

ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОЦЕДУРА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПРИ ИССЛЕДОВАНИЯХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОНСТРУКЦИЯ — ЖИДКОСТЬ НА ОСНОВЕ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Конечноэлементная формулировка задачи гидроупругого взаимодействия в виде матричных уравнений относительно значений давления жидкости и перемещений конструкции приводит к соответствующей несимметричной задаче о собственных значениях, решение которой достаточно сложно. В [1] для решения несимметричных задач о собственных значениях предлагается метод подпространственного итерирования. Отмечается, что затраты машинного времени в этом случае несколько больше, чем для сопоставимых симметричных задач. По этой причине большинство исследований последних лет посвящено попыткам дать симметричную формулировку задачи с помощью уравнений относительно перемещений жидкости либо путем перехода к потенциалу перемещений в сочетании с уравнениями для давлений жидкости [2].

В предлагаемой работе обсуждается метод частотно-динамической конденсации (ЧДК) в качестве эффективной процедуры для решения симметричных задач о собственных значениях высокой размерности при анализе гидроупругих взаимодействий. Метод можно применять к задачам взаимодействия конструкций как с несжимаемой, так и со сжимаемой жидкостями.

1. Введение. Рассмотрим решения задач взаимодействия конструкция — жидкость, полагая, что жидкость идеальная, а конструкция является линейно-упругой. Конечноэлементная формулировка задачи о свободных колебаниях конструкции с жидкостью (без учета волн на свободной поверхности) приводит к следующим уравнениям движения, записанным для перемещений конструкции и потенциала перемещений в сочетании с уравнениями для давлений жидкости [2]:

$$(K - \omega^2 M) \delta = 0 \quad (1)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_p & L & 0 \\ L^T & -H & Q \\ 0 & Q & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{bmatrix} u \\ \gamma \\ p \end{bmatrix}$$

Здесь u , γ , p — векторы узловых перемещений конструкции, значений потенциала перемещений и давлений жидкости; K_p , M_p — матрица жесткости и масс конструкции; L — матрица площадей границы раздела «конструкция — жидкость»; H , Q — матрицы гидродинамических жесткостей и масс жидкости; ρ — плотность жидкости. Выражения для вычисления матриц конечных элементов, из которых формируются матрицы K_p , M_p , H , Q , L , можно найти в [1...4].

Если пренебречь сжимаемостью жидкости ($Q=0$), то из (1) будет следовать система уравнений, описывающая взаимодействия конструкции с присоединенной массой жидкости.

2. Метод решения. Для определения собственных чисел и векторов уравнения (1) используется метод ЧДК [5]. Он включает пять этапов: 1 — понижение порядка матриц; 2 — определение собственных чисел и векторов редуцированного матричного уравнения; 3 — восстановление матриц собственных векторов до

полных $\Delta = [\delta_{01} \delta_{02} \dots \delta_{0l}]$; 4 — вычисление приведенных матриц жесткости и масс $K_i = \Delta^T K \Delta$, $M_i = \Delta^T M \Delta$; 5 — решение приведенного матричного уравнения $(K_i - \omega^2 M_i) q = 0$ и уточнение собственных чисел и векторов $\delta_i = \Delta q_i$.

В этой схеме вычислений в отличие от [5] предусматривается: матрицы уравнения (1) масштабируются для выравнивания порядка элементов матриц, что обеспечивает устойчивость вычислительного процесса, компоненты вектора γ исключаются по схеме Гаусса, компоненты вектора u и p исключаются по схеме частотно-динамической конденсации. Для оценки погрешности вводятся параметры χ и φ . Параметр χ используется для оценки погрешности, вносимой при исключении переменных в уравнения вектора γ , а также в уравнения для компонент векторов u и p , парциальные частоты которых лежат вне диапазона конденсации. Он определяется формулой

$$\chi_i = | \epsilon_u^s(\omega_{cp}) / K_u^{n+1} |$$

где $\epsilon_u^s(\omega_{cp})$ — погрешность, вносимая в уравнение i -й переменной при исключении s -й переменной; K_u^{n+1} — элемент матрицы K на $n+1$ -ом шаге алгоритма понижения порядка матриц; $\omega_{cp}^2 = (\omega_1^2 + \omega_2^2)/2$; ω_1 и ω_2 — граничные частоты диапазона конденсации.

Допустимые значения параметра χ не превышают 0,0004 при исключении компонент вектора γ и 0,02 при исключении компонент вектора u , p .

Параметр φ позволяет оценить суммарную погрешность, вносимую в уравнения для переменных векторов u и p , парциальные частоты которых лежат в диапазоне конденсации

$$\varphi = \sum | h_i \epsilon_u^{n+1} | / \sum | K_u^{n+1} - \omega^2 M_u^{n+1} |$$

$$h_i = \begin{cases} 0 & (\omega_i^{n+1} < \omega_1, \omega_i^{n+1} > \omega_2) \\ 1 & (\omega_1 \leq \omega_i^{n+1} \leq \omega_2) \end{cases}$$

где ω_i^{n+1} — парциальная частота i -й переменной на $n+1$ -ом шаге алгоритма понижения порядка матриц; $\epsilon_u^{n+1} = \epsilon_u^n + \epsilon_u^s(\omega)$; M_u^{n+1} — элемент матрицы M на $n+1$ -ом шаге алгоритма понижения порядка матриц.

В зависимости от требуемой точности допустимые значения параметра φ могут меняться в процессе понижения порядка матриц от 0,02 до 0,1.

3. Численные примеры. Достоверность решений, получаемых с помощью предлагаемого метода, и быстроедействие вычислительной процедуры демонстрируется на примерах решения двух задач.

Рассматривается задача собственных колебаний тороидальной оболочки, наполовину заполненной жидкостью, шарнирно закрепленной по внешнему и внутреннему экватору [4]. Оболочка с жидкостью имеет следующие геометрические и физические характеристики. Оболочка: расстояние от оси вращения до центра образующей 2 м, радиус окружности 1 м, толщина оболочки 0,01 м, плотность материала 2750 кг/м³, модуль упругости 70 ГПа, коэффициент Пуассона 0,3. Жидкость: плотность 1000 кг/м³. Число степеней свободы оболочки с жидкостью 300. В табл. 1 представлены собственные частоты (Гц) оболочки с несжимаемой жидкостью, полученные при различном числе k волн в окружном направлении с помощью вычислительного комплекса ДИАС¹ (первый столбец). В этой же таблице для сравнения приведены результаты, полученные в [4] (второй столбец). Как видно из таблицы, расхождения в частотах менее 0,2%.

Вторая задача связана с изучением осесимметричных колебаний цилиндри-

¹ Павлюк Ю. С., Мокеев В. В., Борщ С. В. Комплексная система динамического анализа для проектирования сложных конструкций машиностроения // Вибрация и вибродиагностика. Проблемы стандартизации. Тез. докл. II Всесоюзной конференции. Горький, 1988. С. 36—37.

№ п.п.	k=0		k=1		k=2	
	1	2	1	2	1	2
1	53,75	53,70	53,06	52,95	49,90	49,86
2	61,38	61,19	57,82	57,70	51,12	51,05
3	77,78	77,97	75,51	75,01	75,17	75,21
4	92,91	92,84	83,62	83,73	78,32	78,63

Таблица 2

H/R = 1		H/R = 2		H/R = 4	
1	2	1	2	1	2
129,02	129,64	71,04	71,30	36,59	36,77
123,30	123,88	66,70	66,95	34,12	34,29

ческой оболочки с плоским дном, полностью заполненной водой. Нижний край оболочки заземлен по углу поворота и свободен по радиальному смещению, верхний край свободно оперт. Параметры оболочки $H/R = 1; 2; 4; 6$; R — радиус; H — длина; толщина $0,01$ м; модуль упругости 70 ГПа; коэффициент Пуассона $0,3$; плотность материала 2700 кг/м³. В табл. 2 приведены собственные частоты (Γ_1) для оболочки с несжимаемой (верхняя строка) и сжимаемой (нижняя строка) жидкостью, которые дают определенное представление о влиянии сжимаемости жидкости на собственные частоты. Оболочка с несжимаемой жидкостью описана конечноэлементной моделью с 77 степенями свободы, а оболочка со сжимаемой жидкостью — конечноэлементной моделью со 120 степенями свободы. Результаты, полученные с помощью вычислительного комплекса ДИАС, помещены в первый столбец. Во втором столбце для сравнения приведены результаты расчетов, полученные в [6].

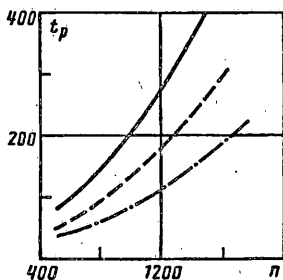
На фиг. 1 показано влияние размерности модели n на время вычисления десяти собственных частот и форм, а на фиг. 2 — влияние количества вычисляемых частот и форм m на время вычисления для моделей размерностью 550 и 830. Время вычислений t_c складывается из времени центрального процессора ЕС-1061, затраченного на формирование матриц и вычисление собственных чисел и векторов. Зависимости получены для модели торового бака, наполовину заполненного сжимаемой (сплошная линия) и несжимаемой (штриховая линия) жидкостями. Представленные на фигурах зависимости показывают, что учет сжимаемости жидкости приводит к существенному увеличению времени вычислений.

4. Быстрая схема решения. В большинстве случаев вычисленные собственные частоты лишь незначительно отличаются от таковых для несжимаемой жидкости. Это обстоятельство позволяет существенно упростить процедуру построения решений (1) для таких систем. В частности, влияние жидкости на собственные частоты конструкции можно изучить, отбросив в (1) все члены с давлением жидкости. Тогда фигурирующие в уравнении (1) матрицы и будут иметь следующую структуру:

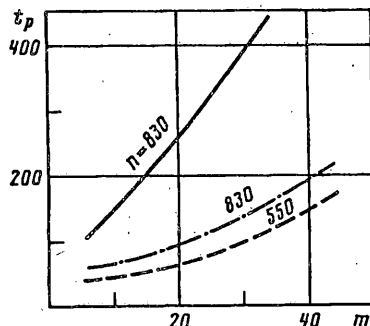
$$K = \begin{bmatrix} K_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_p & L \\ L^T & -H \end{bmatrix} \quad (2)$$

а вектор δ будет иметь вид $\{u\}^T$.

Эта система симметричная и для ее решения можно воспользоваться методом ЧДК. На третьем этапе вычислений после восстановления векторов u и γ



Фиг. 1



Фиг. 2

определяется вектор $p = \rho \omega_i^2 \gamma$, где ρ — плотность жидкости; ω_i — собственные частоты системы (2), полученные на втором этапе метода ЧДК. На четвертом и пятом этапе вычисления приведенных матриц и собственных значений осуществляются для полной системы (1).

Описанная схема решения для конструкций со сжимаемой жидкостью (быстрая схема метода ЧДК) позволяет существенно уменьшить трудоемкость получения решения при незначительном снижении точности.

На фиг. 1 и 2 показано влияние размерности модели торового бака с жидкостью и количества вычисленных частот и форм на время счета при использовании быстрой схемы метода ЧДК (штрихпунктирная линия). Снижение временных затрат при использовании быстрой схемы возможно в два и более число раз.

Точность быстрой схемы метода ЧДК зависит от деформативности стенки оболочек (см. табл. 3). У многих гидроупругих систем, в том числе и у рассмотренной выше цилиндрической оболочки, взаимодействие с несжимаемой и сжимаемой жидкостью приводит к весьма близким значениям низших собственных частот при условии $f < f^* = c(2\pi l)^{-1} [1 + (c^2 \rho l / Eh)^{1/2}]$, где f — частота в Гц; c — скорость звука в жидкости; h — толщина оболочки; l — характерный размер конструкции. Это заключение хорошо согласуется с результатами вычислений собственных частот оболочки с жидкостью, представленных в табл. 3, если принять $l = H$ при единичном радиусе оболочки. В таблице представлены значения низших собственных частот (Гц), полученные для несжимаемой (первый столбец) и сжимаемой (второй столбец) жидкости методом ЧДК, а также для сжимаемой жидкости с помощью быстрой схемы ЧДК (третий столбец). Как видно, частоты оболочки со сжимаемой жидкостью, полученные с помощью быстрой схемы и лежащие ниже критической частоты f , хорошо совпадают с точными значениями. Определенное представление о влиянии деформативности стенки оболочки на сходимость результатов вычислений по быстрой схеме дает табл. 4, в которой представлены собственные частоты (Гц) оболочки с параметрами $H/R = 6$ и модулем упругости, увеличенным на два порядка. В первом и втором столбцах таблицы приведены собственные частоты для оболочки с несжимаемой и сжимаемой жидкостью, полученные методом ЧДК, а в третьем столбце — собственные частоты оболочки со сжимаемой жидкостью, полученные с помощью быстрой схемы ЧДК. Для исследуемой системы «оболочка — жидкость» значения собственных частот существенно зависят от сжимаемости жидкости (все собственные частоты лежат выше критической частоты $f = 47$ Гц) и применение быстрой схемы ЧДК дает плохую сходимость.

Выводы. Предлагается экономичная процедура определения собственных частот и форм конструкций со сжимаемой и несжимаемой жидкостью при их конечноэлементной дискретизации. Показано, что такая процедура обладает хорошей точностью и высоким быстродействием при нахождении частот в заданном

Таблица 3

№ пп.	$H/R = 1, f = 666$			$H/R = 6, f = 214$		
	1	2	3	1	2	3
1	129	123,9	124,5	24,71	23,02	23,22
2	273	269,1	269,2	76,33	71,78	72,31
3	382	379,2	379,3	129,8	123,8	124,5
4	510	507,4	507,5	186,5	180,5	181,2
5	666	662,7	662,8	223,4	221,7	228,5
6	852,5	696,7	847,8	251,9	244,1	244,9
7	1316	1303	1326	301,2	293,9	294,4
9	1712	1353	1710	817,5	644,2	821,9
10	2242	1393	2240	829,2	675,3	834,1

Таблица 4

№ пп.	1	2	3
1	247,1	61	168,3
2	763,8	195,7	540,2
3	1298,4	356,1	940,4
4	1865,5	556,1	1365
5	2227	789,7	1844
6	2521	898,3	—

интервале и соответствующих им форм. При определенных условиях быстродействие описанной процедуры расчета конструкций со сжимаемой жидкостью существенно повышается, если на первых трех этапах вычислений методом ЧДК пренебречь сжимаемостью жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юй Й. Подпространственное итерирование в задачах о собственных значениях при исследовании гидроупругих взаимодействий. // Теоретические основы инженерных расчетов. 1988. № 1. С. 176—181.
2. Morand H., Ohayon R. Substructure variational analysis of the vibrations of coupled fluid — structure systems. Finite element results // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1979. V. 14. P. 741—751.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 544 с.
4. Григорьев В. Г. Расчет динамических характеристик сложных оболочечных конструкций с жидкостью // Колебания конструкций с жидкостью. Сб. науч. докл. 4 симпози. ЦНТИ «Волна». 1980. С. 102—104.
5. Гриненко Н. И., Мокеев В. В. О задачах исследования колебаний конструкций методом конечных элементов // Прикладная механика. 1985. 21. № 3. С. 25—30.
6. Шклярчук Ф. Н. Колебания упругой оболочки, содержащей тяжелую сжимаемую жидкость // Колебания конструкций с жидкостью. Сб. науч. докл. 3 симпози. ЦНТИ «Волна». 1976. С. 386—396.

Челябинск

Поступила в редакцию
10.XI.1989