МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1992

УДК 531.73

 С. В. СОКОЛОВ

ОБ ОДНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

На основе представления решения кинематических уравнений при постоянном направлении вектора угловой скорости в элементарных функциях, полученного в результате анализа разложения в ряд матрицанта системы с учетом кососимметричности матрицы угловой скорости, показана возможность аналитического описания кинематических параметров поворота твердого тела при аппроксимации вектора мгновенной скорости вращения некоторым тригонометрическим рядом.

1. Постановка задачи. Решение большинства прикладных задач по управлению ориентацией твердого тела, инерциальной навигации, начальной выставке гироскопических систем и так далее приводит к необходимости интегрирования кинематических соотношений Эйлера [1]:

$$\omega_X = \psi^{\bullet} \cos\varphi \sin\kappa + \varphi^{\bullet} \cdot \cos\kappa \tag{1}$$

$$\omega_Y = \psi^{\bullet} \cos\varphi \cos\kappa - \varphi^{\bullet} \cdot \sin\kappa, \quad \omega_Z = \kappa^{\bullet} - \psi^{\bullet} \sin\varphi$$

где ω_X, ω_Y, ω_Z — проекции мгновенной скорости вращения твердого тела Ω на оси связанной с ним системы координат, ψ, φ, κ — углы Эйлера — Крылова в инерциальной системе координат.

В дальнейшем используем также эквивалентные (1) матричные формы описания вращения твердого тела с помощью параметров Родрига — Гамильтона [2]:

$$\mathrm{L}^{\bullet} = \tfrac{1}{2}\Omega \mathrm{L}, \quad \mathrm{L} = \left| l_1 l_2 l_3 l_4 \right|^T$$

$$\Omega = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_X & -\omega_Y & -\omega_Z \\ \omega_X & 0 & \omega_Z & -\omega_Y \\ \omega_Y & -\omega_Z & 0 & \omega_X \\ \omega_Z & \omega_Y & -\omega_X & 0 \end{vmatrix} \tag{2}$$

где L — вектор параметров Родрига — Гамильтона, Ω — кососимметричная матрица мгновенной скорости вращения твердого тела, $\mathrm{L}(0) = \mathrm{L}_0$ — исходный вектор ориентации и матрицы направляющих косинусов M:

$$M^{\bullet} = \Omega_1 M$$

$$\Omega_1 = \begin{vmatrix} 0 & \omega_Z & -\omega_Y \\ -\omega_Z & 0 & \omega_X \\ \omega_Y & -\omega_X & 0 \end{vmatrix} \otimes E_3 \tag{3}$$

Здесь E_3 — единичная матрица 3×3, $M(0) = M_0$ — матрица косинусов начальной ориентации.

В настоящее время единый подход к решению систем кинематических уравнений (1), (2), (3) в общем случае изменения вектора скорости вращения

Ω отсутствует. Известны аналитические решения для случаев малых углов Эйлера — Крылова α_i, $i=\overline{1,3}$ [1], конической прецессии [2] и постоянного направления вектора скорости Ω в течение всего времени поворота твердого тела [1, 2]. В последнем случае решение получено в трансцендентной комплексной форме, затрудняющей его использование в прикладных задачах.

Представляет интерес расширить область аналитического представления решений систем (1)—(3), например для случая описания вектора мгновенной скорости Ω во времени с помощью различных аппроксимирующих форм, обеспечивающих требуемую точность задания Ω.

2. Решение. Поставленная задача в настоящей работе решается в два этапа:

решение уравнений (1)—(3) представляется в элементарных тригонометрических функциях для случая постоянного направления вектора $\bar{\Omega}$;

определяется аппроксимирующая форма представления Ω, позволяющая описать текущую ориентацию твердого тела с помощью конечной (или счетной) последовательности конечных поворотов с известным направлением оси вращения.

Рассмотрим предварительно возможность аналитического представления решения системы (2).

В частном случае, когда матрица Ω является перестановочной, т. е. $\Omega(t_1)\,\Omega(t_2)=\Omega(t_2)\,\Omega(t_1)$, решение системы (2) может быть представлено в виде

$$\mathrm{L}(t)=\exp\left(1/2\int_0^t\Omega(s)\,ds\right)\mathrm{L}_0$$

Очевидно, что условие перестановочности матрицы $\Omega(t)$ выполняется при обеспечении следующих равенств: $\omega_i(t_1)\,\omega_j(t_2)-\omega_j(t_1)\,\omega_i(t_2)=f_k(t_1)\,f_k(t_2)$, $i, j=X, Y, Z$; f_k — некоторая функция, ограниченная на интервале интегрирования системы (2), $k=1,\ 2,\ 3$.

Если $f_k=0$, то проекции угловой скорости на оси системы координат, связанной с телом, должны удовлетворять следующим соотношением на всем интервале времени поворота: $\omega_X(t)/\omega_Y(t)=\text{const}=a_1$, $\omega_Y(t)/\omega_Z(t)=\text{const}=a_2$, $\omega_X(t)/\omega_Z(t)=\text{const}=a_3=a_1a_2$.

Выполнение этих соотношений определяет постоянство направления оси мгновенного вращения, так как приводит к неизменности направляющих косинусов l, m, n оси конечного поворота, совпадающей с осью мгновенного вращения

$$l=\omega_X(t)/\Omega_t=(1+a_1^{-2}+a_3^{-2})^{-1/2}$$

$$m=\omega_Y(t)/\Omega_t=(1+a_1^{2}+a_2^{-2})^{-1/2}$$

$$n=\omega_Z(t)/\Omega_t=(1+a_3^{2}+a_2^{2})^{-1/2}$$

$$\Omega_t=(\omega_X^2(t)+\omega_Y^2(t)+\omega_Z^2(t))^{1/2}$$

Определение параметров конечного поворота в данном случае рассматривалось в [1, 2] и, например, для кватернионов получено в форме (аналогичной для параметров Родрига — Гамильтона):

$$\Lambda=\Lambda_0\exp\left(1/2\int_0^t[i\omega_X+j\omega_Y+k\omega_Z]\,dt\right)$$

где i, j, k — гиперкомплексные числа.

Вычисление кватерниона в произвольный момент времени предлагается производить, разлагая экспоненту в ряд и ограничиваясь конечным числом членов этого ряда [1]. Следует отметить, что приведенная форма решения затрудняет вычисление и аналитическое представление других параметров конечного поворота, например углов Эйлера — Крылова. В связи с этим предлагается новый подход к решению системы (2), позволяющий получить аналитическое описание решения непосредственно в элементарных функциях от проекций мгновенной угловой скорости $\omega_X(t), \omega_Y(t), \omega_Z(t)$. Обозначим:

$$S(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \Omega(s)\,ds = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_X^0/2 & -\omega_Y^0/2 & -\omega_Z^0/2 \\ \omega_X^0/2 & 0 & \omega_Z^0/2 & -\omega_Y^0/2 \\ \omega_Y^0/2 & -\omega_Z^0/2 & 0 & \omega_X^0/2 \\ \omega_Z^0/2 & \omega_Y^0/2 & -\omega_X^0/2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\omega_i^0 = \int_0^t \omega_i(s)\,ds, \quad i = X, Y, Z.$$

Матрица $S(t)$ в силу кососимметричности обладает следующим свойством:

$$S^2(t) = -(\Omega_t^0)^2 E_4$$

$$\Omega_t^{02} = (\omega_X^{02} + \omega_Y^{02} + \omega_Z^{02})/4, \quad \Omega_t^0 = (\omega_X^{02} + \omega_Y^{02} + \omega_Z^{02})^{1/2}/2$$

где E_4 — единичная матрица размерности 4×4.

Разложим функцию $\exp(S_t)$ в ряд, полагая $S(t)$ ограниченной на интервале интегрирования системы

$$\exp(S_t) = E_4 + S_t + \frac{S^2(t)}{2} + \ldots + \frac{S^N(t)}{N!} + \ldots, \quad N \to \infty$$

Сгруппируем члены ряда с четными степенями

$$E_4 + \frac{S^2(t)}{2!} + \frac{S^4(t)}{4!} + \ldots \frac{S^{2k}(t)}{2k!} + \ldots = E_4 - \frac{(\Omega_t^0)^2}{2!}E_4 + \frac{(\Omega_t^0)^4}{4!}E_4 \mp \ldots$$

$$\mp \ldots \frac{(\Omega_t^0)^{2k}}{2k!}E_4(-1)^k \ldots = E_4\left(1 - \frac{(\Omega_t^0)^2}{2!} \mp \ldots (-1)^k \frac{(\Omega_t^0)^{2k}}{2k!}\right) = \cos(\Omega_t^0)\,E_4$$

Аналогично просуммируем оставшийся ряд:

$$S(t) + \frac{S^3(t)}{3!} + \frac{S^{(2k+1)}(t)}{(2k+1)!} \ldots = S(t) - \frac{(\Omega_t^0)^2}{3!}S(t) \pm \ldots \frac{(-1)^k(\Omega_t^0)^{2k}}{(2k+1)!}S(t) =$$

$$= S(t)\frac{1}{\Omega_t^0}\left(\Omega_t^0 - \frac{(\Omega_t^0)^3}{3!} + \frac{(\Omega_t^0)^5}{5!} - \ldots \pm \ldots \frac{(-1)^k(\Omega_t^0)^{(2k+1)}}{(2k+1)!}\right) = S(t)\frac{\sin(\Omega_t^0)}{(\Omega_t^0)}$$

Таким образом, матрицант системы (2) можно записать в следующем виде: $\exp(S_t) = \cos\Omega_t^0 E_4 + \sin\Omega_t^0/\Omega_t^0 S(t)$. Следует отметить, что свойства матрицы Ω_t определяют также следующее интересное равенство: $4L_t^{*T}L_t = (L_t^{*T}\Omega_t^T) \times (\Omega_t L_t) = \Omega_t^2 L_t^T L_t = \Omega_t^2$, где T — знак транспонирования, т. е. $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = \Omega_t^2/4$. Решение системы (3), описываемое в рассматриваемом случае матричным равенством

$$M_t = \exp\left(\int_0^t \Omega_1(s)\,ds\right) M_0 = \exp\Omega_1^0(t)\,M_0$$

может быть также получено с использованием предложенного подхода. Разложим матрицант $\exp\Omega_1^0(t)$ в ряд Тейлора и учтем, что $(\Omega_1^0)^3 = -\Omega_1^0(\omega_X^{0^2} + \omega_Y^{0^2} + \omega_Z^{0^2}) = -\Omega_1^0\Omega_t^{0^2}4 = -\Omega_1^0\Omega_t^{(1)^2}$. Тогда данный матричный ряд может быть записан следующим образом:

$$\exp \Omega_1^0 = E_9 + \Omega_1^0 + \frac{\Omega_1^{(0)^2}}{2!} - \frac{\Omega_1^{(0)}\Omega_t^{(1)^2}}{3!} - \frac{\Omega_1^{0^2}\Omega_t^{(1)^2}}{4!} + \frac{\Omega_1^0\Omega_t^{(1)^4}}{5!} +$$

$$+ \frac{\Omega_1^{0^2}\Omega_t^{(1)^4}}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{\Omega_1^0\Omega_t^{(1)^{2k}}}{(2k+1)!} + (-1)^k \frac{\Omega_1^{0^2}\Omega_t^{(1)^{2k}}}{2(k+1)!} \ldots, \quad k \to \infty$$

Здесь E_9 — единичная матрица размерности 9×9. Сгруппируем члены с первой степенью Ω_1^0:

$$\Omega_1^0 - \frac{\Omega_1^0\Omega_t^{(1)^2}}{3!} + \frac{\Omega_1^0\Omega_t^{(1)^4}}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{\Omega_1^0\Omega_t^{(1)^{2k}}}{(2k+1)!} + \ldots = \Omega_1^0 \frac{1}{\Omega_t^{(1)}} \sin \Omega_t^{(1)}$$

Просуммируем оставшиеся члены ряда:

$$E_9 + \frac{\Omega_1^{0^2}}{2!} - \frac{\Omega_1^{0^2}\Omega_t^{(1)^2}}{4!} + \frac{\Omega_1^{0^2}\Omega_t^{(1)^4}}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{\Omega_1^{0^2}\Omega_t^{(1)^{2k}}}{2(k+1)!} + \ldots = E_9 +$$

$$+ \Omega_1^{0^2} \frac{1}{\Omega_t^{(1)^2}} (1 - \cos \Omega_t^{(1)})$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\exp \Omega_1^0 = E_9 + \Omega_1^0 \sin \Omega_t^{(1)}/\Omega_t^{(1)} + [\Omega_1^0]^2 (1 - \cos\Omega_t^{(1)})/[\Omega_t^{(1)}]^2$$

Решения уравнений (2, 3) можно записать в виде

$$\mathbf{L}_t = (\cos \Omega_t^0 E_4 + \sin \Omega_t^0/\Omega_t^0 S_t)\, \mathbf{L}_0 \tag{4}$$

$$M_t = \left[E_9 + \Omega_1^0 \frac{\sin \Omega_t^{(1)}}{\Omega_t^{(1)}} + [\Omega_1^0]^2 \frac{1 - \cos \Omega_t^{(1)}}{[\Omega_t^{(1)}]^2} \right] M_0 \tag{5}$$

$$\Omega_t^0 = \frac{(\omega_X^{0^2} + \omega_Y^{0^2} + \omega_Z^{0^2})^{1/2}}{2}, \quad \omega_i^0 = \int_0^t \omega_i(s)\, ds, \quad i = X, Y, Z$$

где E_n — единичная матрица размерности $n \times n$:

$$S_t = \frac{1}{2} \int_0^t \Omega(s)\, ds, \quad \Omega_1^0(t) = \int_0^t \Omega_1(s)\, ds, \quad \Omega_t^{(1)} = 2\Omega_t^0$$

Соответствующее решение уравнений (1) может быть получено применением известных соотношений взаимосвязи кинематических параметров [1]. Полученные формы решений кинематических уравнений позволяют аналитически определять ориентацию твердого тела и в более общих случаях временного представления проекций мгновенной скорости ω_X, ω_Y, ω_Z. Проанализируем подобную возможность на примере системы (2).

Пусть матрица скоростей Ω допускает разложение

$$\Omega = \Omega' + \Omega'' \tag{6}$$

где компоненты матрицы $\Omega'(\omega_{X_1}, \omega_{Y_1}, \omega_{Z_1})$ удовлетворяют требованиям ее перестановочности, т. е. для системы (2) с матрицей скоростей Ω' матрицант известен и определен выше (4):

$$P(\Omega') = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \Omega'(s)\, ds\right) = \cos f_1(t)\, E_4 + \sin f_1(t)\, \Phi_1$$

$$\Phi_1 = \Omega' (\omega_{X1}^2 + \omega_{Y1}^2 + \omega_{Z1}^2)^{-1/2} \tag{7}$$

Здесь $f_1(t)$ — некоторая произвольная функция, ограниченная на интервале интегрирования системы (2):

$$f_{1t} = \int_0^t f_{1s}^0 ds c_1, \quad c_1 = \Big(\sum_{i=X,Y,Z} a_{i1}^2 \Big)^{-1/2}, \quad \omega_{i1} = a_{i1} f_{1t}^0$$

$$a_{i1} = \text{const}, \quad i = X, Y, Z$$

В общем случае матрицант системы (2) с матрицей скоростей (7) может быть представлен с учетом кососимметричности матриц Ω' и Ω'' в виде [4]:

$$P(\Omega' + \Omega'') = P(\Omega') P(Q_{1t})$$

$$Q_{1t} = P^{-1}(\Omega') \Omega'' P(\Omega') = P(-\Omega') P(-\Omega') \Omega'' =$$
$$= (\cos 2f_{1t} E_4 - \sin 2f_{1t} \Phi_1) \Omega''$$

Так как компоненты матрицы Φ_1 удовлетворяют требованиям перестановочности, то матрица Ω'' определяется следующим образом:

$$\Omega'' = P(\Omega') P(\Omega') Q_{1t} = (\cos 2f_{1t} E_4 + \sin 2f_{1t} \Phi_1) Q_{1t} = \tag{8}$$
$$= f_{2t}^0 \cos 2f_{1t} Q' + f_{2t}^0 \sin 2f_{1t} \Phi_1 Q'$$

где далее полагаем $Q' = \text{const}$, $Q_{1t} = Q' f_{2t}^0$, f_{2t}^0 — ограниченная на интервале интегрирования системы (2) функция.

Так как для матрицы Q_{1t} выполняется требование перестановочности, то матрицант системы (2) в данном случае может быть представлен в виде

$$P(\Omega) = (\cos f_{1t} E_4 + \sin f_{1t} \Phi_1)(\cos f_{2t} E_4 + \sin f_{2t} \Phi_2) =$$
$$= \cos f_{1t} \cos f_{2t} E_4 + \cos f_{1t} \sin f_{2t} \Phi_2 + \sin f_{1t} \cos f_{2t} \Phi_1 + \sin f_{1t} \sin f_{2t} \Phi_1 \Phi_2$$

$$f_{2t} = \int_0^t f_{2s}^0 ds, \quad \Phi_2 = Q' (q_{X1}^2 + q_{Y1}^2 + q_{Z1}^2)^{1/2}$$

элемент $q_{i1} = \text{const}$ матрицы Q' топологически соответствует элементу ω_{i1}, $i = X$, Y, Z, матрицы Ω' в (7).

Из соотношения (8) вытекает как частный случай разложения Ω (6) представление матрицы скоростей Ω в случае конической прецессии, для которого решение системы (2) получено в комплексной форме [2] другим путем. Очевидно, что в рассмотренном случае направление мгновенной угловой скорости уже не остается неизменным во времени. Теперь предположим, что матрица Ω допускает следующее разложение $\Omega = \Omega' + \Omega'' + \Omega'''$. Тогда $P(\Omega) = P(\Omega' + \Omega'') P(Q_{2t})$, $Q_2 t = P^{-1}(\Omega' + \Omega'') \Omega''' P(\Omega' + \Omega'')$.

Пусть матрица Ω'' описывается выражением (8), тогда в силу свойств кососимметрии матрицантов $P(\Omega')$, $P(Q_{1t})$, имеем

$$Q_{2t} = [P(\Omega') P(Q_{1t})]^{-1} P(-\Omega') P(-Q_{1t}) \Omega''' = P(-Q_{1t}) P(-\Omega_{1t}) P(-\Omega') \times$$
$$\times P(-\Omega') \Omega''' = (\cos 2f_{2t} E_4 - \sin 2f_{2t} \Phi_2)(\cos 2f_{1t} E_4 - \sin 2f_{1t} \Phi_1) \Omega'''$$

Потребовав от элементов матрицы Q_{2t} выполнения условия перестановочности, определим характер представления Ω''' в этом случае

$$\Omega''' = (\cos 2f_{1t} E_4 + \sin 2f_{1t} \Phi_1)(\cos 2f_{2t} E_4 + \sin 2f_{2t} \Phi) Q'' f_{3t}^0$$

Тогда

$$\Omega = \Omega' f_{1t}^0 + (\cos 2f_{1t}E_4 + \sin 2f_{1t}\Phi_1)\, Q' f_{2t}^0 +$$
$$+ (\cos 2f_{1t}E_4 + \sin 2f_{1t}\Phi_1)(\cos 2f_{2t}E_4 + \sin 2f_{2t}\Phi_2)\, Q'' f_{3t}^0$$

и матрицант системы (2):

$$P(\Omega) = (\cos 2f_{1t}E_4 + \sin 2f_{1t}\Phi_1)(\cos 2f_{2t}E_4 + \sin 2f_{2t}\Phi_2)(\cos 2f_{3t}E_4 + \sin 2f_{3t}\Phi_3)$$

$$f_{3t} = \int_0^t f_{3t}^0(s)\, ds, \quad \Phi_3 = Q''(q_{X2}^2 + q_{Y2}^2 + q_{Z2}^2)^{-1/2}$$

Продолжая рассуждения аналогичным образом, легко убедиться в том, что если матрица скоростей Ω допускает следующее разложение

$$\Omega = \sum_{i=1}^{N} \Omega_i, \quad \Omega_1 = Q^{(0)} f_{1t}^0 \tag{9}$$

$$\Omega_i = \prod_{j=1}^{i-1} (\cos 2f_{jt}E_4 + \sin 2f_{jt}\Phi_j)\, Q^{(i-1)} f_{it}^0, \quad f_{jt} = \int_0^t f_{jt}^0(s)\, ds$$

где f_{jt}^0 — ограниченная на интервале интегрирования системы (2) функция, $Q_j^{(k)}$ — кососимметрическая постоянная матрица, $k = 0, 1, \ldots$, то матрицант системы (2) может быть представлен в форме конечного произведения

$$P(\Omega) = \prod_{i=1}^{N} (\cos 2f_{it}E_4 + \sin 2f_{it}\Phi_i) \tag{10}$$

Решение системы (2) в виде (10) позволяет выразить явно все остальные текущие параметры разворота в элементарных функциях от проекций мгновенной угловой скорости ω_X, ω_Y, ω_Z, для случая (9) с помощью известных соотношений [1]. Следует отметить, что для матрицы направляющих косинусов M_t, определяемой системой (3), аналитическое представление при описании элементов матрицы Ω_1 с помощью разложения (9) может быть получено и без использования связи с параметрами Родрига — Гамильтона — с помощью рассуждений, аналогичных приведшим к решению (10).

Матрицант системы (3) в этом случае определяется как

$$P(\Omega_1) = \prod_{i=1}^{N} (E_9 + \sin 2d_{it}D_i + (1 - \cos 2d_{it})\, D_i^2)$$

$$d_{it} = \int_0^t d_{is}^0\, ds, \quad d_{it}^0 = 2f_{it}^0, \quad D_i = \Omega_1^{0^{(i)}} (\overline{\omega}_{Xi}^2 + \overline{\omega}_{Yi}^2 + \overline{\omega}_{Zi})^{-1/2}$$

$$\Omega_1^{0^{(i)}}, \quad \overline{\omega}_{ji} = \mathrm{const}, \quad j = X, Y, Z$$

а матрица Ω_1 должна определяться разложением

$$\Omega_1 = \sum_{i=1}^{N} \Omega_{1i}, \quad \Omega_{1i} = \prod_{j=1}^{i-1} (E_9 + \sin 2d_{jt}D_j + (1 - \cos 2d_{jt})\, D_j^2)\, \Omega_1^{0^{(i-1)}} d_{it}^0 \tag{11}$$

3. Заключение. Приведенные результаты можно получить, исходя непосредственно из представления решения кинематических уравнений конечной (счетной) последовательностью поворотов с текущим неизменным направлением оси вращения. Так, например, дифференцирование по времени решения системы (3):

$$M_t = \prod_{i=1}^{N} M_{it} M_0$$

(M_{it} — матрица текущих направляющих косинусов при постоянном направлении оси вращения), позволяет записать его в форме

$$M_t^{\cdot} = \sum_{k=1}^{N} \prod_{j=1}^{k-1} M_{jt} M_k^{\cdot} \prod_{j=k+1}^{N} M_j$$

откуда, с учетом равенства $M_k^{\cdot} = \Omega_1 k M_k$, имеем

$$M_t^{\cdot} = \sum_{k=1}^{N} \prod_{j=1}^{k-1} M_j \Omega_{1k} M_k \prod_{j=k+1}^{N} M_j = \sum_{k=1}^{N} \prod_{j=1}^{k-1} M_j \Omega_{1k} \left(\prod_{j=1}^{k-1} M_j \right)^T M_t = \tag{12}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{N} \prod_{j=1}^{k-1} M_j \prod_{j=k-1}^{1} M_j \Omega_{1k} \right] M_t$$

Используя выражение (5) для описания j-й матрицы направляющих косинусов M_i, матрицу угловой скорости из (12):

$$\Omega_1 = \sum_{k=1}^{N} \prod_{j=1}^{k-1} M_j \prod_{j=k-1}^{1} M_j \Omega_{1k}$$

определяем в виде (11).

В заключение отметим, что применение соотношений, связующих параметры Родрига — Гамильтона (направляющие косинусы и углы Эйлера — Крылова), позволяет легко записать решение системы (1) при аппроксимации вектора угловой скорости рядом (9) аналогично решению для случая постоянного направления оси вращения. Подобный подход позволяет также для случая (9) получить решение уравнения Дарбу — Риккати, решение которого для случая регулярной прецессии (частного случая ряда (9)) получено в [3] другим путем. Это придает рассмотренной аппроксимации матрицы угловой скорости самостоятельный интерес с точки зрения анализа решений нелинейных дифференциальных уравнений Эйлера и Риккати. Далее рассмотрим пример, иллюстрирующий возможность эффективного использования полученных результатов в прикладных задачах.

Пример. В [1, с. 236] рассматривается приближенное решение задачи определения текущей ориентации стабилизированной платформы, совершающей малые угловые движения при гармоническом изменении угловой скорости. При этом дополнительно предполагается, что отношение амплитуд гармонических составляющих к из частоте значительно меньше единицы.

Покажем, что предложенный выше подход позволяет получить точное решение данной задачи не только без допущений о малости углов разворота платформы и отношений амплитуд и частот гармоник проекций угловой скорости, но при более общем характере угловой скорости, содержащей, в отличие от [1], произвольную постоянную составляющую (не позволяющую на произвольном интервале времени использовать упомянутые в [1] допущения). В данном случае при описании матрицы скоростей Ω достаточно воспользоваться первыми двумя членами ряда (9), полагая постоянными компоненты матрицы Ω' (ω_i^0, $i = X, Y, Z$), функции f_{it}^0 ($i = 1, 2$) и компоненты матрицы Q' (q_{it}, $i = X, Y, Z$). При этом компоненты матрицы Φ_1 (φ_i, $i = 1, 2, 3$) будут также постоянны, а функции f_{it} примут вид $f_{2t} = f_{2t}^{\iota} t$, $f_{1t} = {}^1/_2 pt$, где $p = \mathrm{const}$. Проекции угловой скорости в данном случае могут быть записаны следующим образом:

$$\omega_X = \omega_X^0 + \omega_X' \cos pt + \omega_X'' \sin pt$$
$$\omega_Y = \omega_Y^0 + \omega_Y' \cos pt + \omega_Y'' \sin pt$$
$$\omega_Z = \omega_Z^0 + \omega_Z' \cos pt + \omega_Z'' \sin pt$$

где, следуя [1], обозначено

$$\omega_X' = f_{2t}^0 q_{X1}, \quad \omega_X'' = f_{2t}^0 (\varphi_3 q_{Y1} - \varphi_2 q_{Z1})$$
$$\omega_Y' = f_{2t}^0 q_{Y1}, \quad \omega_Y'' = f_{2t}^0 (\varphi_1 q_{Z1} - \varphi_3 q_{X1})$$
$$\omega_Z' = f_{2t}^0 q_{Z1}, \quad \omega_Z'' = f_{2t}^0 (\varphi_2 q_{X1} - \varphi_1 q_{Y1})$$

Решение системы (2) для такой угловой скорости согласно (10) может быть представлено в виде

$$L(t) = [\cos (pt/2) \cos (f_{2t}^0 t) E_4 + \cos (pt/2) \sin (f_{2t}^0 t) \Phi_2 + \sin (pt/2) \times$$
$$\times \cos (f_{2t}^0 t) \Phi_1 + \sin (pt/2) \sin (f_{2t}^0 t) \Phi_1 \Phi_2] L_0$$

$$\Phi_2 = Q' (q_{X1}^2 + q_{Y1}^2 + q_{Z1}^2)^{-1/2}$$

Окончательный переход от параметров Родрига — Гамильтона к параметрам Эйлера — Крылова ψ, φ, χ (1), используемым в [1] для описания текущей ориентации трехосного гиростабилизатора, осуществляется подстановкой значений $l_1 \div l_4$ из приведенного решения в известные соотношения [1]:

$$\psi = \arg [2l_1^2 + 2l_4^2 - 1 + 2i (l_2 l_4 + l_1 l_3)]$$
$$\varphi = \arcsin [2 (l_1 l_2 - l_3 l_4)]$$
$$\chi = \arg [2l_1^2 + 2l_3^2 - 1 - 2i (l_2 l_3 + l_1 l_4)]$$

Полученные таким образом текущие значения параметров ориентации гиростабилизатора являются точным решением поставленной задачи на произвольном интервале времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
2. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Гостехтеориздат, 1954. 492 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
19.V.1989