_n = \int_0^{S_n} U_n dS_n \tag{3.4}$$

При $a_{13} = a_{23} = 0$ на этапе первоначального скольжения ($0 < S_n < S_{n*}$) вместо (3.4) будем иметь

$$A_n = v_{n-} S_n + 1/2\,(a_{11} - fa_{12})\, S_n^2 \tag{3.5}$$

Отметим, что эта работа всегда отрицательна, а свое минимальное значение достигает при $v_n = 0$, когда контактная деформация соударяющихся тел максимальна. Отвечающий этому моменту потерянный ударный импульс и работа равны (предполагается, что данный момент принадлежит интервалу скольжения):

$$S_{n0} = -v_{n-}/(a_{11} - fa_{12}), \quad A_{n0} = -1/2 v_{n-}^2/(a_{11} - fa_{12}) \tag{3.6}$$

Для определения на основе полученных зависимостей характеристик послеударного динамического состояния тел требуется ввести дополнительное предположение. Это предположение, в соответствии с известной гипотезой Ньютона, можно записать в виде равенства

$$S_{n+} = (1 + R)\, S_{n0} \tag{3.7}$$

где S_{n+} — нормальный импульс в момент окончания соударения, а R — так называемый коэффициент восстановления ударного импульса ($0 \le R \le 1$). Тогда, полагая, что удар носит скользящий характер, при учете (3.1) и (3.6) получим

$$S_{n+} = -\frac{(1+R)\,v_{n-}}{a_{11} - fa_{12}}, \quad v_{\tau+} = v_{\tau-} - \frac{a_{12} - fa_{22}}{a_{11} - fa_{12}}(1+R)\,v_{n-} \tag{3.8}$$

Кроме того из последнего равенства (3.1) имеем

$$v_{n+} = -Rv_{n-} \tag{3.9}$$

Равенство (3.9) показывает, что при неизменном направлении проскальзывания коэффициент R имеет также смысл коэффициента восстановления относительной нормальной скорости. Из (3.8) вытекает явное неравенство, гарантирующее скользящий характер соударения ($v_{\tau+} > 0$):

$$v_{\tau-} > \frac{a_{12} - fa_{22}}{a_{11} - fa_{12}}(1+R)\,v_{n-}$$

Приведем теперь выражение для нормальной работы в момент окончания удара. Из (3.3) при $S_n = S_{n+}$ будем иметь $A_{n+} = -1/2\,(1-R^2)\,v_{n-}^2/2\,(a_{11} - fa_{12})$. Отсюда при учете (3.6) получим

$$A_{n+} = (1 - R^2)\,A_{n0} \tag{3.10}$$

Таким образом величина R в определенном смысле характеризует относительную долю работы нормальной силы на расталкивание соударяющихся тел.

В наиболее общем случае равенства (1.17), (1.18), а также при определенных условиях либо (2.4), либо (2.5) определяют основные характеристики импульсивного движения v_n, v_τ, θ, S_2 и S_3 как непрерывные однозначные функции S_n. Среди них качественно наиболее простой предсказуемый характер имеют функции $v_n(S_n)$, а также $A_n(S_n)$ (см. (3.4)). Поэтому для определения послеударного состояния тел необходимо и достаточно оказывается задать любое из трех равенств (3.7), (3.9), (3.10). Эти равенства, однако, в общем случае не могут удовлетворяться одновременно. Иными словами, конечный результат во всех трех случаях будет, вообще говоря, различный.

Кинематическое равенство (3.9) должно быть отброшено как не удовлетворяющее физическому смыслу общей задачи [3]. Что же касается энергетического соотношения (3.10), то оно может оказаться более соответствующим действительности, чем (3.7). Существенно, что это равенство, как и (3.7), сохраняет смысл и в случае стесненного косого соударения тел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотов Е. А.* Об ударе двух твердых тел при действии трения//Изв. Моск. инж. училища. 1908. Ч. 2. Вып. 2. С. 43—55.

2. *Раус Э. Дж.* Динамика систем твердых тел. Т. 1. М.: Наука, 1983. 463 с.

3. *Нагаев Р. Ф.* Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985. 200 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
3.V.1990