МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1992

УДК 539.3

 А. С. БРАТУСЬ

О ВЗАИМОСВЯЗЯХ ОСНОВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

В задачах оптимального проектирования упругих конструкций (стержни, арки, пластины, оболочки) в качестве параметра проектирования обычно рассматривается закон изменения распределения толщин элементов. Чаще всего в качестве функционалов (функция цели) берутся потенциальная энергия деформации (работа внешних сил), основная (первая) частота собственных колебаний, жесткость, прочность. Как правило, каждая из задач оптимизации с указанным функционалом решается изолированно, и вопрос о том, будет ли полученное решение удовлетворительным по отношению к другим функционалам, часто остается открытым. В работе приводятся оценки, позволяющие в ряде случаев оценить значения каждого из приведенных функционалов через значения других функционалов, вычисление которых представляет меньшие трудности. Изложение проводится на примере упругой пластины переменной толщины, однако полученные результаты с небольшими изменениями применимы ко многим консервативным системам.

1. Рассмотрим задачу о статическом изгибе упругой пластины переменной толщины $h(x, y)$, нагруженной поперечной силой $q(x, y)$ и закрепленной по кусочно-гладкому контуру, ограничивающему область D.

В соответствующих безразмерных переменных краевая задача имеет вид [1]:

$$A(h)\,w(x, y) = q(x, y), \quad (x, y) \in D$$

$$(w)_\Gamma = 0, \quad (\partial w/\partial n)_\Gamma = 0 \tag{1.1}$$

$$A(h) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} h^3(x, y) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} h^3(x, y) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) +$$

$$+ 2(1-\mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} h^3(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \tag{1.2}$$

где $\partial w/\partial n$ — производная по направлению внешней нормали к контуру Γ, μ — постоянная Пуассона.

Наряду с этим рассмотрим задачу об отыскании частот свободных колебаний

$$A(h)\,u(x, y) = \lambda h(x, y)\,u(x, y) \tag{1.3}$$

$$(u)_\Gamma = 0, \quad (\partial u/\partial n)_\Gamma = 0$$

Здесь $A(h)$ — оператор, определенный в (1.2).

Предположим, что функция $h(x, y)$ удовлетворяет ограничениям

$$0 < h_1 \le h(x, y) \le h_2, \quad \iint\limits_D h(x, y)\,dxdy = V \tag{1.4}$$

где h_1, h_2, V — заданные положительные постоянные. Первое условие в (1.4) задает ограничения на допустимый интервал распределения толщин, второе фиксирует объем (вес).

Множество непрерывных функций $h(x, y)$, удовлетворяющих условиям (1.4), далее будем обозначать через Q.

Рассмотрим функциональные пространства Соболева — $H_k(D)$ (k — целое положительное число), представляющие множества функций, которые суммируемы с квадратом вместе со своими производными до порядка k включительно. Через $\|w\|_k$ обозначим норму элемента в $H_k(D)$ (α_1, α_2 — целые неотрицательные числа)

$$\|w\|_k^2 = \sum_{\alpha_1+\alpha_2 \leq k} \iint_D \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} w \right|^2 dx\, dy \tag{1.5}$$

Далее изучаются лишь слабые решения краевых задач (1.1), (1.3) в пространстве $H_2^0(D)$, где $H_2^0(D)$ — множество функций из $H_2(D)$, которые обращаются в ноль на границе Γ вместе со своими первыми производными первого порядка [1]. Норма элемента в H_2^0 совпадает с нормой в H_2.

Перейдем к постановке задач оптимального проектирования с различными функционалами.

1. Найти такое распределение толщин $h \in Q$, при котором величина

$$\Phi_1(h) = \iint_D h^3 (w_{xx}^2 + 2\mu w_x^2 w_y^2 + w_{yy}^2 + 2(1-\mu) w_{xy}^2)\, dx\, dy \tag{1.6}$$

достигает своего минимума. Здесь $w(x, y)$ — решение краевой задачи (1.1) с фиксированным элементом $q(x, y) \in H_0$.

2. Найти распределение $h \in Q$, при котором величина первого собственного значения $\lambda_1(h)$ краевой задачи (1.3) достигает максимального значения. Для дальнейшего удобно записать этот функционал в виде

$$\Phi_2(h) = (\lambda_1(h))^{-1} \tag{1.7}$$

При этом задача о максимуме переходит в задачу о минимуме.

3. Найти распределение толщин $h \in Q$, при котором величина

$$\Phi_3(h) = \max_D |w(x, y)|^2 \tag{1.8}$$

достигает минимального значения. Здесь $w(x, y)$ — решение краевой задачи (1.1) с заданным элементом $q(x, y) \in H_0$. Функционал Φ_3 характеризует жесткость системы.

4. Функционал «прочность». Как показано в [2], задача оптимизации в этом случае сводится к отысканию такого распределения толщин $h \in Q$, при котором величина

$$\Phi_4(h) = \max_D \{h^2 [(w_{xx} + \mu w_{yy})^2 + (w_{yy} + \mu w_{xx})^2 -$$

$$- (w_{xx} + \mu w_{yy})(w_{yy} + \mu w_{xx}) + 3(1-\mu^2) w_{xy}^2]\} \tag{1.9}$$

достигает своего минимума. Здесь $w(x, y)$ — решение краевой задачи (1.1) с элементом $q(x, y) \in H_2$.

Вычислительные аспекты, возникающие при решении представленных задач оптимизации, различны. Задачи с функционалом (1.6) наиболее просты. Поиск минимума в задачах с локальными функционалами (1.8), (1.9) является более сложной проблемой. Задача с функционалом (1.7) занимает по сложности промежуточное положение между (1.6) и (1.8), (1.9). Поэтому естественно пытаться оценить значения функционалов сложных задач через более простые. При этом важно установить иерархию функционалов, т. е. ответить на вопрос о том, насколько значения каждого из них связаны со значениями других.

Пусть заданы два функционала $\Phi_i(h)$ и $\Phi_j(h)$ $(i \neq j)$, значения которых требуется минимизировать. Введем следующие определения.

Определение 1. Будем говорить, что функционал $\Phi_i(h)$ не слабее $\Phi_j(h)$, если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $h \in Q$ выполняется неравенство $\Phi_j(h) \leq c\Phi_i(h)$. Этот факт будем обозначать записью: $\Phi_j \leq \Phi_i$.

Определение 2. Если $\Phi_j \leq \Phi_i$ и $\Phi_j \geq \Phi_i$, то будем называть функционалы Φ_i и Φ_j эквивалентными (равносильными). Этот факт будем обозначать записью: $\Phi_i \sim \Phi_j$.

Если выполняется условие $\Phi_j \leq \Phi_i$, но не выполняется условие $\Phi_j \geq \Phi_i$, то будем говорить, что функционал Φ_i сильнее, чем функционал Φ_j (или Φ_j слабее, чем Φ_i) и использовать запись $\Phi_j < \Phi_i$.

2. Пусть $q(x, y)$ — некоторый фиксированный элемент из пространства H_0 и $h \in Q$. Рассмотрим краевую задачу (1.3). Известно [1, 3], что в этом случае краевая задача (1.3) имеет систему собственных функций $\{u_i(x, y)\}_{i=1}^{\infty}$ полную в пространстве H_2^0 и соответствующие собственные значения: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$. Систему собственных функций можно ортонормировать следующим образом (δ_{ij} — символ Кронекера):

$$(hu_i, u_j) = \iint_D hu_iu_j \, dx\, dy = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots) \tag{2.1}$$

Здесь и далее круглые скобки означают скалярное произведение в пространстве $H_0(D)$.

Решение краевой задачи (1.1) будем искать в виде ряда по системе собственных функций $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ задачи (1.3):

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_ju_j(x, y) \tag{2.2}$$

где a_j — коэффициенты Фурье этого представления $a_j = (hw, u_j)$. Поскольку $h(x, y) \geq h_1 > 0$ (1.4), то существует такая функция $p(x, y) \in H_0$, что $q(x, y) = h(x, y)\, p(x, y)$, причем справедлива оценка

$$\|hp\|_0^2 = \iint_D hp^2 \, dx\, dy \leq h_1^{-1} \iint_D q^2 \, dx\, dy = h_1^{-1} \|q\|_0^2 \tag{2.3}$$

Функцию $p(x, y)$ можно представить в виде ряда по системе собственных функций задачи (1.3):

$$p(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} b_ju_j(x, y), \quad b_j = (hp, u_j) = (q, u_j) \tag{2.4}$$

Подставим разложения (2.2) и (2.4) в уравнение (1.1) и умножим его скалярно в $L_2 = H_0$ на функции $u_1, u_2, \ldots$. С учетом равенств (2.1) получим соотношение

$$b_j = \lambda_j(h)\, a_j \tag{2.5}$$

Умножим скалярно уравнение (1.1) на функцию w и еще раз используем (2.2), (2.1), а также (2.5). Имеем

$$\Phi_1(h) = \iint_D (A(h)w)\, w \, dx\, dy = (A(h)\, w, w) = \sum_{i,j=1}^{\infty} (A(h)\, a_ju_j, \; a_iu_i) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{\infty} \lambda_j(h)\, a_ia_j\, (hu_i, u_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(h)\, a_j^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j(h))^{-1} b_j^2 \tag{2.6}$$

Так как $0 < \lambda_1(h) \leq \lambda_2(h) \leq \ldots$, то правую часть последнего выражения можно оценить следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j(h))^{-1} b_j^2 \le (\lambda_1(h))^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} b_j^2 = (\lambda_1(h))^{-1} \|ph\|_0^2$$

Отсюда с помощью неравенства (2.3) имеем $\Phi_1(h) \le h_1^{-1}\|q\|_0^2 \Phi_2(h)$. В итоге приходим к следующему результату.

Утверждение 1. Функционал $\Phi_2(h)$ не слабее $\Phi_1(h)$ ($\Phi_1 \le \Phi_2$).

Доказательство непосредственно следует из последней оценки, причем в качестве постоянной $c > 0$, фигурирующей в определении 1, нужно взять величину $h_1^{-1}\|q\|_0^2$.

Следствие 1. Пусть при всех $h \in Q$ выполняется неравенство

$$b_1^2 = (q, u_1)^2 \ge \delta^2 > 0 \tag{2.7}$$

где $q(x, y)$ — правая часть краевой задачи (1.1), а $u_1(x, y)$ — первая собственная функция в соответствующей краевой задаче о собственных колебаниях (1.3). Тогда функционалы $\Phi_1(h)$ и $\Phi_2(h)$ являются эквивалентными ($\Phi_1 \sim \Phi_2$).

Доказательство. Рассмотрим правую часть (2.6). С помощью (2.7) имеем оценку

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j(h))^{-1} b_j^2 \ge b_1^2 (\lambda_1(h))^{-1} \ge \delta^2 (\lambda_1(h))^{-1}, \quad h \in Q$$

Следовательно, $\Phi_1(h) \ge \Phi_2(h)$. Что и требовалось доказать.

Заметим, что все результаты, полученные здесь, сохраняются и в том случае, когда правая часть в (1.1) — произвольный элемент из H_0, ограниченный фиксированной постоянной по норме этого пространства.

3. Рассмотрим задачу (1.1) с функционалом (1.7). Пусть $w \in H^0$ — решение краевой задачи (1.1) при некотором $h \in Q$ и $q(x, y) \in H_0$.

Справедлив результат о вложении пространства $H_2^0(D)$ в пространство непрерывных функций $C(D)$. В частности, имеет место неравенство [4]:

$$\max_D |w(x, y)|^2 = \Phi_3(h) \le \gamma \|w\|_2^2 \tag{3.1}$$

Постоянная $\gamma > 0$ не зависит от функции $w(x, y)$ и $h \in Q$ и определяется равенством

$$\gamma = (2\pi)^{-1/2} \sup_D \left\{ \iint_D (\ln r)^2 d\xi\, d\eta \right\}, \quad r = ((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)^{1/2} \tag{3.2}$$

Из определения нормы элемента w в H_2^0 имеем

$$\|w\|_2^2 = \iint_D [(w_{xx}^2 + 2w_{xy}^2 + w_{yy}^2) + (w_x^2 + w_y^2) + w^2]\, dx\, dy \tag{3.3}$$

Как показано в [1] (с. 254), для функций w, удовлетворяющих краевым условиям (1.1), справедливо равенство

$$\iint_D (w_{xx}^2 + 2w_{xy}^2 + w_{yy}^2)\, dx\, dy = (A(h_0) w, w), \quad h_0 = 1$$

Поэтому, используя неравенство $h/h_1 \ge 1$, $h \in Q$, первое выражение в скобках в (3.3) можно оценить сверху через величину

$$h_1^{-3}(A(h) w, w) = h_1^{-3}\Phi_1(h) \tag{3.4}$$

С помощью неравенства Фридрихса (см., например, [1] стр. 174) получим оценки для второго и третьего выражения в (3.3):

$$\iint_D (w_x^2 + w_y^2)\,dx\,dy \le a \iint_D (w_{xx}^2 + 2w_{xy}^2 + w_{yy}^2)\,dx\,dy$$

$$\iint_D w^2\,dx\,dy \le a \iint_D (w_x^2 + w_y^2)\,dx\,dy \tag{3.5}$$

где a — длина стороны прямоугольника, в который можно заключить область D.

Отсюда, используя (3.4), (3.5) и (3.1), получим оценку сверху для $\|w\|_2^2$:

$$\|w\|_2^2 \le h_1^{-3}\,(1 + a + a^2)\,\Phi_1(h) \tag{3.6}$$

Утверждение 2. Функционал $\Phi_1(h)$ сильнее, чем функционал $\Phi_3(h)$ $(\Phi_3 < \Phi_1)$.

Доказательство. Тот факт, что функционал Φ_1 не слабее, чем Φ_3, непосредственно вытекает из неравенства (3.6) и оценки вложения (3.1). Причем постоянная c, фигурирующая в определении 1, равна $\gamma h_1^{-3}\,(1 + a + a^2)$. Докажем, что Φ_1 сильнее, чем Φ_3. Для этого достаточно показать, что в задаче (1.1) найдется такое $h \in Q$ и такая функция $q\ (x, y)$ из пространства H_0, что для некоторой области D неравенство

$$\Phi_1(h) \le c_1\Phi_3(h) \tag{3.7}$$

не выполнится ни при какой фиксированной постоянной c_1. Рассмотрим квадрат со сторонами l и s так, чтобы $ls = 1$. В качестве $q\ (x, y)$ выберем функцию $\sin \pi x/l \sin \pi y/s$. Тогда при $h = 1$ (не умаляя общности, считаем, что $h_1 < 1 < h_2$) получим, что решение (1.1) имеет вид

$$w\,(x, y) = \pi^{-4}\left(\frac{1}{l^2} + \frac{1}{s^2}\right)^{-2} \sin\frac{\pi x}{l} \sin\frac{\pi y}{s}$$

С другой стороны, в этом случае

$$\Phi_1 = \pi^{-8}\left(\frac{1}{l^2} + \frac{1}{s^2}\right)^{-4} \frac{ls}{4}\left(\frac{1}{l^2} + \frac{1}{s^2}\right)^2 \pi^4$$

Но тогда из справедливости (3.7) следует, что для любых l и s таких, что $ls = 1$, имеет место неравенство

$$c_1 \ge \frac{\pi^4}{4}\left(\frac{1}{l^2} + \frac{1}{s^2}\right)^2$$

Устремляя l к нулю, получим противоречие утверждению о том, что c_1 является фиксированной постоянной. Что и требовалось доказать.

Следствие 2. Функционал $\Phi_2(h)$ сильнее, чем функционал $\Phi_3(h)$ $(\Phi_3 < \Phi_2)$.

4. Предположим, что правая часть (1.1) представляет функцию из пространства Соболева $H_2\ (D)$, т. е. $q \in H_2$. Известно [3], что в этом случае решение краевой задачи (1.1) будет элементом из пространства $H_4\,(D)$.

Введем обозначение

$$[w]^2 = w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2w_{xy}^2 \tag{4.1}$$

Рассмотрим задачу (1.1) с функционалом (1.8). С помощью неравенства $c^2 + d^2 \ge -2cd$ (c, d — действительные числа) можно получить оценку

$$\Phi_4(h) = \frac{3}{2}(1 - \mu)^2 \max_D \{h^2[w]^2\} \le \frac{3}{2} h_2^2 \max_D\,[w]^2 \tag{4.2}$$

Поскольку $w\ (x, y) \in H_4$, то функция $[w] \in H_2$ и, следовательно, справедлива оценка вложения (3.1), т. е. имеет место

$$\max_D [w]^2 \le \gamma \, \|[w]\|_2^2 \tag{4.3}$$

с постоянной γ, определенной в (3.2). Из (4.2) и (4.3) получим, что

$$\Phi_4(h) \le 3/2 h_2^2 \gamma \, \|[w]\|_2^2 \tag{4.4}$$

С другой стороны, при $0 \le \mu \le 0.5$ справедлива оценка $\Phi_4(h) \ge 1/4 \max_D \times \{h^2 [w]^2\}$. Последнее выражение оценивается снизу следующим образом (S — площадь области D):

$$\max_D \{h^2 [w]^2\} S \ge \iint_D h^2 [w]^2 \, dx\, dy \ge h_2^{-1} (A(h) w, w) = h_2^{-1} \Phi_1(h), \quad h \in Q. \tag{4.5}$$

Утверждение 3. Функционал $\Phi_4(h)$ не слабее, чем функционалы $\Phi_1(h)$, $\Phi_2(h)$, и сильнее, чем функционал $\Phi_3(h)$ ($\Phi_1 \le \Phi_4$, $\Phi_2 \le \Phi_4$, $\Phi_3 < \Phi_4$).

Функционал $\|w\|_4^2$ не слабее функционала $\Phi_4(h)$ ($\Phi_4 \le \|w\|_4^2$) ($\|w\|_4$— норма решения задачи (1.1) в пространстве Соболева $H_4(D)$).

Доказательство. Первая часть утверждения 3 непосредственно вытекает из оценки (4.5) и утверждений 1, 2. Доказательство того, что $\Phi_4(h)$ сильнее, чем $\Phi_3(h)$, проводится так же, как и в случае соответствующего утверждения 2. Вторая часть утверждения основывается на существовании такой постоянной $K > 0$, что выполняется оценка вложения $H_4(D)$ в $H_2(D)$ [4], т. е. $\|[w]\|_2^2 \le K \|w\|_4^2$.

Отсюда с помощью (4.4) следует требуемое утверждение.

Отметим, что все полученные в статье результаты могут быть записаны в виде одной строки:

$$\Phi_3 < \Phi_2 \sim \Phi_1 \le \Phi_4 \le \|w\|_4^2$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
2. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 254 с.
3. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.IV.1990