

© 1992 г. Н. С. АЗИКОВ, В. В. ВАСИЛЬЕВ

СЖАТИЕ СЛОИСТЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С НЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУКТУРОЙ

Пластины, работающие в условиях одноосного и двухосного сжатия, являются распространенными элементами обшивки самолетов и кораблей. В последние годы для изготовления этих элементов используются композиционные материалы, обладающие высокой удельной (по отношению к плотности) прочностью и жесткостью. Структура таких панелей, определяемая схемой чередования слоев с различными толщинами и упругими свойствами, часто оказывается несимметричной по отношению к срединной плоскости, что вызывает изгиб панели при действии сжимающих нагрузок. Аналогичным свойством обладают панели, подкрепленные с одной стороны часто расположенными ребрами. Для расчета таких панелей обычно используется решение линейной задачи о продольном изгибе пластины, а в качестве предельной нагрузки принимается собственное значение сжимающего усилия, при котором ее прогиб неограниченно возрастает.

В настоящей работе задача о продольном изгибе пластины с несимметричной структурой рассматривается в нелинейной постановке. Сравнение полученного решения с линейным показывает, что последнее соответствует действительному поведению пластины лишь на начальном этапе нагружения и не позволяет определить предельную нагрузку.

1. Линейное решение. Рассмотрим пластину, шарнирно опертую по всем сторонам и нагруженную усилиями T_x и T_y (фиг. 1). Построим линейное решение, описывающее ее деформацию. С этой целью воспользуемся уравнениями равновесия плоской задачи

$$\partial N_x / \partial x + \partial N_{xy} / \partial y = 0, \quad \partial N_y / \partial y + \partial N_{xy} / \partial x = 0 \quad (1.1)$$

соотношениями упругости для усилий

$$N_x = B_{11}\epsilon_x + B_{12}\epsilon_y + C_{11}\kappa_x + C_{12}\kappa_y,$$

$$N_y = B_{21}\epsilon_x + B_{22}\epsilon_y + C_{21}\kappa_x + C_{22}\kappa_y,$$

$$N_{xy} = B_{33}\epsilon_{xy} + C_{33}\kappa_{xy} \quad (1.2)$$

и соответствующими геометрическими соотношениями, определяющими деформации и кривизны

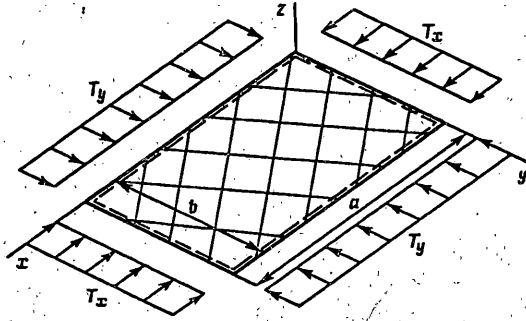
$$\epsilon_x = \partial u / \partial x, \quad \epsilon_y = \partial v / \partial y, \quad \epsilon_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \quad (1.3)$$

$$\kappa_x = -\partial^2 w / \partial x^2, \quad \kappa_y = -\partial^2 w / \partial y^2, \quad \kappa_{xy} = -2\partial^2 w / \partial x \partial y \quad (1.4)$$

В соотношениях (1.2) через B_{mn} обозначены мембранные жесткости, а через C_{mn} — смешанные жесткости, наличие которых характерно для пластин с несимметричной структурой.

Представим прогиб пластин в виде ряда

$$w = \sum_i \sum_j A_{ij} \sin \lambda_i x \sin \lambda_j y \quad (1.5)$$



Фиг. 1

где $\lambda_i = \pi i/a$, $\lambda_j = \pi j/b$. Подставляя прогиб (1.5) в уравнения (1.1), записанные с помощью равенств (1.2)—(1.4) в перемещениях, определим из этих уравнений тангенциальные перемещения u и v . Окончательно получим

$$u = \frac{x}{B} (-b_{22}T_x + B_{12}T_y) + \sum_i \sum_j A_{ij} \lambda_i p_{ij} \cos \lambda_i x \sin \lambda_j y$$

$$v = \frac{y}{B} (B_{12}T_x - B_{11}T_y) + \sum_i \sum_j A_{ij} \lambda_j r_{ij} \sin \lambda_i x \cos \lambda_j y \quad (1.6)$$

$$p_{ij} = \frac{1}{B_1} \left[(C_{11} + C \frac{\lambda_j^2}{\lambda_i^2}) (B_{22} + B_{33} \frac{\lambda_j^2}{\lambda_i^2}) - (C_{22} \frac{\lambda_j^2}{\lambda_i^2} + C) (B_{12} + B_{33}) \right]$$

$$r_{ij} = \frac{1}{B_1} \left[(C_{22} + C \frac{\lambda_i^2}{\lambda_j^2}) (B_{11} + B_{33} \frac{\lambda_i^2}{\lambda_j^2}) - (C_{11} \frac{\lambda_i^2}{\lambda_j^2} + C) (B_{12} + B_{33}) \right]$$

$$B = B_{11}B_{22} - B_{12}^2, \quad C = C_{12} + 2C_{33}$$

$$B_1 = B - B_{33} (2B_{12} - B_{22}\lambda_j^2/\lambda_i^2 - B_{11}\lambda_i^2/\lambda_j^2)$$

При построении решения (1.6) учитывались интегральные граничные условия

$$\int_0^b N_x dy = -T_x b \quad \text{при } x = 0, x = a,$$

$$\int_0^a N_y dx = -T_y a \quad \text{при } y = 0, y = b, \quad (1.7)$$

Равенства (1.5), (1.6) позволяют выразить перемещения через коэффициенты A_{ij} . Для определения этих коэффициентов воспользуемся вариационным принципом Лагранжа, т. е. условием стационарности полной энергии

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \varepsilon_{xy} + M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + M_{xy} \kappa_{xy}) dx dy +$$

$$+ bT_x \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx + aT_y \int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (1.8)$$

Входящие сюда моменты связаны с деформациями и кривизнами следующим образом:

$$M_x = C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y$$

$$M_y = C_{21}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + D_{21}\kappa_x + D_{22}\kappa_y, \quad M_{xy} = C_{33}\varepsilon_{xy} + D_{33}\kappa_{xy} \quad (1.9)$$

где D_{mn} — изгибные жесткости. Преобразуя соотношение (1.8) с помощью равенств (1.2)—(1.6) и (1.9), можно получить функциональную зависимость $U(A_{ij})$. Условие стационарности позволяет найти A_{ij} в виде

$$A_{ij} = (T_x S_{ij} + T_y t_{ij}) / \left(T_x + T_y \frac{\lambda_j^2}{\lambda_i^2} - N_{ij} \right), \quad i, j = 1, 3, 5 \dots \quad (1.10)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{B} \left[(B_{12}C_{12} - B_{22}C_{11}) \frac{\lambda_j}{\lambda_i} + (B_{12}C_{22} - B_{22}C_{12}) \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right]$$

$$t_{ij} = \frac{1}{B} \left[(B_{12}C_{12} - B_{11}C_{22}) \frac{\lambda_j}{\lambda_i} + (B_{12}C_{11} - B_{11}C_{12}) \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right], \quad N_{ij} = T_{ij} + L_{ij}$$

$$T_{ij} = \lambda_j^2 \sqrt{D_{11}D_{22}} \left[\frac{\lambda_i^2}{\lambda_j^2} \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} + \frac{2(D_{12} + 2D_{33})}{\sqrt{D_{11}D_{22}}} + \frac{\lambda_j^2}{\lambda_i^2} \sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}} \right]$$

$$L_{ij} = \lambda_j^2 \left[p_{ij} (p_{ij} B_{11} - 2C_{11}) \frac{\lambda_i^2}{\lambda_j^2} + r_{ij} (r_{ij} B_{22} - 2C_{22}) \frac{\lambda_j^2}{\lambda_i^2} + 2B_{12} p_{ij} r_{ij} + B_{33} (p_{ij} + r_{ij})^2 - 2C (p_{ij} + r_{ij}) \right]$$

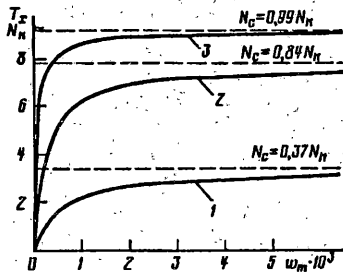
Для упрощения дальнейшего анализа рассмотрим пластину, сжатую в одном направлении. Полагая в (1.10) $T_x = 0$, получим

$$A_{ij} = S_{ij} / (1 - N_{ij}/T_x) \quad (1.11)$$

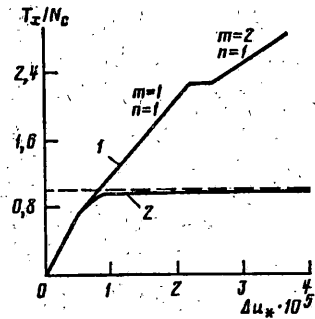
Величины N_{ij} являются собственными значениями линейной краевой задачи. В дальнейшем минимальное из этих значений будем обозначать через N_c . Из равенства (1.11) следует, что при $T_x = N_c$ прогиб пластины неограниченно возрастает. Для пластин, структура которых симметрична относительно срединной плоскости, смешанные жесткости $C_{mn} = 0$, $L_{ij} = 0$ и $N_{ij} = T_{ij}$. Минимальное собственное значение в этом случае определяет критическое усилие N_k . В дальнейшем применительно к пластинам с несимметричной структурой будем обозначать через N_k минимальное собственное значение N_{ij} , полученное в результате формального приравнивания нулю смешанных жесткостей.

В качестве примера рассмотрим квадратную ($a = b = 0,2$ м) пластину из углепластика, состоящую из четырех слоев с углами армирования φ (фиг. 1) 0° ; $\pm 30^\circ$; $\pm 60^\circ$; 90° и толщинами 0,26; 0,52; 0,52; 0,26 мм. Зависимость максимального прогиба w_m от усилия T_x показана на фиг. 2 (кривая 1). Заметим, что для рассматриваемой пластины $N_c = 0,37 N_k$, т. е. согласно традиционному подходу ее расчетная сопротивляемость сжимающему усилию является значительно меньшей, чем сопротивляемость аналогичной пластины с симметричным расположением слоев. Кривая 2 на фиг. 2 соответствует пластине, у которой исходные смешанные коэффициенты жесткости формально уменьшены в 2 раза, а кривая 3 — пластине, у которой они уменьшены в 10 раз. Соответственно для первой пластины $N_c = 0,84 N_k$, а для второй $N_c = 0,99 N_k$.

Таким образом, из линейного анализа следует, что сопротивляемость пластины сжатию определяется величиной N_c и тем выше, чем меньше смешанные коэффициенты жесткости, т. е. чем ближе структура пластины к симметричной. Заметим, что основанием для того, чтобы считать нагрузку N_c предельной для пластины с несимметричной структурой, обычно служит неограниченное возра-



Фиг. 2



Фиг. 3

стание прогиба при $T_x \rightarrow N_c$. Однако этот результат не соответствует исходным предпосылкам линейного анализа, согласно которым прогиб является малым. Единственный вывод, который можно сделать на основании линейного анализа, заключается в том, что при нагрузках близких к N_c для расчета пластины следует использовать нелинейные уравнения.

2. Нелинейное решение. В соответствии с нелинейной теорией Кармана — Фешля будем считать, что пластина описывается уравнениями (1.1), (1.2), (1.4), (1.8), (1.9); а вместо (1.3) воспользуемся следующими известными соотношениями:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для анализа пластины применим метод, изложенный в [1], согласно которому прогиб аппроксимируется в форме

$$w = A_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y \quad (2.2)$$

Амплитуда прогиба A_{mn} определяется из условия минимума полной энергии (1.8), а параметры λ_m и λ_n или числа полувольт m и n при найденном таким образом A_{mn} соответствуют минимальному значению внешней нагрузки [1]. Заметим, что форма (2.2) описывает прогиб сжимаемых в своей плоскости несимметричных пластин, если их удлинение (a/b) не превосходит 1,5, что и предполагается в дальнейшем. При использовании соотношений (2.1) вместо (1.3) решение уравнений (1.1), аналогичное решению (1.6) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u = x \left[\frac{1}{B} (-B_{22} T_x + B_{12} T_y) - \frac{1}{8} A_{mn}^2 \lambda_m^2 \right] + A_{mn} \lambda_n p_{mn} \cos \lambda_m x \sin \lambda_n y - \\ - \frac{1}{16 \lambda_m} A_{mn}^2 \left(\lambda_m^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} \lambda_n^2 \right) \sin 2 \lambda_m x + \frac{\lambda_m}{16} A_{mn}^2 \sin 2 \lambda_m x \cos 2 \lambda_n y \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} v = y \left[\frac{1}{B} (B_{12} T_x - B_{11} T_y) - \frac{1}{8} A_{mn}^2 \lambda_n^2 \right] + A_{mn} \lambda_m r_{mn} \sin \lambda_m x \cos \lambda_n y - \\ - \frac{1}{16 \lambda_m} A_{mn}^2 \left(\lambda_n^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}} \lambda_m^2 \right) \sin 2 \lambda_n y + \frac{\lambda_n}{16} A_{mn}^2 \sin 2 \lambda_m x \cos 2 \lambda_n y \end{aligned}$$

Здесь введены те же обозначения, что и в равенствах (1.6), только i следует

заменить на m , а j — на n . Решение (2.3) удовлетворяет граничным условиям (1.7).

Подставляя перемещения (2.2), (2.3) в соотношения (1.4) и (2.1), а найденные деформации, а также усилия и моменты, следующие из равенств (1.2) и (1.9), — в выражение для полной энергии (1.8), получим

$$U = \sqrt{4}\lambda_m^2 ab (K_0 A_{mn} + \sqrt{2}K_1 A_{mn}^2 + \sqrt{3}K_2 A_{mn}^3 + \sqrt{4}K_3 A_{mn}^4) - ab (B_{22}T_x^2 + B_{11}T_y^2 + 2B_{12}T_x T_y) / (2B) \quad (2.4)$$

$$K_0 = \frac{16}{\lambda_m^2 ab} (T_x S_{mn} + T_y t_{mn}), \quad K_1 = N_{mn} - T_x - \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} T_y$$

$$K_2 = \frac{1}{ab} \left\{ -B \left(\frac{\lambda_m}{B_{12}\lambda_n} p_{mn} + \frac{\lambda_n^3}{B_{11}\lambda_m^3} t_{mn} \right) + \left(1 - \frac{B_{12}\lambda_n^2}{B_{11}\lambda_m^2} \right) \left[\frac{\lambda_m}{\lambda_n} (C_{11} - B_{11}p_{mn}) + \frac{\lambda_n}{\lambda_m} (C_{12} - B_{12}t_{mn}) \right] + \left(\frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} - \frac{B_{12}}{B_{22}} \right) \left[\frac{\lambda_n}{\lambda_m} (C_{22} - B_{22}t_{mn}) + \frac{\lambda_m}{\lambda_n} (C_{12} - B_{12}p_{mn}) \right] + \frac{\lambda_n}{\lambda_m} \left[\frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} \left(C_{11} - C_{12} \frac{B_{12}}{B_{22}} \right) + \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} \left(C_{22} - C_{12} \frac{B_{12}}{B_{11}} \right) - C_{11} \frac{B_{12}}{B_{11}} - C_{22} \frac{B_{12}}{B_{22}} + 2C_{12} \right] \right\}$$

$$K_3 = \frac{\lambda_n^2}{16} B \left(\frac{\lambda_m^2}{B_{22}\lambda_n^2} + \frac{\lambda_n^2}{B_{11}\lambda_m^2} \right)$$

Входящие сюда обозначения соответствуют равенствам (1.10) и (2.3). Кроме того, при четных m и n коэффициенты K_0 и K_2 обращаются в нуль. Минимизируя полную энергию (2.4) по A_{mn} , получим кубическое уравнение для амплитуды прогиба

$$K_3 A_{mn}^3 + K_2 A_{mn}^2 + K_1 A_{mn} + K_0 = 0$$

В качестве примера рассмотрим уже обсуждавшуюся квадратную пластину из углепластика. В связи с возможной перестройкой деформированной поверхности пластины, т. е. с изменением m и n в результате потери устойчивости процесса деформирования, показанного на фиг. 2, представляется более удобным строить зависимость нагрузки от относительного сближения нагруженных кромок, а не от прогиба. Такая зависимость показана на фиг. 3 (кривая 1). Скачок на кривой соответствует потере устойчивости процесса деформирования с одной полуволной для прогиба. Кривая 2 иллюстрирует линейное решение, согласно которому при $T_x = N_c$ прогиб обращается в бесконечность. Сравнивая кривые, можно заключить, что собственное значение N_c не связано с потерей устойчивости несимметричной пластины и не определяет предельную величину действующей на нее нагрузки.

3. Сравнение пластины с симметричной и несимметричной структурой. Приведем результаты расчета двух пластин из углепластика с углами армирования $\varphi = 0^\circ; \pm 30^\circ; \pm 60^\circ; 90^\circ$. Первая пластина является несимметричной по толщине и при определении ее изгибных и смешанных жесткостей в качестве плоскости приведения использовалась срединная плоскость. Для второй пластины структура считалась симметричной, причем мембранные и изгибные жесткости принимались такими же как у первой пластины, а смешанные жесткости формально обращались в ноль. По разрушению наиболее нагруженного композитного слоя, которое устанавливалось в соответствии с критерием прочности Мизеса — Хилла, определялась предельная нагрузка и находился максимальный прогиб. Для исходной несимметричной пластины было получено $N_c = 1,91$ кН/м, а для условной симметричной — $N_c = N_k =$

5,21 кН/м. Таким образом, согласно линейному решению, сопротивляемость одноосному сжатию у пластины с симметричной структурой в 2,7 раза выше чем у пластины с несимметричной структурой. Однако предельная нагрузка, найденная в результате нелинейного анализа, в первом случае составила 81,7 кН/м, а во втором — 75,9 кН/м, т. е. величину, меньшую всего на 7%. Максимальный прогиб у симметричной пластины оказался $\pm 5,66$ мм, а у несимметричной — 5,82 мм при толщине пластины 1,56 мм. Таким образом, в отношении предельной нагрузки и максимального прогиба несимметричная пластина мало отличается от симметричной, если различие между ними заключается только в несимметричности структуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азиков Н. С., Васильев В. В. Устойчивость и закритическое поведение сжатых композитных панелей//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 152—158.

Москва

Поступила в редакцию
3.IX.1991.