МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1992

УДК 539.3:534.1

© 1992 г. А. В. ЛОПАТИН

# УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТАВНОЙ КОМПОЗИТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

В рамках полубезмоментной теории рассматривается задача устойчивости при действии внешнего давления композитной цилиндрической оболочки, состоящей из двух частей: монолитной и трехслойной.

Рассмотрим задачу устойчивости при внешнем давлении композитной цилиндрической оболочки, выполненной из двух частей: монолитной и трехслойной (фиг. 1). Такая конструкция может быть использована в качестве корпуса подводного аппарата, в котором по условиям эксплуатации требуется обеспечить определенное расположение центра тяжести (фиг. 2).

Отнесем срединную поверхность оболочки к системе криволинейных координат $\alpha\beta\gamma$, начало которой поместим в место стыка двух частей цилиндра (фиг. 1). Величины, относящиеся к монолитной части оболочки, будем помечать верхним индексом (1), а величины, относящиеся к трехслойной части,— верхним индексом (2). Обозначим (фиг. 1) через $h$ — толщину оболочки, $\delta$ — толщину заполнителя, $R$ — радиус цилиндра, образованного срединной поверхностью, $l^{(1)}$ — длину монолитной части, $l^{(2)}$ — длину трехслойной части.

Воспользуемся для решения поставленной задачи уравнениями полубезмоментной теории цилиндрических композитных оболочек [1]. В рамках этой теории система уравнений, описывающая потерю устойчивости составного цилиндра при внешнем давлении, включает линеаризованные уравнения устойчивости

$$\frac{\partial N_\alpha^{(i)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}^{(i)}}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial N_\beta^{(i)}}{\partial \beta} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}^{(i)}}{\partial \alpha} + \frac{Q_\beta^{(i)}}{R} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial Q_\beta^{(i)}}{\partial \beta} - \frac{N_\beta^{(i)}}{R} - p\left(R\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial \beta^2} - \frac{\partial V^{(i)}}{\partial \beta}\right) = 0, \quad \frac{\partial M_\beta^{(i)}}{\partial \beta} - Q_\beta^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

физические соотношения

$$N_\alpha^{(i)} = B_{11}^{(i)}\varepsilon_\alpha^{(i)}, \; N_{\alpha\beta}^{(i)} = B_{33}^{(i)}\gamma_{\alpha\beta}^{(i)}, \; M_\beta^{(i)} = D_{22}^{(i)}\kappa_\beta^{(i)}, \; Q_\beta^{(i)} = K_\beta^{(i)}\psi_\beta^{(i)} \quad (i = 1, 2) \tag{2}$$

геометрические соотношения

$$\varepsilon_\alpha^{(i)} = \partial U^{(i)}/\partial\alpha, \; \gamma_{\alpha\beta}^{(i)} = \partial U^{(i)}/\partial\beta + \partial V^{(i)}/\partial\alpha, \; \kappa_\beta^{(i)} = \partial\varphi_\beta^{(i)}/\partial\beta \tag{3}$$

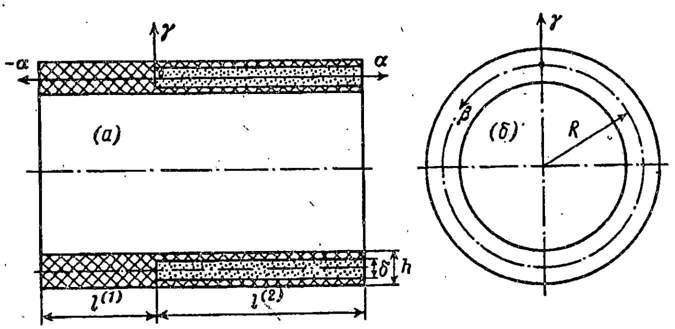
$$\psi_\beta^{(i)} = \varphi_\beta^{(i)} - V^{(i)}/R + \partial W^{(i)}/\partial\beta \quad (i = 1, 2)$$

условия нерастяжимости контура сечения

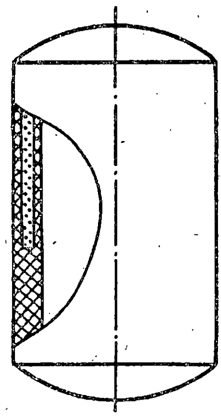
$$\partial V^{(i)}/\partial\beta + W^{(i)}/R = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{4}$$

условия сопряжения монолитной и трехслойной частей оболочки

$$N_\alpha^{(1)}(0) = N_\alpha^{(2)}(0), \quad N_{\alpha\beta}^{(1)}(0) = N_{\alpha\beta}^{(2)}(0), \quad U^{(1)}(0) = U^{(2)}(0), \quad V^{(1)}(0) = V^{(2)}(0) \tag{5}$$




Фиг. 1



Фиг. 2

В формулах (1), (2), (3), (4), (5) $N_\alpha^{(i)}, N_\beta^{(i)}, N_{\alpha\beta}^{(i)}$ — мембранные усилия; $Q_\beta^{(i)}$ — перерезывающая сила; $M_\beta^{(i)}$ — изгибающий момент; $\varepsilon_\alpha^{(i)}$, $\gamma_{\alpha\beta}^{(i)}$ — компоненты мембранной, $\kappa_\beta^{(i)}$ — изгибной, $\psi_\beta^{(i)}$ — сдвиговой деформаций; $U^{(i)}$, $V^{(i)}$, $W^{(i)}$ — перемещения и прогиб точек срединной поверхности; $\varphi_\beta^{(i)}$ — угол поворота нормали к срединной поверхности; $p$ — параметр нагрузки; $B_{11}^{(i)}$, $B_{33}^{(i)}$ — мембранные, $D_{22}^{(i)}$ — изгибная, $K_\beta^{(i)}$ — сдвиговая жесткости стенки. Следуя [1], определим жесткостные параметры следующим образом

$$B_{11}^{(1)} = A_{11}h,\ B_{33}^{(1)} = A_{33}h,\ D_{22}^{(1)} = A_{22}\frac{h^3}{12},\ K_\beta^{(1)} = G_{23}h$$
$$B_{11}^{(2)} = A_{11}(h-\delta),\ B_{33}^{(2)} = A_{33}(h-\delta),\ D_{22}^{(2)} = A_{22}\frac{h^3-\delta^3}{12}$$
$$K_\beta^{(2)} = h^2((h-\delta)/G_{23} + \delta/G)^{-1} \tag{6}$$

$$A_{11} = \bar{E}_1,\ A_{22} = \bar{E}_2,\ A_{33} = G_{12},\ \bar{E}_{1,2} = E_{1,2}/(1-\mu_{12}\mu_{21})$$

Здесь $E_1$, $E_2$ — модули упругости при растяжении—сжатии в направлениях $\alpha$ и $\beta$; $G_{12}$, $G_{23}$ — модули сдвига в плоскостях $\alpha\beta$ и $\alpha\gamma$; $\mu_{12}$, $\mu_{21}$ — коэффициенты Пуассона материала монолитной части и несущих слоев трехслойной части; $G$ — модуль сдвига легкого заполнителя.

Получим систему уравнений в перемещениях. Для этого выразим из третьего равенства системы (1) кольцевое усилие

$$N_\beta^{(i)} = R\frac{\partial Q_\beta^{(i)}}{\partial\beta} - pR\left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial\beta^2} - \frac{\partial V^{(i)}}{\partial\beta}\right) \quad (i = 1, 2)$$

и подставив его во второе равенство системы (1), запишем уравнения устойчивости в следующем виде

$$\partial N_\alpha^{(i)}/\partial\alpha + \partial N_{\alpha\beta}^{(i)}/\partial\beta = 0,\ \partial N_{\alpha\beta}/\partial\alpha + R\partial^2 Q_\beta^{(i)}/\partial\beta^2 + Q_\beta^{(i)}/R -$$
$$- pR(R\partial^3 W^{(i)}/\partial\beta^3 - \partial^2 V^{(i)}/\partial\beta^2) = 0,\ \partial M_\beta^{(i)}/\partial\beta - Q_\beta^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{7}$$

Выражая в (7) усилия и момент через деформации с помощью физических соотношений (2), а деформации — через перемещения и угол поворота согласно равенствам (3) и условию (4), окончательно получим

$$B_{11}^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \alpha^2} + B_{33}^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \beta^2} + B_{33}^{(i)} \frac{\partial^2 V^{(i)}}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$$

$$B_{33}^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \alpha \partial \beta} + B_{33}^{(i)} \frac{\partial^2 V^{(i)}}{\partial \alpha^2} - 2K_\beta^{(i)} \frac{\partial^2 V^{(i)}}{\partial \beta^2} - R^2 K_\beta^{(i)} \frac{\partial^4 V^{(i)}}{\partial \beta^4} - \frac{K_\beta^{(i)}}{R^2} V^{(i)} +$$

$$+ RK_\beta^{(i)} \frac{\partial^2 \varphi_\beta^{(i)}}{\partial \beta^2} + \frac{K_\beta^{(i)}}{R} \varphi_\beta^{(i)} + pR \left( R^2 \frac{\partial^4 V^{(i)}}{\partial \beta^4} + \frac{\partial^2 V^{(i)}}{\partial \beta^2} \right) = 0$$

$$K_\beta^{(i)} R \frac{\partial^2 V^{(i)}}{\partial \beta^2} + \frac{K_\beta^{(i)}}{R} V^{(i)} + D_{22}^{(i)} \frac{\partial^2 \varphi_\beta^{(i)}}{\partial \beta^2} - K_\beta^{(i)} \varphi_\beta^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{8}$$

После аналогичных преобразований условия сопряжения двух частей оболочки (5) примут вид

$$B_{11}^{(1)} \frac{\partial U^{(1)}(0)}{\partial \alpha} = B_{11}^{(2)} \frac{\partial U^{(2)}(0)}{\partial \alpha}, \quad B_{33}^{(1)} \frac{\partial U^{(1)}(0)}{\partial \beta} + B_{33}^{(1)} \frac{\partial V^{(1)}(0)}{\partial \alpha} =$$

$$= B_{33}^{(2)} \frac{\partial U^{(2)}(0)}{\partial \beta} + B_{33}^{(2)} \frac{\partial V^{(2)}(0)}{\partial \alpha}, \quad U^{(1)}(0) = U^{(2)}(0), \quad V^{(1)}(0) = V^{(2)}(0) \tag{9}$$

Полученная таким образом система уравнений (8) содержит в качестве неизвестных перемещения $U^{(i)}$, $V^{(i)}$ $(i=1, 2)$ и угол поворота $\varphi_\beta^{(i)}$ $(i=1, 2)$.

Рассмотрим граничные условия на торцах оболочки при $\alpha = \alpha^{(i)} = (-1)^i l^{(i)}$ $(i=1, 2)$. Для защемленных краев

$$U^{(i)}(\alpha^{(i)}) = 0, \quad V^{(i)}(\alpha^{(i)}) = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{10}$$

Если края свободно оперты, то $V^{(i)}(\alpha^{(i)}) = 0$, $N_\alpha^{(i)}(\alpha^{(i)}) = 0$ $(i = 1, 2)$ или, принимая во внимание физические (2) и геометрические (3) соотношения

$$V^{(i)}(\alpha^{(i)}) = 0, \quad \partial U^{(i)}(\alpha^{(i)})/\partial \alpha = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{11}$$

Представим решение уравнений (8) в виде тригонометрических рядов

$$U^{(i)} = \sum_n U_n^{(i)}(\alpha) \cos \lambda_n \beta, \quad V^{(i)} = \sum_n V_n^{(i)}(\alpha) \sin \lambda_n \beta$$

$$\varphi_\beta^{(i)} = \sum_n \varphi_{\beta n}^{(i)}(\alpha) \sin \lambda_n \beta \quad (i = 1, 2; \; n = 2, 3, \ldots) \tag{12}$$

где $\lambda_n = \frac{n}{R}$; $n$ — число волн по окружности; $U_n^{(i)}(\alpha)$, $V_n^{(i)}(\alpha)$, $\varphi_{\beta n}^{(i)}(\alpha)$ $(i=1, 2)$ — неизвестные функции переменной $\alpha$.

Подставляя (12) в (8), получим следующую однородную систему дифференциально-алгебраических уравнений

$$B_{11}^{(i)} \frac{d^2 U_n^{(i)}}{d\alpha^2} - B_{33}^{(i)} \lambda_n^2 U_n^{(i)} + B_{33}^{(i)} \lambda_n \frac{dV_n^{(i)}}{d\alpha} = 0$$

$$- B_{33}^{(i)} \lambda_n \frac{dU_n^{(i)}}{d\alpha} + B_{33}^{(i)} \frac{d^2 V_n^{(i)}}{d\alpha^2} - K_\beta^{(i)} \frac{f_n^2}{R^2} V_n^{(i)} - K_\beta^{(i)} \frac{f_n}{R} \varphi_{\beta n}^{(i)} + p_n R \lambda_n^2 f_n V_n^{(i)} = 0 \tag{13}$$

$$- K_\beta^{(i)} \frac{f_n}{R} V_n^{(i)} - (D_{22}^{(i)} \lambda_n^2 + K_\beta^{(i)}) \varphi_{\beta n}^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2; \; n = 2, 3, \ldots)$$

где $f_n = n^2 - 1$; $p_n$ — параметр нагрузки, соответствующий номеру разложения $n$.

Исключив из (13) угол поворота $\varphi_{\beta n}^{(i)}$, приведем систему к виду

$$\frac{d^2U_n^{(i)}}{d\alpha^2} = \frac{B_{33}^{(i)}}{B_{11}^{(i)}}\lambda_n^2 U_n^{(i)} - \frac{B_{33}^{(i)}}{B_{11}^{(i)}}\lambda_n \frac{dV_n^{(i)}}{d\alpha}$$

$$\frac{d^2V_n^{(i)}}{d\alpha^2} = \frac{D_{22}^{(i)}K_\beta^{(i)}}{B_{33}^{(i)}(D_{22}^{(i)}\lambda_n^2 + K_\beta^{(i)})}\frac{\lambda_n^2 f_n^2}{R^2}V_n^{(i)} - p_n\frac{R\lambda_n^2 f_n}{B_{33}^{(i)}}V_n^{(i)} + \lambda_n\frac{dU_n^{(i)}}{d\alpha}$$

$$(i = 1, 2;\ n = 2, 3, \ldots) \qquad (14)$$

Подставляя разложения (12) в условия сопряжения двух частей оболочки (9), получим

$$B_{11}^{(1)}\frac{dU_n^{(1)}(0)}{d\alpha} = B_{11}^{(2)}\frac{dU_n^{(2)}(0)}{d\alpha}, \quad -B_{33}^{(1)}\lambda_n U_n^{(1)}(0) + B_{33}^{(1)}\frac{dV_n^{(1)}(0)}{d\alpha} =$$

$$= -B_{33}^{(2)}\lambda_n U_n^{(2)}(0) + B_{33}^{(2)}\frac{dV_n^{(2)}(0)}{d\alpha}, \qquad (15)$$

$$U_n^{(1)}(0) = U_n^{(2)}(0),\ V_n^{(1)}(0) = V_n^{(2)}(0)\ (n = 2, 3, \ldots)$$

С учетом (12) граничные условия (10), (11) примут вид

$$U_n^{(i)}(\alpha^{(i)}) = 0, \quad V_n^{(i)}(\alpha^{(i)}) = 0 \quad (i = 1, 2) \qquad (16)$$

$$V^{(i)}(\alpha^{(i)}) = 0, \quad dU_n^{(i)}(0)/d\alpha = 0 \quad (i = 1, 2) \qquad (17)$$

Сделаем далее замену переменных. Положим

$$y_{1n}^{(i)} = U_n^{(i)},\ y_{2n}^{(i)} = V_n^{(i)},\ y_{3n}^{(i)} = dU_n^{(i)}/d\alpha,\ y_{4n}^{(i)} = dV_n^{(i)}/d\alpha\ (i = 1, 2;\ n = 2, 3, \ldots) \qquad (18)$$

Тогда система уравнений (14) примет вид

$$d\mathrm{Y}_n^{(i)}/d\alpha = (\mathrm{A}_n^{(i)} - p_n\mathrm{B}_n^{(i)})\,\mathrm{Y}_n^{(i)} \qquad (19)$$

$$\mathrm{Y}_n^{(i)} = \begin{Bmatrix} y_{1n}^{(i)} \\ y_{2n}^{(i)} \\ y_{3n}^{(i)} \\ y_{4n}^{(i)} \end{Bmatrix}, \quad \mathrm{A}_n^{(i)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & a_{13}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24}^{(i)} \\ a_{31}^{(i)} & 0 & 0 & a_{34}^{(i)} \\ 0 & a_{42}^{(i)} & a_{43}^{(i)} & 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathrm{B}_n^{(i)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{42}^{(i)} & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$a_{13}^{(i)} = a_{24}^{(i)} = 1, \quad a_{31}^{(i)} = \frac{B_{33}^{(i)}}{B_{11}^{(i)}}\lambda_n^2, \quad a_{34}^{(i)} = -\frac{B_{33}^{(i)}}{B_{11}^{(i)}}\lambda_n$$

$$a_{42}^{(i)} = \frac{D_{22}^{(i)}K_\beta^{(i)}}{B_{33}^{(i)}(D_{22}^{(i)}\lambda_n^2 + K_\beta^{(i)})}\frac{\lambda_n^2 f_n^2}{R^2}, \quad a_{43}^{(i)} = \lambda_n, \quad b_{42} = \frac{R\lambda_n^2 f_n}{B_{33}^{(i)}} \quad (i = 1, 2;\ n = 2, 3, \ldots)$$

Используя (18), запишем в матричной форме условия сопряжения монолитной и трехслойной частей оболочки (15):

$$\mathrm{H}_n^{(1)}\mathrm{Y}_n^{(1)}(0) - \mathrm{H}_n^{(2)}\mathrm{Y}_n^{(2)}(0) = 0 \qquad (20)$$

$$\mathrm{H}_n^{(i)} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & h_{13}^{(i)} & 0 \\ h_{21}^{(i)} & 0 & 0 & h_{24}^{(i)} \\ h_{31}^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$h_{13}^{(i)} = B_{11}^{(i)},\ h_{21}^{(i)} = -B_{33}^{(i)}\lambda_n,\ h_{24}^{(i)} = B_{33}^{(i)},\ h_{31}^{(i)} = h_{42}^{(i)} = 1\ (i = 1, 2;\ n = 2, 3, \ldots)$$

Граничные условия на торцах оболочки (16), (17) примут вид

$$G^{(i)}Y_n^{(i)}(\alpha^{(i)}) = 0 \ (i = 1, 2; \ n = 2, 3, \ldots) \tag{21}$$

где для защемленных краев

$$G^{(i)} = \begin{Bmatrix} g_{11}^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{21}^{(i)} & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad g_{11}^{(i)} = g_{21}^{(i)} = 1$$

а для свободно опертых

$$G^{(i)} = \begin{Bmatrix} 0 & g_{12}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{23}^{(i)} & 0 \end{Bmatrix}, \quad g_{12}^{(i)} = g_{23}^{(i)} = 1$$

Решение однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка (19) представим в следующем виде

$$Y_n^{(i)} = F_n^{(i)}(\alpha)\, C_n^{(i)} \ (i = 1, 2; \ n = 2, 3, \ldots) \tag{22}$$

где $F_n^{(i)}(\alpha)$ — фундаментальная матрица системы (19); $C_n^{(i)}$ — вектор постоянных. Столбцы фундаментальной матрицы вычисляются по формуле

$$F_{nj}^{(i)}(\alpha) = e^{s_{nj}^{(i)}\alpha} V_{nj}^{(i)} \ (j = 1, \ldots, 4; \ i = 1, 2; \ n = 2, 3, \ldots) \tag{23}$$

где $s_{nj}^{(i)}$ и $V_{nj}^{(i)}$ — собственное значение и соответствующий ему собственный вектор матрицы $A_n^{(i)} - p_n B_n^{(i)}$, определяемые численно. В зависимости от величины жесткостных характеристик (6) номера разложения $n$ ($n = 2, 3, \ldots$) и параметра нагрузки $p_n$ ($n = 2, 3, \ldots$) собственные значения и собственные векторы могут быть как комплексными, так и действительными. В случае комплексного собственного значения решение (22) заменяется двумя действительными решениями: действительной и мнимой частями решения (22).

Подставляя (22) в условие сопряжения частей оболочки (20) и в граничные условия (21), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$Z_n C_n = 0 \ (n = 2, 3, \ldots) \tag{24}$$

$$Z_n = \begin{Bmatrix} Z_{11n} & Z_{12n} \\ Z_{21n} & 0 \\ 0 & Z_{32n} \end{Bmatrix}, \quad C_n = \begin{Bmatrix} C_n^{(1)} \\ C_n^{(2)} \end{Bmatrix}.$$

Подматрицы $Z_{11n}$, $Z_{12n}$, $Z_{21n}$, $Z_{32n}$ определяются по формулам $Z_{11n} = H_n^{(1)}F_n^{(1)}(0)$, $Z_{12n} = -H_n^{(2)}F_n^{(2)}(0)$; $Z_{21n} = G^{(1)}F_n^{(1)}(\alpha^{(1)})$, $Z_{32n} = G^{(2)}F_n^{(2)}(\alpha^{(2)})$ и имеют порядок $Z_{11n}$ — $4 \times 4$, $Z_{12n}$ — $4 \times 4$, $Z_{21n}$ — $2 \times 4$, $Z_{32n}$ — $2 \times 4$. Из условия

$$\det Z_n = 0 \ (n = 2, 3, \ldots) \tag{25}$$

найдем то значение $p_n$ ($n = 2, 3, \ldots$), при котором существует отличное от нуля решение системы (24).

Соотношение (25) представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение относительно $p_n$, которое решается численно. Отметим, что $\det Z_n$ не имеет аналитического выражения и в процессе поиска корня уравнения (25) определяется алгоритмически.

Критическое внешнее давление $p_{cr} = \min(p_2, p_3, \ldots, p_{\bar{n}})$, где $\bar{n}$ — максимальное значение $n$, используемое в переборе возможных форм потери устойчивости оболочки.

Описанный выше подход к решению задачи устойчивости составной композитной цилиндрической оболочки при действии внешнего давления реализован в вычислительной программе. Для нахождения корней уравнения (25) использован метод половинного деления [2]. Собственные значения и собственные векторы в формуле (23) вычисляются методом двойной *QR* итерации [3].

В качестве примера определим величину критического давления для оболочки со следующими параметрами: $h = 0{,}15$ м; $\delta = 0{,}12$ м; $R = 1{,}3$ м; $l^{(1)} = 1{,}5$ м; $l^{(2)} = 3{,}5$ м; $E_1 = 18$ ГПа, $E_2 = 50$ ГПа, $G_{12} = 7$ ГПа, $G_{23} = 2$ ГПа, $\mu_{12} = 0{,}05$; $\mu_{21} = 0{,}14$; $G = 0{,}01$ ГПа. Края оболочки свободно оперты. Критическое давление $p_{cr} = 1{,}56$ МПа. Число волн по окружности $n = 4$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Васильев В. В.* Механика конструкций из композитных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
2. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664 с.
3. *Уилкинсон Дж.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.


Красноярск

Поступила в редакцию
14.VIII.1991