

© 1992 г. С. М. АЙЗИКОВИЧ, И. С. ТРУБЧИК, Е. В. ШКЛЯРОВА

## РАСЧЕТ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА НЕОДНОРОДНОМ ПО ГЛУБИНЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Проблема расчета круглых пластин на упругом полупространстве посвящено большое число работ. С обзором публикаций по этой проблеме можно познакомиться по [1, 2] и ряду других работ.

Задача об изгибе плиты на упругом изотропном и однородном полупространстве рассматривалась в [3—5]. Решение строилось путем представления контактных напряжений в виде степенного ряда с последующим определением коэффициентов разложения из бесконечной алгебраической системы уравнений.

Методом ортогональных многочленов такая задача решалась в [6, 7] (с использованием полиномов Лежандра), [8] (с использованием полиномов Чебышева). Такой подход в свою очередь ставил проблему исследования сходимости полученного решения линейной бесконечной системы алгебраических уравнений к точному решению.

В [9] для решения данной задачи применялись асимптотические методы типа «больших  $\lambda$ », «малых  $\lambda$ » и специальных ортогональных многочленов, что позволило получить основные характеристики решения в нескольких формах, каждая из которых эффективна в своей области изменения характерных параметров задачи.

В ряде работ задача об изгибе круглой плиты была рассмотрена для специальных видов непрерывной неоднородности полупространства по глубине ([10] — степенная, [11] — экспоненциальная).

Изгибу плит на многослойном основании посвящена работа [12]. Задача приведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно функции распределения контактных давлений, решение которого находится методом ортогональных полиномов (полиномов Чебышева). Впоследствии этот метод использовался в [13; 14].

Иной подход к решению задачи был предложен в [15, 16]. С помощью интегрального преобразования Ханкеля контактная задача сводится к парному интегральному уравнению, которое решается методом однократной и двойной ортогонализации. При этом используются предварительные разложения контактных давлений и прогибов плиты в ряды. Членами ряда являются собственные функции дифференциального уравнения изгиба плиты при краевых условиях, совпадающих с условиями закрепления плиты. Эти представления позволяют свести задачу к нахождению решения линейной бесконечной системы алгебраических уравнений.

Отметим, что большинство известных решений, в том числе и в выше перечисленных работах, эффективны только для жестких плит. И очень немногие, в частности [9], эффективны только для гибких.

В настоящей работе рассматривается задача о контактном взаимодействии круглой пластины с упругим неоднородным по глубине полупространством при отсутствии сил трения между ними. Предполагается, что изменение коэффициентов Ламе по глубине носит общий характер (произвольное непрерывно-неоднородное или «стратифицированное» полупространство). В случае плотного прилегания пластины к основанию, т. е. если контакт между полупространством и пластиной осуществляется по всей ее нижней поверхности, для построения решения контактной задачи применяется двухсторонний асимптотический метод [17]. При отрыве пластины от основания (о чем свидетельствует появление при расчете отрицательных контактных давлений) необходимо изменить постановку задачи. Зона контакта пластины с основанием в этом случае определяется из условия обращения в нуль контактных напряжений на ее границе.

Примеры расчетов круглой пластины с учетом ее отрыва для однородного основания приводятся в [7, 18]. Здесь случай отрыва пластины от основания не рассматривается, так как он нуждается в отдельном исследовании.

Задача сводится к решению парного интегрального уравнения, ядро которого находится численно. Затем ядро аппроксимируется выражением специального вида, для которого решение интегрального уравнения строится в замкнутом виде. Предлагаемый метод одновременно эффективен как для жестких, так и для гибких пластин в широкой области значений характерного параметра задачи  $\lambda$  ( $\lambda$  — равно отношению толщины неоднородного слоя к радиусу пластины).

Использование представления прогибов пластины в виде ряда по формам ее собственных колебаний, аналогично [15], позволяет свести указанные задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Проводится анализ влияния различных законов неоднородности и скорости изменения с глубиной коэффициентов Ляме в полупространстве на распределение контактных давлений под пластиной и ее прогибы.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим пластину радиуса  $R$ , лежащую на изотропном полупространстве, коэффициенты Ляме которого с глубиной изменяются по закону  $\Lambda = \Lambda_0(z)$ ,  $M = M_0(z)$ ,  $-H \leq z \leq 0$ ;  $\Lambda = \Lambda_0(-H)$ ,  $M = M_0(-H)$ ,  $-\infty < z < -H$ , где  $\Lambda_0(z)$ ,  $M_0(z)$  — произвольные непрерывные функции глубины (переменная  $z$ ).

С полупространством связана цилиндрическая система координат  $(r', \varphi, z)$ , начало координат которой совпадает с центром пластины. Пластина вдавливается в полупространство распределенной нагрузкой  $p(r')$  или сосредоточенной силой  $P$ . Предполагаем, что контакт между полупространством и пластиной осуществляется по всей нижней поверхности пластины, а вне области контакта полупространство не нагружено.

Требуется определить распределение контактных напряжений под пластиной  $q(r')$  и ее прогибы  $w(r')$ .

В соответствии с принятыми предположениями, рассматриваемая задача сводится к решению следующей системы уравнений

$$Dw(r) = p(r) - q(r), \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (1.1)$$

$$\int_0^{\infty} Q(\alpha) L(\lambda\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = s\lambda w(r), \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (1.2)$$

$$\int_0^{\infty} Q(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = 0, \quad r > 1$$

где  $D$  — дифференциальный оператор изгиба пластины в цилиндрической системе координат,  $p(r)$  — нагрузка,  $q(r)$  — контактные напряжения под пластиной. Парное интегральное уравнение (1.2) устанавливает связь между контактными напряжениями и прогибами пластины, лежащей на неоднородном полупространстве [17]. Здесь

$$Q(\alpha) = \int_0^1 q(\rho) J_0(\alpha\rho) \rho d\rho, \quad q(r) = \int_0^{\infty} Q(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha$$

$\lambda = H/R$  — характерный геометрический параметр,  $s = \Theta R^3/D$  — параметр, характеризующий изгибную жесткость пластины;  $D$  — изгибная жесткость пластины;  $\Theta = 2M(z)(\Lambda(z) + M(z))(2M(z) + \Lambda(z))^{-1}$ ,  $r = r'/R$ .

Функция  $w(r)$  должна удовлетворять на контуре пластины условиям свободного края

$$\left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \Big|_{r=1} = 0, \quad \frac{d}{dr} \nabla w \Big|_{r=1} = 0 \quad (1.3)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона пластины,  $\nabla$  — оператор Лапласа в полярных координатах, и быть ограниченной в начале координат вместе с дифференциальным выражением, соответствующим изгибающему моменту.

Построение трансформанты ядра  $L(u)$  (функции податливости основания [19]) для многослойного основания подробно рассмотрено в [19, 20].

В общем случае произвольной непрерывной неоднородности  $L(u)$  строится численно методом, изложенным в [21] и обладает следующими свойствами [20, 21]:

$$L(u) = A + B |u| + \nu(u^2), \quad u \rightarrow 0; \quad A = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\Theta(0)}{\Theta(z)}$$

$$L(u) = 1 + C |u|^{-1} + \nu(u^{-2}), \quad u \rightarrow \infty; \quad B, C = \text{const}$$

2. Построение решения. Представим функцию прогибов в виде ряда по формам собственных колебаний круглой пластины со свободным краем

$$w(r) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m \varphi_m(r), \quad 0 \leq r \leq 1; \quad w_m = \int_0^1 w(\rho) \varphi_m(\rho) \rho d\rho \quad (2.1)$$

$$\varphi_0 = 2^{1/2}, \quad \varphi_m(r) = A_m [J_0(k_m r) - J_1(k_m) I_1^{-1}(k_m) I_0(k_m r)]$$

значения  $A_m$  и  $k_m$  для  $m=0, 1, \dots, 10$ , приведены в [15].

Функцию  $L(u)$  в (1.2) можно аппроксимировать функцией  $L_N(\lambda\alpha)$  вида [21]:

$$L_N(\lambda\alpha) = \prod_{i=1}^N \frac{\alpha^2 + a_i^2 \lambda^{-2}}{\alpha^2 + b_i^2 \lambda^{-2}}, \quad (b_i - b_k)(a_i - a_k) \neq 0, \quad k \neq i \quad (2.2)$$

здесь  $a_i, b_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) — некоторые постоянные.

Учитывая линейность задачи, контактные напряжения представляются в виде линейной комбинации частных решений  $q_m(r)$  с теми же коэффициентами  $w_m$ , что и для функции прогиба  $w(r)$  в (2.1):

$$q(r) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m q_m(r), \quad 0 \leq r \leq 1$$

Частное решение  $q_m(r)$  ( $m=0, 1, \dots$ ) определим из интегрального уравнения аналогично [17]. Для этого в правую часть (1.2) вместо  $w(r)$  подставим  $m$ -ю собственную функцию  $\varphi_m(r)$ . Имеем:

$$q_0(r) = 2\pi^{-1} 2^{1/2} \lambda s \left\{ L_N^{-1}(0) (1-r^2)^{-1/2} + \sum_{i=1}^N C_i^0 \Psi(r, a_i \lambda^{-1}) \right\}$$

$$q_m(r) = 2\pi^{-1} A_m \lambda s \left\{ L_N^{-1}(\lambda k_m) f(r, k_m) - J_1(k_m) I_1^{-1}(k_m) L_N^{-1}(i \lambda k_m) \Psi(r, k_m) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^N C_i^m \Psi(r, a_i \lambda^{-1}) \right\}, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\Psi(r, a) = (1 - r^2)^{-1/2} \operatorname{ch} a - a \int_0^1 (t^2 - r^2)^{-1/2} \operatorname{sh} at dt$$

$$f(r, \varepsilon) = (1 - r^2)^{-1/2} \cos \varepsilon + \varepsilon \int_0^1 (t^2 - r^2)^{-1/2} \sin \varepsilon t dt$$

Постоянные  $C_i^m$  определяются из систем линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^N C_i^0 \alpha(b_i \lambda^{-1}, a_i \lambda^{-1}) + L_N^{-1}(0) \lambda b_k^{-1} = 0, \quad k = 1, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^N C_i^m \alpha(b_i \lambda^{-1}, a_i \lambda^{-1}) + \beta(b_k \lambda^{-1}, k_m) - J_1(k_m) I_1^{-1}(k_m) \gamma(b_k \lambda^{-1}, k_m) = 0,$$

$$k = 1, \dots, N; \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\alpha(B, A) = (B \operatorname{ch} A + A \operatorname{sh} A) (B^2 - A^2)^{-1},$$

$$\beta(B, \mu) = (B \cos \mu - \mu \sin \mu) L_N^{-1}(\lambda \mu) (B^2 + \mu^2)^{-1}$$

$$\gamma(B, k) = (B \operatorname{ch} k + k \operatorname{sh} k) L_N^{-1}(i \lambda k) (B^2 - k^2)^{-1}$$

Пусть функции нагрузки  $p(r)$  и контактных напряжений  $q(r)$  можно представить в виде ряда (2.1):

$$q(r) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m \varphi_m(r), \quad y_m = \int_0^1 q(\rho) \varphi_m(\rho) \rho d\rho \quad (2.3)$$

$$p(r) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m \varphi_m(r), \quad p_m = \int_0^1 p(\rho) \varphi_m(\rho) \rho d\rho \quad (2.4)$$

Выпишем условия, накладываемые на функцию  $f(r)$ , при которых ее можно представить в виде ряда (2.1). Ниже используем определения.

**Определение 2.1.** Обозначим  $C^k(0,1)$  — пространство функций, имеющих  $k$  непрерывных производных на интервале  $[0, 1]$ .

**Определение 2.2.** Обозначим  $L^2(0, 1)$  — пространство функций  $f$ , определенных на интервале  $0 \leq r \leq 1$ , измеримых по Лебегу на этом интервале и таких, что

$$\int_0^1 |f(r)|^2 dr < \infty$$

причем интеграл берется в смысле Лебега.

Согласно [22], имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.1.** Пусть функция  $f \in C^4(0, 1)$  удовлетворяет краевым условиям (1.3). Тогда на  $[0, 1]$  имеет место представление (2.1), причем ряд сходится на  $[0, 1]$  равномерно. Имеет место более общая теорема разложения и полноты в  $L^2(0, 1)$  [22].

**Теорема 2.2.** Если  $f \in L^2(0, 1)$ , то имеет место равенство (2.1), причем оно понимается в том смысле, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{m=0}^k f_m \varphi_m(r) \right\|_{L^2(0,1)} = 0, \quad f_m = \int_0^1 f(\rho) \varphi_m(\rho) \rho d\rho$$

Кроме того, имеет место равенство Парсеваля

$$\|f\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} f_m^2$$

Считаем, что функция  $p(r)$  удовлетворяет условиям теоремы 2.1 или 2.2.

Тогда, подставив разложения (2.1), (2.3), (2.4) в (1.1), имеем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $w_m$ :

$$k_m^A w_m = p_m - \sum_{j=0}^{\infty} w_j E_j^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

$$E_j^m = 2\pi^{-1} A_j \lambda_s \left\{ L_N^{-1}(\lambda k_j) F_j^m - J_1(k_m) I_1^{-1}(k_m) L_N^{-1}(i\lambda k_j) R_j^m + \sum_{n=1}^N C_n^m S_n^m \right\}$$

$$F_j^m = \int_0^1 f(\rho, k_j) \varphi_m(\rho) \rho d\rho = A_m [x(k_j, k_m) - J_1(k_m) I_1^{-1}(k_m) X(k_m, k_j)]$$

$$R_j^m = \int_0^1 \Psi(\rho, k_j) \varphi_m(\rho) \rho d\rho = A_m [X(k_j, k_m) - J_1(k_m) I_1^{-1}(k_m) x(ik_j, ik_m)]$$

$$S_n^m = \int_0^1 \Psi(\rho, a_n \lambda^{-1}) \varphi_m(\rho) \rho d\rho =$$

$$= A_m \left[ X(a_n \lambda^{-1}, k_m) - J_1(k_m) I_1^{-1}(k_m) x\left(\frac{ia_n}{\lambda}, ik_m\right) \right]$$

Здесь  $j = 1, 2, \dots$ ;  $m = 0, 1, 2, \dots$

$$x(a, b) = b^{-1} (\cos a \sin b + a 2^{-1} (\sin(a-b)(a-b)^{-1} - \sin(a+b)(a+b)^{-1}))$$

$$X(a, b) = (a^2 + b^2)^{-1} (a \operatorname{sh} a \cos b + b \sin b \operatorname{ch} a)$$

В частности

$$E_0^m = 2\pi^{-1} 2^{1/2} \lambda_s \left\{ L_N^{-1}(0) A_m k_m^{-1} (\sin k_m - J_1(k_m) I_1^{-1}(k_m) \operatorname{sh}(k_m)) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N C_n^m S_n^m \right\}$$

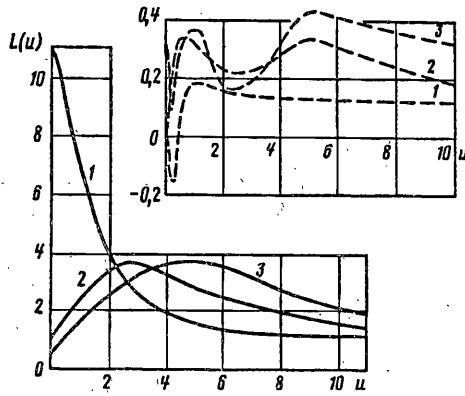
$$E_0^0 = 2^{1/2} \pi^{-1} \lambda_s \left\{ 2 + \sum_{n=1}^N C_n^0 S_n^0 \right\}, \quad S_n^0 = 2^{1/2} (\operatorname{sh}(a_n \lambda^{-1}) a_n^{-1} \lambda - \operatorname{ch}(a_n \lambda^{-1}))$$

Ограничимся в разложении (2.1)  $M$  слагаемыми. Тогда уравнение (2.5) примет вид

$$k_m^A w_m = p_m - \sum_{j=0}^M w_j E_j^m, \quad m = 0, 1, \dots, M \quad (2.6)$$

После определения коэффициентов  $w_m$  ( $m = 0, 1, \dots, M$ ) из (2.6) находим контактные напряжения

$$q(r) = \sum_{m=0}^M w_m q_m(r), \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (2.7)$$



Фиг. 1

и прогибы пластины

$$w(r) = \sum_{m=0}^M w_m \varphi_m(r), \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (2.8)$$

3. Пример. Рассмотрим изгиб круглой пластины под действием равномерно распределенной нагрузки единичной интенсивности. Пластина вдавливается в полупространство, модуль Юнга которого с глубиной изменяется по закону

$$E(z) = E_0 f(z), \quad -1 \leq z \leq 0 \quad (3.1)$$

$$E(z) = E_0 f(-1), \quad -\infty < z < -1$$

$$f(z) = 1,1 + \sin(0,5k\pi z), \quad k=1, 2, 3$$

коэффициент Пуассона  $\nu = 1/3$ ,  $-\infty < z \leq 0$ .

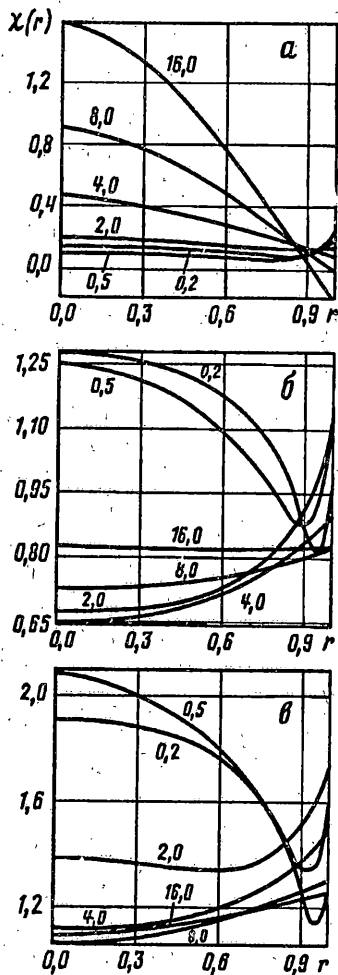
Для равномерно распределенной нагрузки выполнены условия теоремы 2.1 ( $p(r) = p = 1$ ), коэффициенты разложения (2.4) имеют вид:  $p_0 = p \cdot 2^{-1/2}$ ,  $\rho_m = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$

На фиг. 1 приведены графики трансформант ядер  $L(u)$  при  $k=1$  (кривая 1),  $k=2$  (кривая 2),  $k=3$  (кривая 3). Штриховые кривые соответствуют разности между точным и аппроксимирующим значением трансформанты вида (2.2).

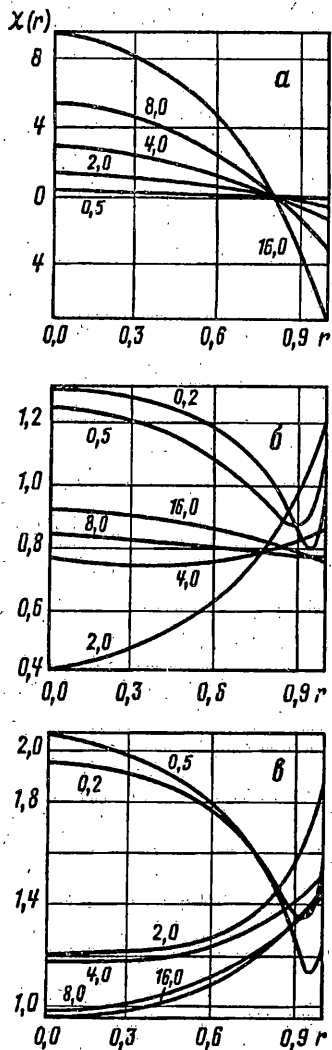
На фиг. 2 (а—в), 3 (а—в) приведены графики величины  $\chi(r) = q_H(r)/q_0(r)$ , характеризующей распределение контактных нормальных напряжений под пластиной на неоднородном основании по сравнению с однородным  $q_0(r)$  (для  $E = E_0 f(-1)$ ) при различных значениях  $\lambda$  (здесь график а соответствует  $k=1$ , б —  $k=2$ , в —  $k=3$ ). На фиг. 2  $s=0,1$ , на фиг. 3  $s=1,0$ . Цифра у кривой соответствует значению  $\lambda$ , для которого производился расчет. Значения  $q_H(r)$ ,  $q_0(r)$  найдены по формуле (2.7) при  $N=10$ ,  $M=10$ .

Для монотонно убывающего закона (3.1) ( $k=1$ ; фиг 2, а, 3, а) в окрестности края пластины наблюдается убывание коэффициента при особенности контактных напряжений по сравнению с его значением для однородного полупространства, вплоть до отрыва пластины от основания ( $\chi(r) < 0$ ,  $s=0, 1$ ,  $\lambda=16$ , фиг. 2, а). Характерной иллюстрацией отрыва пластины от основания является фиг. 3, а. Здесь пластина более жесткая, чем на фиг. 2, а, параметр, характеризующей ее жесткость,  $s=1$ . Отрыв наблюдается для значений  $\lambda = 2, 4, 8, 16$ .

Как отмечалось выше, в этом случае нужно изменить постановку



Фиг. 2

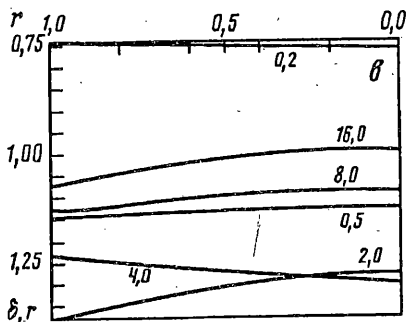
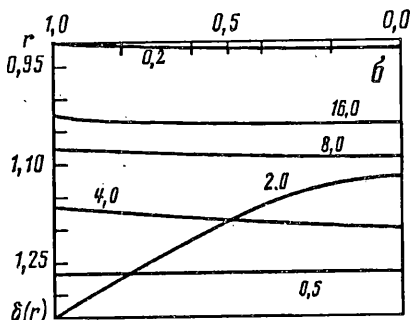
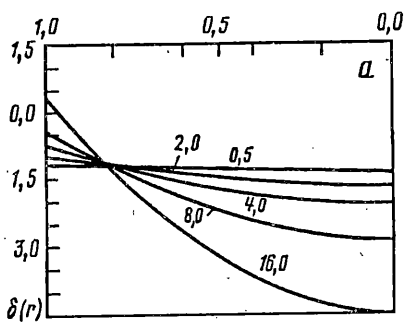
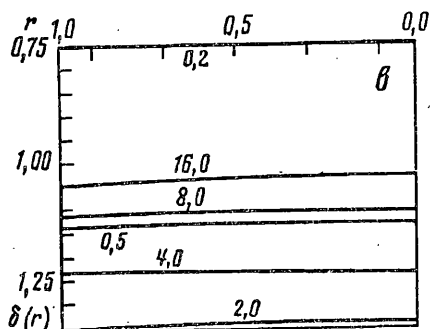
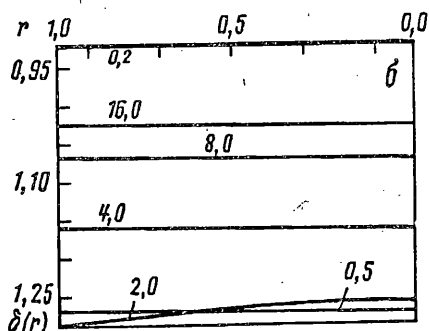
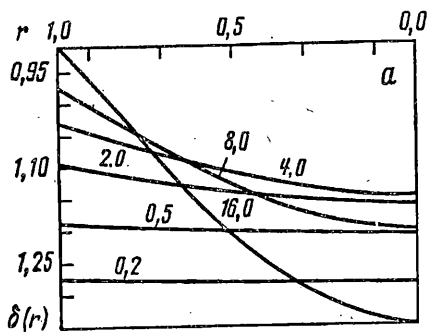


Фиг. 3

задачи. Зона контакта пластины с основанием может быть определена из условия обращения в нуль контактных напряжений на границе зоны [7, 18].

Для немонотонных законов неоднородности ( $k=2, 3$ ; фиг. 2, б, в; 3, б, в) наблюдается увеличение величины  $\chi(r)$ , характеризующей коэффициент при особенности контактных напряжений при приближении изнутри к краю пластины. В этом случае отрыв пластины от основания отсутствует. Форма кривых  $\chi(r)$  различна для малых и больших  $\lambda$ , а также для малых и больших  $s$  при  $\lambda > 1$ . Из фигур видно, что распределение контактных давлений существенно зависит как от толщины неоднородного слоя и вида неоднородности, так и от гибкости пластины.

На фиг. 4 (а-в); 5 (а-в) приведены графики величины  $\delta(r) = w_H(r)/w_0(r)$ , характеризующей прогиба пластины  $w_H(r)$  на основании вида (3.1) по сравнению с однородным  $w_0(r)$  при различных значениях  $\lambda$  и  $s$  (здесь также фиг. 4, а соответствует  $k=1$ , б —  $k=2$ , в —  $k=3$ ). На фиг. 4  $s=0,1$ , на фиг. 5  $s=1$ .



Фиг. 4

Фиг. 5

Цифра у каждой кривой соответствует значению  $\lambda$ , для которого производился расчет. Значения  $w(r)$  найдены по формуле (2.8). Можно заметить, что вид кривых  $\delta(r)$  отражает характер соответствующих кривых  $\chi(r)$  на фиг. 2, 3.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов Г. Я. Пластинки на линейно-деформируемом основании // Прикл. механика. 1972. Т. 8. № 3. С. 3—17.
2. Ишкова А. Г., Коренев Б. Г. Изгиб пластинок на упругом и упруго-пластическом основании // Тр. 2-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Москва, 1964. М.: Наука, 1966. Т. 3. С. 157—176.
3. Горбунов-Посадов М. И. Расчет балок и плит на упругом полупространстве // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 3. С. 61—80.
4. Ишкова А. Г. Об изгибе полосы и круглой пластинки, лежащих на упругом полупространстве // Инж. сб. 1960. Т. 28. С. 171—181.
5. Леонов М. Я. К расчету фундаментных плит // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 3. С. 81—98.



6. *Клубин П. И.* Расчет балочных и круглых плит на упругом основании//Инж. сб. 1952. Т. 12. С. 95—135.
7. *Триус Е. Б.* Изгиб круглой пластины на упругом основании при неполном контакте с основанием//Научн. докл. высш. шк. Строительство. 1958. № 4. С. 27—36.
8. *Гребенищikov В. Н.* Расчет круглой пластинки на упругом полупространстве//Теория расчета и надежность приборов: Тр. 2-ой Саратов. обл. конф. молодых ученых. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1969. С. 48—51.
9. *Ворович И. И., Солодовник М. Д.* Задача об изгибе круглой пластинки, лежащей на упругом полупространстве//Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. наук. 1974. № 4. С. 26—30.
10. *Ширинкулов Т. В.* Расчет круглых плит, лежащих на упругом полупространстве, модуль упругости которого есть степенная функция глубины//Вопросы механики. Ташкент: Фан, 1970. Вып. 6. С. 102—122.
11. *Попов Г. Я.* К теории изгиба плит на упругом неоднородном полупространстве//Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1959. № 11—12. С. 11—19.
12. *Наумов Ю. А., Шеяляков Ю. А.* К изгибу круглых плит на многослойном основании//Инж. ж. МТТ. 1967. № 1. С. 154—162.
13. *Попов Г. Я., Хомяк Ю. М.* Расчет круглой пластинки, лежащей на линейно-деформируемом основании//Строит. механика и расчет сооружений. 1972. № 5. С. 15—19.
14. *Попов Г. Я., Хомяк Ю. М.* Изгиб круглой пластинки, лежащей на линейно-деформируемом основании//Тр. 8-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Ростов-на-Дону. 1971. М.: Наука, 1973. С. 752—756.
15. *Цейтлин А. И.* Об изгибе круглой пластины, лежащей на линейно-деформируемом основании//Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 1. С. 99—112.
16. *Неустров Э. А., Цейтлин А. И.* К расчету круглых плит на упругом основании//Основания, фундаменты и механика грунтов. 1971. № 5. С. 7—9.
17. *Айзикович С. М.* Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред//ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 148—158.
18. *Гребенищikov В. Н.* Расчет круглой плиты, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой и распределенными по контуру моментами, с учетом неполного контакта плиты с полупространством//Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1972. № 7. С. 47—51.
19. *Никишин В. С.* Осесимметричные контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: ВЦ АН СССР, 1976. 103 с.
20. *Приварников А. К.* Пространственная деформация многослойного основания//Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1973. С. 27—45.
21. *Айзикович С. М., Александров В. М.* Асимптотические решения контактных задач теории упругости для полупространства и полуплоскости, неоднородных по глубине//Изв. АН АрмССР. Механика. 1986. Т. 39. № 3. С. 13—28.
22. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию  
6.IV.1990