

© 1992 г. В. И. ПАНИЧКИН

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОВСТВОРОЧНОЙ СОЛНЕЧНОЙ БАТАРЕИ В ПРОЦЕССЕ РАСКРЫТИЯ

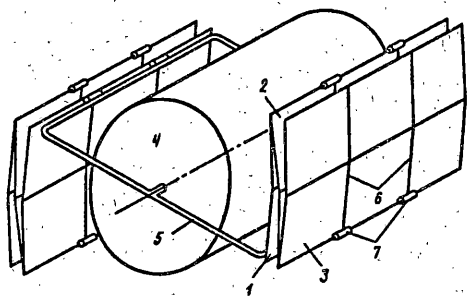
В [1] исследовалась кинематика плоскопараллельного движения многостворочной солнечной батареи (СБ) при ее раскрытии пружинно — тросовым механизмом с несмещаемым корневым сечением. В аналогичной постановке в [2] проведено численное исследование динамики развертывания панелей СБ на ИСЗ Intelsat и Insat, осуществляющегося размещенными в шарнирах торсионами и натяжением тросов, синхронизирующих движение и фиксацию панелей.

При свободном раскрытии СБ с конечной жесткостью на космическом аппарате (КА) в системе СБ-КА возникает нестационарный динамический процесс [3], значительное влияние на параметры которого оказывает гибкость силовых элементов, инерционно-массовые характеристики всех частей конструкции и способ развертывания. Воспроизведение полной картины движения системы солнечных панелей совместно с КА в наземных экспериментах является весьма сложной и трудоемкой задачей, поэтому актуальным становится вопрос оценки максимальных усилий в узлах. Решение задач раскрытия в предположении абсолютной жесткости силового каркаса СБ не позволяет дать такую оценку. Требуется создание динамической модели, учитывающей деформирование створок СБ после их фиксации и последующие колебания вместе с КА.

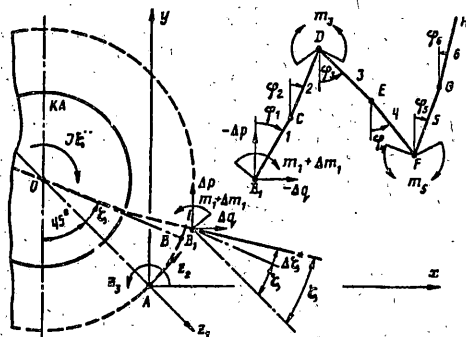
1. Динамическая модель многостворочной солнечной батареи. На фиг. 1 показано исходное расположение створок 1, 2, 3 СБ на упругодеформируемой траверсе 5, жестко соединенной в период раскрытия с КА 4. В узлах соединения створок между собой расположены пружины кручения — торсионы 7, с момента расфиксации которых и начинается процесс раскрытия СБ. Продольными силовыми элементами каркаса створок СБ являются два стержня 6. Створка 1 именуется корневой, а плоскость ее соединения с траверсой 5 — корневым сечением.

В предлагаемой динамической модели система створок СБ моделируется плоской стержневой конструкцией (фиг. 2). Поперечное сечение  $F$  стержней 1—6 равно площади сечения двух тонкостенных углепластиковых трубок каркаса, а их масса принимается равной массе створок СБ.

На фиг. 2 представлена система нагрузок, действующих на створки, КА и траверсу, место соединения которой с корневым сечением первой створки описывает в плоскости  $xu$  окружность радиуса  $R = OA$ . Фиксированная система координат  $xu$  привязана к точке  $A$  — начальному положению траверсы перед началом раскрытия, т. е.  $B_1$  — место расположения корневого сечения с учетом деформирования траверсы, повернутой вместе с КА на угол  $\xi$ . Угол  $\xi^* = \xi + \Delta\xi^*$  соответствует местному углу поворота траверсы в точке  $B_1$ . Податливость траверсы в точке  $A$  при действии единичных нагрузок в направлениях  $z_1, z_2, z_3$  определяется коэффициентами влияния  $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{33}$ . Проекции перемещений  $AB, AB_1$  и  $BB_1$  на плоскости  $xu$  обозначаются как  $x, y; x^*, y^*; \Delta x^*, \Delta y^*$  соответственно. Для траверсы, повернутой вместе с КА



Фиг. 1



Фиг. 2

на угол  $\zeta$ , зависимость между упругими составляющими перемещений и усилиями в точке  $B$  в проекциях на оси  $xu$  имеет следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} \Delta x^* \\ \Delta y^* \\ \Delta \zeta^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_{11}L_{12}L_{13} \\ L_{21}L_{22}L_{23} \\ L_{31}L_{32}L_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta q \\ \Delta p \\ m_1 + \Delta m_1 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$L_{11} = \delta_{11}b^2 + \delta_{22}a^2, \quad L_{22} = \delta_{11}a^2 + \delta_{22}b^2, \quad L_{33} = \delta_{33}$$

$$L_{12} = L_{21} = (\delta_{22} - \delta_{11})ab, \quad L_{23} = L_{32} = \delta_{23}b, \quad L_{13} = L_{31} = \delta_{23}a$$

$$a = \sin(\pi/4 - \zeta), \quad b = \cos(\pi/4 - \zeta)$$

В узлах стержневой системы до моментов фиксации створок между собой расположены торсионы с действующими в них суммарными моментами кручения

$$m_i = m_i^0 - C\xi_i \quad (i = 1, 3, 5) \quad (2)$$

где  $C$  — крутильная жесткость,  $m_i^0$  — начальные значения моментов,  $m_2^0 = m_3^0 = 1,25m_1^0$ ,  $\xi_i$  — углы раскрытия створок

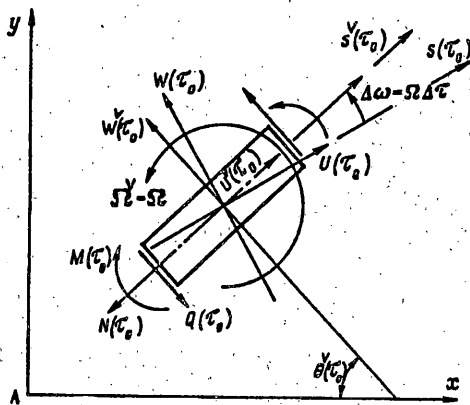
$$\xi_1 = \varphi_1 - \varphi_1^H + \zeta^*, \quad \xi_3 = \varphi_2 + \varphi_3, \quad \xi_5 = \varphi_4 + \varphi_5 \quad (3)$$

конечные значения которых  $\xi_1^k = 3\pi/4$ ,  $\xi_3^k = \xi_5^k = \pi$ . Уравнение плоского вращения КА вокруг точки  $O$ :

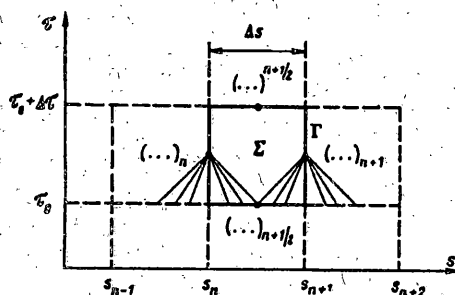
$$J\zeta^* = M_{KA} \quad (4)$$

$$M_{KA} = 2 [(\Delta qa + \Delta pb)(\Delta x^*b - \Delta y^*a + R) - (\Delta qb - \Delta pa) \times \\ \times (\Delta x^*a + \Delta y^*b) + m_1 + \Delta m_1$$

где  $J$  — момент инерции КА;



Фиг. 3



Фиг. 4

$\Delta q, \Delta p, \Delta m_1$  — дополнительные нагрузки в корневом сечении, возникающие за счет инерционности КА и деформирования траверсы до фиксации корневой створки  $\Delta m_1 = 0$ :

$$\begin{Bmatrix} \Delta q \\ \Delta p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{41} A_{42} \\ A_{51} A_{52} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x^* - L_{13} m_1 \\ \Delta y^* - L_{23} m_1 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\Delta \zeta^* = L_{13} \Delta q + L_{23} \Delta p + L_{33} m_1$$

после фиксации корневой створки  $\Delta m_1 \gg m_1$ :

$$\begin{Bmatrix} \Delta q \\ \Delta p \\ \Delta m_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11} A_{12} A_{13} \\ A_{21} A_{22} A_{23} \\ A_{31} A_{32} A_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x^* \\ \Delta y^* \\ \Delta \zeta^* \end{Bmatrix} \quad (6)$$

где коэффициенты матриц жесткости в выражениях (5), (6) находятся из решений системы уравнений (1).

2. Уравнения деформирования стержневой системы. При раскрытии СБ створки совершают на плоскости  $xu$  большие (конечные) перемещения, имеющие один порядок с их линейными размерами. Уравнения динамики стержней с конечными перемещениями в фиксированной системе координат имеют весьма сложный вид [4], а решения задач в такой постановке насчитываются единицами [5].

В нашем случае, несмотря на конечность перемещений, деформации створок остаются малыми, поэтому представляется уместным для расчета таких процессов использовать линейные уравнения балки типа Тимошенко, записываемые в локальных подвижных системах координат, а каждый момент времени связаных с элементами створок (фиг. 3), ориентация которых относительно фиксированной системы с началом в точке  $A$  осуществляется координатами  $x$ ,  $y$  и углом  $\theta$ .

Плоское деформирование стержневой системы описывается уравнениями движения

$$\frac{\partial N}{\partial s} - \rho F \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial s} - \rho F \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial s} - \rho I \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

уравнениями связи между усилиями и деформациями

$$N = B\varepsilon, \quad Q = G\varepsilon_{12}, \quad M = D\kappa \quad (8)$$

соотношениями связи деформаций с перемещениями

$$\varepsilon = \partial U / \partial s, \quad \varepsilon_{12} = \partial W / \partial s - \omega, \quad \kappa = \partial \omega / \partial s \quad (9)$$

Здесь  $s$  — координата вдоль оси балки,  $F$ ,  $I$ ,  $B$ ,  $G$ ,  $D$  — площадь, момент инерции и жесткости поперечного сечения балки на растяжение, поперечный сдвиг и изгиб,  $\rho$  — плотность материала. Если ввести безразмерные величины  $\tau = ctR^{-1}$ ,  $\bar{s} = sR^{-1}$ ,  $c = B^{1/2}(\rho F)^{-1/2}$ ,  $\gamma = FRJ^{-1}$ ,  $\bar{u} = uR^{-1}$ ,  $\bar{U} = Uc^{-1}$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega Rc^{-1}$ ,  $\bar{N} = NB^{-1}$ ,  $\bar{M} = MRB^{-1}$ ,  $\bar{D} = DF(IB)^{-1}$ , то в интегральной форме система уравнений (7)–(9) представляет собой шесть однотипных выражений:

$$\oint_{\Gamma} A ds + B d\tau = - \iint_{\Sigma} C ds d\tau \quad (10)$$

$$A = \begin{Bmatrix} U \\ W \\ \Omega \\ N \\ Q\alpha^{-2} \\ M \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \\ U \\ W \\ \Omega \end{Bmatrix}, \quad C = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma Q \\ 0 \\ -\Omega \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \alpha^2 = k_s \frac{1-\nu}{2}, \quad k_s = 0,833$$

где  $\Sigma$  — односвязная замкнутая область на плоскости переменных  $s$ ,  $\tau$ , ограниченная замкнутой кривой  $\Gamma$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Здесь и далее индексы над безразмерными величинами опущены. В узлах системы должны выполняться условия совместности деформирования

$$X^+ = X^-, \quad Y^+ = Y^- \quad (11)$$

$$P^+ = P^-, \quad T^+ = T^- \quad (12)$$

$$X = U \sin \theta - W \cos \theta, \quad Y = U \cos \theta + W \sin \theta$$

$$P = N \sin \theta - Q \cos \theta, \quad T = N \cos \theta + Q \sin \theta$$

До фиксации узлов изгибающие моменты на краях стержней равны

раскрывающим (2), а после фиксации к выражениям (11) должны быть добавлены условия:

$$\Omega^+ = \Omega^- \quad (13)$$

$$M^+ = M^- \quad (14)$$

3. Метод сквозного счета Годунова. Для исследования динамического процесса в стержневой конструкции используется метод сквозного счета Годунова [8]. Для решения нестационарных задач этот метод использовался ранее в [9, 10]. Интервал изменения независимой переменной  $s$  разбивается на отрезки длиной  $\Delta s$  (фиг. 4). Отрезку, ограниченному точками  $s_n$  и  $s_{n+1}$ , присваивается номер  $n + 1/2$ . Средние в пределах разностной ячейки значения усилий и скоростей обозначаются следующим образом  $(N, U, \dots)_{n+1/2}$  при  $\tau = \tau_0$ ,  $(N, U, \dots)_{n+1/2}$  при  $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$ . Средние в пределах промежутка времени  $\Delta\tau$  величины усилий и скоростей в точках  $s = s_n$  обозначаются  $(N, U, \dots)_n$ .

На плоскости  $st$  в качестве контура  $\Gamma$  для решений уравнений (10)–(14) выбирается прямоугольник со сторонами  $\Delta s, \Delta\tau$  (фиг. 4). Сущность метода заключается в том, что переход от предыдущего момента к последующему осуществляется в два этапа, на первом — вычисляются усилия и скорости элементов стержней в точках  $s_n$ . На втором этапе после интегрирования уравнений (10) по контуру  $\Gamma$  определяются скорости и усилия, соответствующие следующему моменту времени, перемещения вычисляются интегрированием скоростей:

$$U^{n+1/2} = U_{n+1/2} + (N_{n+1} - N_n) \Delta\tau / \Delta s \dots \quad (15)$$

$$u^{n+1/2} = u_{n+1/2} + (U_{n+1/2} + U^{n+1/2}) \Delta\tau / 2 \dots$$

Для нахождения усилий и скоростей с целочисленными индексами применяются соотношения на характеристиках системы уравнений (7)–(9), которые в конечно-разностной форме имеют следующий вид:

$$N_n = a_1 - fU_n, \quad s = -ft, \quad a_1 = [N + fU]_{n+1/2}$$

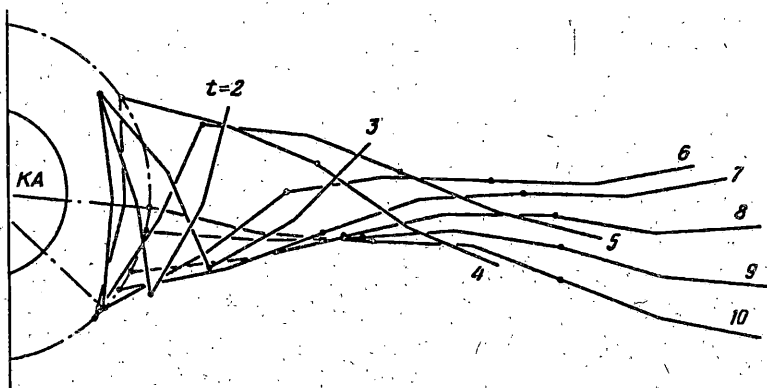
$$M_n = a_2 - f\Omega_n, \quad s = -ft, \quad a_2 = [M + f(\Omega + \gamma Q \Delta\tau / 2)]_{n+1/2} \quad (16)$$

$$Q_n = a_3 - f\alpha W_n, \quad s = -\alpha ft, \quad a_3 = [Q + fW - \Omega \alpha^2 \Delta\tau / 2]_{n+1/2}$$

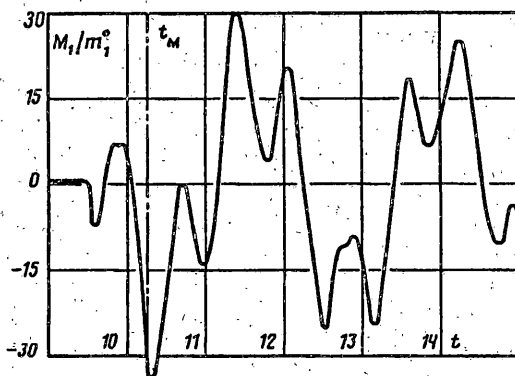
Здесь  $f = -1$  на правых краях элементов, а  $f = 1$  — на левых. Для расчета граничных условий на левых краях элементов стержней используются соотношения отрицательного направления, а для расчета правых краев — положительного (фиг. 4). Условием устойчивости явной разностной схемы Годунова является соотношение Куранта  $c\Delta\tau / \Delta s \leq 1$ , которое определяет соответствие между шагами по времени и координате. Здесь  $c$  — максимальная скорость распространения возмущений в данной точке. Оценки сходимости данной разностной схемы для задач динамики конструкций проведены ранее в [9, 10].

4. Алгоритм решения. Опишем алгоритм расчета одного временного шага в нашей математической модели.

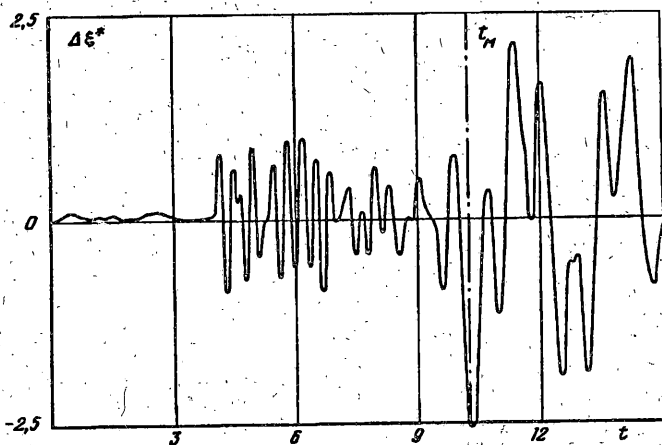
Величины раскрывающих моментов  $m_i$  находятся из (2), где значения углов, входящие в (3), берутся с нижнего временного слоя при  $\tau = \tau_0$ . Реакции связи, действующие в корневом сечении, определяются из соотношений (5), (6), а далее по формулам (11)–(16) находятся усилия,



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

скорости и перемещения стержневой системы при  $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$ , в частности и смещения точки  $B_1$ .

За время  $\Delta\tau$  элемент створки (фиг. 3) поворачивается на угол  $\Delta\omega = \Omega\Delta\tau$ , а вместе с ним поворачивается и локальная система координат, связанная с центром элемента. Линейные скорости в новой, повернутой на угол системе

$$\dot{U}^v = U + \Omega \Delta t W, \quad \dot{W}^v = W - \Omega \Delta t U \quad (17)$$

Использование этого приема позволяет проводить расчет больших конечных перемещений в деформируемой системе с помощью достаточно простых линейных уравнений. Подобные соображения высказывались ранее в [6, 7]. Уравнение (4) заменяется двумя разностными соотношениями:

$$J(\xi_+^* - \xi_-^*) = M_{KA} R^2 c^2 \Delta t \quad (18)$$

$$\xi_+ = \xi_- + (\xi_-^* + \xi_+^*) \Delta t / 2$$

где знаки (+, -) означают принадлежность величины к верхнему или нижнему временному слою. Значение  $\xi_+$  из (18) определяет новое положение точки  $B$ . Разность между смещениями точек  $B$  и  $B_1$  позволяет вычислить проекции  $\Delta x^*$ ,  $\Delta y^*$  и далее по формуле (5) угловое смещение  $\Delta \zeta^*$ . После фиксации корневой створки дополнительное угловое смещение в точке  $B$  за счет деформирования траверсы находится интегрированием угловой скорости элемента стержня, прилегающего к корневому сечению.

5. Результаты расчета. На фиг. 5 показано положение створок в процессе их раскрытия и фиксации. Видно, что в начале процесса ( $0 < t < 5$  с) корневая створка как бы отталкивает от себя траверсу, при этом до 4-й секунды корневое сечение практически не смещается. На 4-й секунде происходит фиксация 2-й и 3-й створок, затем при  $t = 6,4$  с фиксируется 1-я и 2-я створки и при  $t = 9,5$  с фиксируется корневая створка. После этого начинаются низкочастотные колебания образовавшихся консолей вместе с КА (фиг. 6, 7). На фиг. 6 показано изменение во времени изгибающего момента в корневом сечении. Видно, что после фиксации корневой створки нагрузки на каркасы СБ превосходят максимальные раскрывающие нагрузки в несколько десятков раз. На фиг. 7 показано в градусах приращение углового смещения траверсы в точке  $B$  за счет ее упругого деформирования. Четко различимы три характерных процесса: незначительные смещения до первой фиксации ( $0 < t < 4$  с) и нестационарный процесс с умеренными амплитудами между первой и последней фиксациями и с максимальными смещениями после фиксации корневой створки. На фиг. 6, 7 символом  $t_M$  отмечены моменты достижения максимальных напряжений в траверсе.

Поскольку точных аналитических решений подобных задач не существует, а экспериментальные данные испытаний конструкции в связи с их большой сложностью имеют скорее качественный характер, то проверка алгоритма была проведена на примере раскрытия системы из четырех створок с несмещаемым корневым сечением, расчеты которой были выполнены в предположении абсолютной жесткости стержней [1]. Малость деформаций стержней до первой фиксации позволила предположить, что перемещения створок в плоскости  $xu$ , полученные по двум разным динамическим моделям должны быть достаточно близкими, что и было подтверждено расчетами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Паничкин В. И. Математическое моделирование динамики раскрытия многостворочной солнечной батареи // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5.
2. Уай Б., Фурумото Н., Бэннерджи Э. К., Карбе П. М. Моделирование и расчет динамики развертывания панелей солнечных батарей космического аппарата // Аэрокосмич. техника. 1987. № 5. С. 161—169.

3. Ibrahim A. M., Modi V. J. On the dynamics of beam type structural during deployment//Acta Astron. 1986. V. 13. № 6/7. t. 1. P. 319—331.
4. Попов Е. П. Теория и расчёт гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 296 с.
5. Светлицкий В. А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 279 с.
6. Пановко Я. Г. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1985. 287 с.
7. Седов Л. И. О сложении движений относительно деформируемых систем отсчета//1978. Т. 42. Вып. 1. С. 175—177.
8. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
9. Паничкин В. И. Расчет нелинейных одномерных волновых процессов деформации балок//Тр. симпоз.: «Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах». Таллинн: Ин-т кибернетики АН СССР, 1973. Т. 2. С. 143—151.
10. Паничкин В. И. Осесимметричные переходные процессы в оболочечных конструкциях с амортизаторами//Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1981. Вып. 18. С. 74—84.

Москва

Поступила в редакцию  
14.II.1991