МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1992

УДК 539.3

© 1992 г. Е. В. ЛОБАНОВ

К ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ОБОЛОЧЕК

При использовании сверхпроводящих конструкций в виде пластин и оболочек в различных технических устройствах, в них могут возникать значительные механические напряжения, приводящие к разрушению конструкции или потере функциональных сверхпроводящих свойств. В качестве примера можно указать на сверхпроводящие катушки тороидального магнитного поля в ТОКАМАКах и термоядерных реакторах [1]. С макроскопической точки зрения сверхпроводящую обмотку в таких установках можно рассматривать как тонкостенную тороидальную оболочку, сцепленную с упругим основанием — бандажом и подвергающуюся воздействию интенсивных термомеханических, электромагнитных и радиационных полей.

Оценки предельного состояния упругопластических тонкостенных конструкций в настоящее время базируются на различных теориях пластичности при детерминированных внешних воздействиях. За исключением небольшого числа канонических задач расчеты неупругого поведения таких конструкций могут быть проведены до конца только численными методами. С другой стороны, известные теории надежности находят применение, как правило, при условии линейно упругого деформирования оболочек и пластин. Причем, большинство расчетов ограничено методическими примерами узкополосных случайных полей. В этой связи, построение теории надежности упругопластических сверхпроводящих оболочечных конструкций при случайных внешних воздействиях с произвольной шириной спектра является актуальным.

В данной статье предлагается теория надежности упругопластических однородных изотропных сверхпроводящих оболочек. В основу теории положена идея линеаризации физически и геометрически нелинейных уравнений теории сверхпроводящих оболочек на фоне упругопластического безмоментного состояния. В качестве основных уравнений теории приняты уравнения теории связанных полей в высокотемпературных сверхпроводниках [2, 3], соотношения деформационной теории пластичности [4, 5], уравнения нелинейной теории пологих оболочек [6], уравнения теории выбросов случайных скалярных полей [7, 8].

Построение замкнутой системы уравнений сверхпроводящих оболочек проведено на основе вариационного принципа Л. И. Седова, обобщающего принцип стационарного действия на необратимые процессы и наличие неконсервативных сил [9]. В отличие от работ [2, 3, 9], в которых этот принцип применялся в четырехмерной форме в рамках специальной теории относительности, в данной статье вариационный принцип сформулирован в нерелятивистском, ньютоновском приближении. Применение такого подхода не только отвечает интуитивным физическим представлениям, но позволяет значительно упростить методологию построения теории тонкостенных сверхпроводящих конструкций. Сведение трехмерных задач теории сверхпроводящих сплошных сред к двумерным задачам теории сверхпроводящих оболочек осуществлено с помощью одной из наиболее употребительных схем: разложение определяющих параметров в степенные ряды по нормали к срединной поверхности, интегрирование вариационного уравнения по толщине оболочки, усечение рекуррентной системы уравнений теории связанных полей в тонкостенных конструкциях.

В теории получены уравнения состояния упругопластической сверхпроводящей оболочки в предположении, что потенциал свободной энергии зависит только от двух первых инвариантов тензора деформаций. Приведена система макроскопических экспе-

риментов для определения феноменологических констант. Оценено влияние сверхпроводимости на термомеханические характеристики оболочки. Определены изменения касательных модулей, коэффициента температурного расширения, энтропии и теплоемкости при переходе оболочки в сверхпроводящее состояние. Построены линеаризованные уравнения упругопластического деформирования сверхпроводящих оболочек при пространственно-временных случайных воздействиях. Определена функция связи между спектральными плотностями интенсивности напряжений и внешней нагрузки. Получена конечная формула для математического ожидания поля интенсивности напряжений, превышающих предел прочности оболочки в единицу времени на единице площади при произвольном спектре внешней нагрузки. Дана оценка для функции надежности в зависимости от меры области, занятой оболочкой, и назначенного ресурса.

1. Рассмотрим тонкую упругопластическую неполяризующуюся и ненамагничивающуюся оболочку из однородного изотропного сверхпроводящего материала, подвергающуюся воздействию силовых, температурных и электромагнитных полей. Отнесем оболочку к лагранжевой системе координат ξ^1, ξ^2, ξ^3, в которой координатные линии ξ^1, ξ^2 совпадают с линиями кривизны срединной поверхности оболочки. Систему уравнений движения оболочки как трехмерного тела получим на основе вариационного уравнения [9]:

$$\delta I + \delta W^{v} + \delta W = 0 \qquad (1.1)$$

представляющего в синтезированном виде первое и второе начала термодинамики. Здесь I — действие, определенное для любых возможных процессов и движений, δW^{v} — неголономный функционал, учитывающий необратимые термодинамические процессы и неконсервативные силы, δW — скалярный функционал, определяющий дополнительный приток энергии к системе за счет энергетических взаимодействий на граничных поверхностях оболочки. Вид функционала δW устанавливается из уравнения (1.1) после задания функционалов I и δW^{v}, фиксирующих конкретную модель оболочки.

В качестве определяющих параметров сверхпроводящей оболочки введем следующий набор функций: $v^a(\xi^b, t)$ — контравариантные компоненты скорости точек среды, $\gamma_{ab}(\xi^c, t)$ — ковариантные компоненты метрического тензора, $s(\xi^a, t)$ — массовую плотность энтропии, $E_a(\xi^b, t)$ — ковариантные компоненты напряженности электрического поля, $B^a(\xi^b, t)$ — контравариантные компоненты индукции магнитного поля, $\psi(\xi^a, t)$ — макроскопическую комплексную скалярную волновую функцию сверхпроводящих носителей заряда, $D\psi = \partial\psi/\partial t + i(2e/\hbar)\varphi\psi$ и $D_a\psi = \nabla_a\psi - i(2e/\hbar c)A_a\psi$ — ковариантные производные волновой функции относительно калибровочного и координатного преобразований в пространстве с метрическим тензором $\gamma_{ab}(\xi^c, t)$, $\rho_n(\xi^a, t)$ — массовую плотность нормальных носителей заряда, $j^a_n(\xi^b, t)$ — массовую плотность нормальной составляющей электрического тока проводимости. Через $\varphi(\xi^a, t)$ и $A_a(\xi^b, t)$ здесь обозначены потенциал электрического поля и ковариантные компоненты потенциала магнитного поля, $2e$ — элементарный заряд бозонного поля $\psi(\xi^a, t)$, $\hbar$ — постоянная Планка, c — скорость света в вакууме, ξ^a и t — лагранжевы координаты и время в сопутствующей системе отсчета с актуальным базисом $\mathbf{e}_a$, латинские индексы первой половины алфавита $a, b, c, \ldots$ относятся к лагранжевой системе координат и принимают значения 1, 2, 3.

Введенные параметры, однако, несмотря на их очевидную физичность, не образуют систему независимых функций. Например, напряженность электрического поля $E_a(\xi^b, t)$ и индукция магнитного поля $B^a(\xi^b, t)$ связаны уравнениями Максвелла

$$\varepsilon^{abc}\nabla_b E_c = -\frac{1}{c\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}B^a), \quad \nabla_a B^a = 0 \qquad (1.2)$$

а плотности энтропии $s(\xi^a, t)$, потока энтропии $s^a(\xi^b, t)$, заряда $\rho_n(\xi^a, t)$ и электрического тока $j^a_n(\xi^b, t)$ удовлетворяют уравнениям баланса

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla_a s^a = \sigma, \quad \rho \frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \nabla_a j^a_{(n)} = r \tag{1.3}$$

Здесь $\rho(\xi^a, t)$ — собственная плотность массы покоя оболочки, $j^a_{(n)} = \rho j^a_n$, $\sigma(\xi^a, t)$ — локальная скорость изменения энтропии, $r(\xi^a, t)$ — локальная скорость изменения заряда нормальных и сверхпроводящих квазичастиц, $\gamma(\xi^a, t)$ — определитель метрического тензора. Переходя от функций $E_a(\xi^b, t)$, $b^a(\xi^b, t)$ к потенциалам $\varphi(\xi^a, t)$, $A_a(\xi^b, t)$ по формулам

$$E_a = -\nabla_a\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A_a}{\partial t}, \quad B^a = \varepsilon^{abc}\nabla_b A_c \tag{1.4}$$

где ε^{abc} — тензор Леви-Чивита, мы, во-первых, удовлетворяем уравнениям (1.2) тождественно, а во-вторых, имеем независимые определяющие параметры $\varphi(\xi^a, t)$, $A_a(\xi^b, t)$.

С помощью параметрических представлений для величин ρ_n, j^a_n, r и s, s^a, σ:

$$\rho_n = -\frac{1}{\rho}\nabla_a\left(\frac{\chi^a}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{1}{\rho\sqrt{\gamma}}\chi, \quad j^a_{(n)} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial \chi^a}{\partial t}, \quad r = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{1.5}$$

$$s = -\frac{1}{\rho}\nabla_a\left(\frac{\eta^a}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{1}{\rho\sqrt{\gamma}}\eta, \quad s^a = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial \eta^a}{\partial t}, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial \eta}{\partial t} \tag{1.6}$$

уравнения баланса (1.3) также удовлетворяются тождественно, а параметры производства и переноса энтропии $\eta(\xi^a, t), \eta^a(\xi^b, t)$ и параметры изменения и переноса заряда нормальных квазичастиц $\chi(\xi^a, t), \chi^a(\xi^b, t)$ образуют систему независимых функций.

Представление процессов тепло- и электропроводности через параметры $\eta, \eta^a, \chi, \chi^a$ аналогично введенному в [10] параметру переноса энтропии. Использование этих параметров позволяет получить из вариационного уравнения (1.1) краевые условия для теплового и электромагнитного полей. В противном случае краевые условия должны быть заданы на основе дополнительных физических соображений. Учет локальной скорости изменения заряда нормальных и сверхпроводящих квазичастиц $r(\xi^a, t)$ обусловлен следующими соображениями. В неравновесном состоянии между электронными возбуждениями и конденсатом куперовских пар имеется тесная связь. Переход нормальных электроноподобных квазичастиц из одного энергетического состояния в другое сопровождается изменением их заряда на величину изменения заряда сверхпроводящих электронов. Именно поэтому для учета взаимодействия нормальной и сверхпроводящей электронных подсистем и введена функция $r(\xi^a, t)$.

2. Представим действие I и функционал δW^v в виде

$$I = \int_{t_1}^{t_2}\int_V L\rho\sqrt{\gamma}\,d^3\xi\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \Big\{ \frac{1}{8\pi\rho}(E_aE^a - B_aB^a) - \rho_n\varphi + \frac{1}{c}j^a_n A_a +$$
$$+ 1/2\, v_a v^a - U(\varepsilon_{ab}, s, \psi, D_a\psi, D\psi, *)\Big\}\rho\sqrt{\gamma}\,d^3\xi\,dt \tag{2.1}$$

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \Big\{ (T\delta\eta + H_a\delta\eta^a + X_a\delta\chi + X_a\delta\chi^a)\frac{1}{\sqrt{\gamma}} + \rho\,(Q^a - N^a)\,\delta x_a +$$
$$+\rho\,(\Psi\delta\psi^* + \Psi^*\delta\psi)\Big\}\sqrt{\gamma}\,d^3\xi\,dt, \quad \rho N^a = \frac{\partial G^a}{\partial t}, \quad G^a = \frac{1}{4\pi c}\varepsilon^{abc}E_bB_c \tag{2.2}$$

где T — термодинамическая температура, Q^a — компоненты внешних массовых сил неэлектромагнитной природы, N^a — компоненты вектора массовых сил электромагнитного происхождения, возникающие вследствие изменения импульса электромагнитного поля, G^a — компоненты вектора плотности импульса электромагнитного поля, $H_a, X_a, X, \Psi, \Psi^*$ — обобщенные термодинамические силы, соответствующие необратимым процессам теплопроводности, электропроводности и релаксации нормальной и сверхпроводящей электронных подсистем, звездочкой * отмечены комплексно-сопряженные величины.

Поставляя выражения (2.1), (2.2) в уравнение (1.1) и вычисляя вариацию действия I, получим

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V\Big\{\Big[\frac{1}{4\pi}\nabla_a E^a-\rho_{(n)}-\rho_{(s)}\Big]\delta\varphi+\Big[\frac{1}{4\pi c\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}E^a)-\frac{1}{4\pi}\varepsilon^{abc}\nabla_b B_c+$$
$$+\frac{1}{c}\rho\,(j^a_n+j^a_s)\Big]\delta A_a+\Big(T-\frac{\partial U}{\partial s}\Big)\frac{\delta\eta}{\sqrt{\gamma}}+(X-\varphi)\frac{\delta\chi}{\sqrt{\gamma}}+\Big[H_a-\nabla_a\Big(\frac{\partial U}{\partial s}\Big)\Big]\frac{\delta\eta^a}{\sqrt{\gamma}}+$$
$$+(X_a+E_a)\frac{\delta\chi^a}{\sqrt{\gamma}}+\rho\Big(\Psi^*-\frac{\delta U}{\delta\psi}\Big)\delta\psi+\rho\Big(\Psi-\frac{\delta U}{\delta\psi^*}\Big)\delta\psi^*+$$
$$+\Big[\nabla_b T^{ab}+\rho\,(Q^a-N^a)-\rho\Big(\frac{\partial v^a}{\partial t}+v^b\nabla_b v^a\Big)\Big]\delta x_a\Big\}\sqrt{\gamma}\,d^3\xi dt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_S\Big\{\frac{1}{4\pi}\varepsilon^{abc}B_c\delta A_a+\varphi\frac{\delta\chi^b}{\sqrt{\gamma}}+\frac{\partial U}{\partial s}\frac{\delta\eta_b}{\sqrt{\gamma}}-\frac{1}{4\pi}E^b\delta\varphi-\rho\Big(\frac{\partial U}{\partial\nabla_b\psi}\delta\psi+\frac{\partial U}{\partial\nabla_b\psi^*}\delta\psi^*\Big)-$$
$$-T^{ab}\delta x_a\Big\}n_b dS\,dt+\Big[\int_V\Big\{-\frac{1}{4\pi c}E^a\delta A_a+$$
$$+\frac{1}{c}A_a\frac{\partial\chi^a}{\sqrt{\gamma}}-\rho\Big(\frac{\partial U}{\partial\dot\psi}\delta\psi+\frac{\partial U}{\partial\dot\psi^*}\delta\psi^*\Big)+\rho v^a\delta x_a\Big\}\sqrt{\gamma}\,d^3\xi\Big]_{t_1}^{t_2}+\delta W=0 \tag{2.3}$$

Здесь введено обозначение для тензора импульса системы сверхпроводящая среда — электромагнитное поле

$$T^{ab}=\sigma^{ab}+T^{ab}_{(M)}=\rho\frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{ab}}+\frac{1}{4\pi}\Big[E^aE^b+B^aB^b-\frac{1}{2}(E^2+B^2)\gamma^{ab}\Big] \tag{2.4}$$

в котором $T^{ab}_{(M)}$ — компоненты тензора напряжений Максвелла, совпадающие с точностью до знака с пространственными компонентами тензора энергии-импульса Минковского, а σ^{ab} — компоненты второго тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа [3, 5, 9].

Приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях определяющих параметров в вариационном уравнении (2.3), получим динамические уравнения Эйлера

$$\nabla_a E^a=4\pi\rho\,(\rho_n+\rho_s) \tag{2.5}$$

$$\varepsilon^{abc}\nabla_b B_c=\frac{4\pi}{c}\rho\,(j^a_n+j^a_s)+\frac{1}{c\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}\,E^a) \tag{2.6}$$

$$\rho_{(s)}=\rho\rho_s=\rho\,\partial U/\partial\varphi,\quad j^a_{(s)}=\rho j^a_s=-\rho c\partial U/\partial A_a \tag{2.7}$$

$$T=\partial U/\partial s,\quad X=\varphi,\quad H_a=\nabla_a T,\quad X_a=-E_a \tag{2.8}$$

$$\Psi^*=\delta U/\delta\psi,\quad \Psi=\delta U/\delta\psi^* \tag{2.9}$$

$$\frac{\delta U}{\delta\psi} = \frac{\partial U}{\partial\psi} - \frac{1}{\rho}\nabla_a\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\nabla_a\psi}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial\dot\psi}, \quad \dot\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{2.10}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v^a}{\partial t} + v^b\nabla_b v^a\right) = \nabla_b T^{ab} - \rho N^a + \rho Q^a \tag{2.11}$$

$$\nabla_b T^{ab}_{(M)} - \rho N^a = \rho\,(\rho_n + \rho_s)\,E^a + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{abc}\,[j_{(n)b} + j_{(s)b}]\,B_c \tag{2.12}$$

Система уравнений (2.5), (2.6) — вторая пара уравнений Максвелла для электромагнитного поля в сверхпроводящей оболочке. Соотношения (2.7) определяют динамическое распределение заряда и плотности тока сверхпроводящих квазичастиц. Первые два уравнения системы (2.8) определяют абсолютную температуру оболочки и обобщенную термодинамическую силу X, связанную с локальным изменением заряда квазичастиц. Оставшиеся уравнения (2.8) после подстановки в них выражений для H_a и X_a можно рассматривать как законы теплопроводности Фурье и электропроводности Ома. Система уравнений (2.9), (2.10) описывает динамику сверхпроводящей электронной подсистемы. После задания плотности внутренней энергии U эти уравнения могут представлять классические или модифицированные уравнения Гинзбурга-Ландау [3, 13]. Уравнение (2.11) является уравнением баланса импульса сверхпроводящей оболочки, в котором слагаемые (2.12) определяют пондеромоторную силу Лоренца.

Задавая функционал δW равенством $\delta W = \delta W_0$, где

$$\delta W_0 = -\int_{t_1}^{t_2}\int_S\left\{\frac{1}{4\pi}\varepsilon^{abc}B^0_c\delta A_a + \varphi_0\frac{\delta\chi^b}{\sqrt\gamma} + T_0\frac{\delta\eta^b}{\sqrt\gamma} - \frac{1}{4\pi}E^b_0\delta\varphi - \right.$$
$$\left. - \rho\Gamma^b(\psi_0\delta\psi^* + \psi_0^*\delta\psi) - T^{ab}_0\delta x_a\right\} n_b\, dS\, dt -$$
$$-\left[\int_V\left\{\rho v^{\vee a}\delta x_a + \frac{1}{c}A^{\vee}_a\frac{\delta\chi^a}{\sqrt\gamma} - \frac{1}{4\pi c}E^{\vee a}\delta A_a\right\}\sqrt\gamma\, d^3\xi\right]_{t_1}^{t_2} \tag{2.13}$$

из вариационного уравнения (2.3) получим альтернативные граничные условия при $x^a \in S$:

$$(E^b - E^b_0)\,n_b\delta\varphi = 0, \quad \varepsilon^{abc}n_b\,(B_c - B^0_c)\,\delta A_a = 0 \tag{2.14}$$

$$(\varphi - \varphi_0)\frac{\delta\chi^b}{\sqrt\gamma}n_b = 0, \quad (T - T_0)\frac{\delta\eta^b}{\sqrt\gamma}n_b = 0 \tag{2.15}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial\nabla_b\psi^*} + \Gamma^b\psi_0\right)n_b\delta\psi^* = 0, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial\nabla_b\psi} + \Gamma^b\psi^*_0\right)n_b\delta\psi = 0 \tag{2.16}$$

а также предельные или начальные условия при

$$(E^a - E^{\vee a})\,\delta A_a = 0, \quad (A_a - A^{\vee}_a)\,\delta\chi^a/\sqrt\gamma = 0 \tag{2.17}$$

$$\rho\,(v^a - v^{\vee a})\,\delta x_a = 0, \quad \delta\psi = 0, \quad \delta\psi^* = 0 \tag{2.18}$$

Здесь Γ^a — феноменологические постоянные, которые могут принимать положительные или отрицательные значения в зависимости от того, способствует граница возникновению сверхпроводимости или нет [11].

Для фиксирования конкретной модели сверхпроводящей оболочки вместо внутренней энергии U удобнее задавать массовую плотность свободной энергии F в соответствии с преобразованием Лежандра $F = U - Ts$. Подставляя

$U = F + Ts$ в выражения для $\sigma^{ab} = \rho\, \partial U/\partial \varepsilon_{ab}$ и $T = \partial U/\partial s$, получим определяющие уравнения в виде

$$\sigma^{ab} = \rho\,(\partial F/\partial \varepsilon_{ab})_{T,\psi}, \quad s = -\,(\partial F/\partial T)_{\varepsilon,\psi} \tag{2.19}$$

3. Построим определяющие уравнения, описывающие упругопластическое деформирование сверхпроводящей оболочки как трехмерного тела в предположении, что свободная энергия зависит только от двух первых инвариантов тензора деформаций. В соответствии с общей теорией фазовых переходов второго рода [12] модифицируем введенную в [11, 13] плотность свободной энергии сверхпроводящей оболочки следующим образом

$$F = F_n(\varepsilon, \varepsilon_i, T) - A(\varepsilon, \varepsilon_i, T)\,|\psi|^2 + \tfrac{1}{2} B(\varepsilon, \varepsilon_i, T)\,|\psi|^4 - \\ - i\frac{h}{2}(\psi^* D\psi - \psi D^*\psi^*) + \left(\frac{h}{2m} - C\,|\psi|^2\right)|D_a\psi|^2 \tag{3.1}$$

где F_n — массовая плотность свободной энергии в нормальном, несверхпроводящем состоянии, $A \geq 0$ и $B > 0$ — коэффициенты разложения свободной энергии в ряд по параметру упорядочения электронной подсистемы $\psi(\xi^a, t)$ при $T < T_c$, $T_c(\varepsilon, \varepsilon_i)$ — критическая температура сверхпроводящего перехода, ε — средняя деформация, ε_i — интенсивность деформаций, m — эффективная масса носителей сверхпроводящего тока.

Подставляя выражение (3.1) в (2.9), получим обобщенное уравнение Гинзбурга — Ландау [2, 3]:

$$(\nu - ih)\,D\psi = \frac{1}{\rho} D_a\left[\rho\left(\frac{h^2}{2m} - C\,|\psi|^2\right) D^a\psi\right] + \\ + A(\varepsilon, \varepsilon_i, T)\,\psi - B(\varepsilon, \varepsilon_i, T)\,|\psi|^2\psi + C\,|D_a\psi|^2\psi \tag{3.2}$$

Уравнение для $\psi^*(\xi^a, t)$ получается из (3.2) комплексным сопряжением. Первое слагаемое в левой части уравнения (3.2) отвечает за релаксационные свойства сверхпроводящих электоронов; второе — учитывает волновые свойства конденсата куперовских пар электронов. Влияние этих слагаемых на динамику сверхпроводящих электронов можно объяснить следующими соображениями. В обычных низкотемпературных сверхпроводниках размеры куперовских пар превышают расстояние между самими парами на два-три порядка [13]. Поэтому имеется сильное перекрытие волновых функций пар, увеличивающее жесткость макроскопической волновой функции $\psi(\xi^a, t)$. При этом в уравнении (3.2) должно доминировать слагаемое $\nu D\psi$. С другой стороны, эксперименты на новых металлооксидных сверхпроводниках указывают на весьма малую длину когерентности сверхпроводящих электронов ~10Å м, следовательно, на малый размер куперовских пар [11, 14, 15]. В то же время, концентрация носителей сверхпроводящего тока составляет примерно один электрон на две ячейки кристалла, содержащие в иттриевых керамиках 26 разнозарядных ионов. При этих условиях волновые функции сверхпроводящих пар электронов перекрываются слабо и единая волновая функция конденсата должна обладать значительной податливостью. Поэтому в уравнении (3.2) будет доминировать слагаемое $i\hbar D\psi$. Учет этого слагаемого определяет существование волновых эффектов в электронной сверхпроводящей подсистеме и может приводить к усилению сверхпроводимости за счет динамического взаимодействия конденсата с кристаллической решеткой.

Подставим плотность свободной энергии (3.1) в первое уравнение (2.19) и учтем, что $\varepsilon = \tfrac{1}{3}\gamma_{ab}\varepsilon^{ab}$, $\varepsilon_i = [\tfrac{2}{3}\varepsilon_{ab}{}^{\vee}\varepsilon^{\vee\, ab}]^{1/2}$, $\varepsilon_{ab}{}^{\vee} = \varepsilon_{ab} - \varepsilon\gamma_{ab}$. В результате получим формулу для тензора напряжений в свреxпроводящей оболочке в форме определяющих уравнений теории нелинейно упругих тел или упругопластических тел при активном нагружении [4, 5]:

$$\sigma^{ab} = \sigma\gamma^{ab} + \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon^{ab} - \varepsilon\gamma^{ab}) \tag{3.3}$$

$$\sigma = \sigma^{(n)} - \frac{1}{3}\rho\,|\psi|^2\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon} - \frac{1}{2}|\psi|^2\frac{\partial B}{\partial\varepsilon}\right), \quad \sigma_i = \sigma^{(n)} - \rho\,|\psi|^2\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_i} - \frac{1}{2}|\psi|^2\frac{\partial B}{\partial\varepsilon_i}\right)$$

$$\sigma^{(n)} = (\rho/3)\,\partial F_n/\partial\varepsilon, \quad \sigma_i^{(n)} = \rho\,\partial F_n/\partial\varepsilon_i$$

Здесь $\sigma = 1/3\,\gamma_{ab}\sigma^{ab}$ — среднее гидростатическое напряжение, $\sigma_i = [3/2\,\sigma^{\vee}_{ab}\sigma^{\vee ab}]^{1/2}$ — интенсивность напряжений, $\sigma^{\vee}_{ab} = \sigma_{ab} - \sigma\gamma_{ab}$, индексом n отмечены величины в нормальном состоянии.

Для того, чтобы соотношения между напряжениями и деформациями (3.3) были вполне определены, необходимо построить функции $\sigma^{(n)}(\varepsilon, \varepsilon_i, T)$, $\sigma_i^{(n)}(\varepsilon, \varepsilon_i, T)$, $A(\varepsilon, \varepsilon_i, T)$, $B(\varepsilon, \varepsilon_i, T)$, удовлетворяющие уравнению связи

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_i}\right)_T = \frac{\partial}{\partial\varepsilon_i}\left(\frac{\partial F}{\partial\varepsilon}\right)_T \quad \text{или} \quad 3\frac{\partial}{\partial\varepsilon_i}\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)_T = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\sigma_i}{\rho}\right)_T \tag{3.4}$$

Уравнение состояния $\sigma^{(n)} = \sigma^{(n)}(\varepsilon, \varepsilon_i, T)$ можно построить на основе экспериментов по квазистатическому объемному нагружению или по измерениям на ударной волне [4, 5]. Функция $\sigma_i^{(n)} = \sigma_i^{(n)}(\varepsilon, \varepsilon_i, T)$ может быть найдена с помощью комбинированных опытов на кручение, растяжение и гидростатическое давление цилиндрических оболочек при заданной температуре [4, 5]. Феноменологические функции $A(\varepsilon, \varepsilon_i, T)$, $B(\varepsilon, \varepsilon_i, T)$ можно определить на основе электромагнито-механических экспериментов при заданной температуре по следующей схеме.

Равновесное значение волновой функции ψ_0 определяется из уравнения (3.2) или, что то же самое, из уравнения $\partial F/\partial|\psi|^2 = 0$ при $D\psi = 0$, $D_a\psi = 0$, т. е. $|\psi_0|^2 = A/B > 0$. Разность свободных энергий в нормальном и сверхпроводящем состоянии сверхпроводника при $\psi = \psi_0$ равна $F_n - F(\psi_0) = A^2/2B > 0$. Но эта же разность в равновесном состоянии определяется соотношением $\rho[F_n - F(\psi_0)] = H^2_{cm}(8\pi)^{-1}$ [16], где H_{cm} — термодинамическое критическое магнитное поле. Отсюда имеем $H^2_{cm} = 4\pi\rho A^2/B$. Введем следующие обозначения для длины когерентности сверхпроводящих электронов ξ и глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник λ:

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2mA}, \quad \lambda^2 = \frac{mc^2B}{16\pi e^2\rho A}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\xi}, \quad \beta = \left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2 \tag{3.5}$$

Учитывая, что термодинамическое критическое магнитное поле H_{cm} связано со вторым критическим магнитным полем H_{c2} формулой $H^2_{c2} = 2\kappa^2H^2_{cm}$ [16], функции A, B можно представить в виде

$$A^2(\varepsilon, \varepsilon_i, T) = \beta H^2_{c2}(\varepsilon, \varepsilon_i, T), \quad B(\varepsilon, \varepsilon_i, T) = 8\pi\beta\rho\kappa^2(\varepsilon, \varepsilon_i, T) \tag{3.6}$$

Величина H_{c2} легко определяется по изменению кривой электрического сопротивления от температуры. При этом длина когерентности ξ оценивается из формулы $\Phi_0 = 2\pi\xi^2H_{c2}$, где $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$ — квант магнитного потока. Чем выше критическое магнитное поле H_{c2}, тем меньше длина когерентности и, следовательно, размер куперовских пар. Глубина проникновения λ может быть измерена из оценки восприимчивости на переменном токе с использованием СВЧ-техники или на постоянном токе с использованием сверхпроводящих квантовых интерферометров [16]. Таким образом, и величина $\kappa = \lambda/\xi$ также хорошо определяется из экспериментов. Поэтому для оценки феноменологических функций $A(\varepsilon, \varepsilon_i, T)$, $B(\varepsilon, \varepsilon_i, T)$ достаточно использовать зависимости (3.6).

В равновесном состоянии $|\psi|^2 = |\psi_0|^2 = A/B$ и $F = F_n - A^2/2B$. Поэтому функции $\sigma = \sigma^{(n)} - (\rho/3)\partial(A^2/2B)/\partial\varepsilon$, $\sigma_i = \sigma_i^{(n)} - \rho\partial(A^2/2B)/\partial\varepsilon_i$ зависят только от $\varepsilon, \varepsilon_i, T$. Предположим, что в нормальном состоянии функция $\sigma^{(n)}(\varepsilon, \varepsilon_i, T)$ имеет вид $\sigma^{(n)} = (\rho/\rho_0)\,\sigma^{\vee(n)}(\varepsilon, T)$. Тогда из уравнения (3.4) следует, что $\sigma_i^{(n)} = (\rho/\rho_0)\sigma_i^{\vee(n)}(\varepsilon_i, T)$, а функции A, B могут зависеть от $\varepsilon, \varepsilon_i, T$ произвольным образом. Аппроксимируя $A^2(\varepsilon, \varepsilon_i, T)$ и $B(\varepsilon, \varepsilon_i, T)$ рядами Тейлора

$$A^2 = \sum_{k,l,m} a_{klm}\varepsilon^k\varepsilon_i^{2l}\theta^m, \quad B = \sum_{k,l,m} b_{klm}\varepsilon^k\varepsilon_i^{2l}\theta^m \tag{3.7}$$

коэффициенты разложения a_{klm} и b_{klm} определим с помощью экспериментальных соотношений (3.6):

$$a_{klm} = \beta\,(k\,!\,2l\,!\,m\,!\,)^{-1}\,\partial^{k+2l+m}\,(H_{c2}^2)_0/\partial\varepsilon^k\,\partial\varepsilon_i^{2l}\,\partial\theta^m$$

$$b_{klm} = 8\pi\beta\,(k\,!\,2l\,!\,m\,!\,)^{-1}\,\partial^{k+2l+m}\,(\rho\kappa^2)_0/\partial\varepsilon^k\,\partial\varepsilon_i^{2l}\,\partial\theta^m \tag{3.8}$$

Здесь $\theta = T_c^0 - T$, T_c^0 — критическая температура сверхпроводящего перехода в отсутствие деформаций, индекс нуль указывает, что производные берутся при $\varepsilon = \varepsilon_i = \theta = 0$; коэффициенты $a_{klm} = 0$ при $k = l = 0$, $m = 0{,}1$ в соответствии с определением $A(\theta) = \mathrm{sgn}(\theta)|A(\theta)| \sim \theta$ [12, 13], а также в силу того, что кривизна $\partial^2 H_{c2}/\partial\theta^2 \sim \partial^2 A/\partial\theta^2$ при $T \lessgtr T_c^0$ должна быть неотрицательной [11, 15].

Влияние сверхпроводимости на термомеханические характеристики оболочки в равновесном состоянии рассмотрим на примере функции $F = F_n - A^2/2B$. Разложим дробь $A^2/2B = (1/8\pi)H_{c2}^2/\rho\kappa^2$ в ряд Тейлора по инвариантам $\varepsilon, \varepsilon_i$ и ограничимся квадратичным приближением

$$F(\varepsilon, \varepsilon_i, T) = F_n(\varepsilon, \varepsilon_i, T) - a_1(\theta) + (9K/\rho_0)\alpha\theta a_2(\theta)\,\varepsilon +$$
$$+ (9K/2\rho_0)\,a_3(\theta)\,\varepsilon^2 + (3G/2\rho_0)\,a_4(\theta)\,\varepsilon_i^2, \quad a_j(\theta) = \sum_{k=0} a_{jk}\theta^k \tag{3.9}$$

где $K(T_c^0)$ — модуль объемного сжатия, $\alpha(T_c^0)$ — коэффициент температурного расширения, $G(T_c^0)$ — модуль сдвига; $a_{10} = 0$, $a_{11} = 0$ в соответствии с замечаниями о коэффициентах a_{klm}.

Подставляя (3.9) в (3.3) и полагая, что $\sigma^{\vee(n)}(\varepsilon, T) = 3K(\varepsilon + \alpha\theta)$, получим формулы для функций σ и σ_i в сверхпроводящем состоянии

$$\sigma = (3K\rho/\rho_0)\{[1 + a_3(\theta)]\varepsilon + \alpha\,[1 + a_2(\theta)]\theta\} \tag{3.10}$$

$$\sigma_i = (\rho/\rho_0)[\sigma_i^{\vee(n)} + 3Ga_4(\theta)\,\varepsilon_i] \tag{3.11}$$

Отсюда видно, что функции $a_3(\theta)$ и $a_4(\theta)$ могут описывать не только скачки касательных модулей $\Delta\,\partial\sigma/\partial\varepsilon$, $\Delta\,\partial\sigma_i/\partial\varepsilon_i$ при переходе в сверхпроводящее состояние, но и температурные осцилляции этих модулей вблизи T_c^0 [15]. Использование зависимости $A^2 = \beta H_{c2}^2(\varepsilon, \varepsilon_i, T)$ позволяет получить необходимую гибкость при согласовании знаков касательных модулей в теории и эксперименте. Функции $a_2(\theta)$, $a_3(\theta)$ описывают увеличение коэффициента температурного расширения при переходе в сверхпроводящее состояние.

Из выражения (3.9) можно также получить формулы для массовой плотности энтропии s и теплоемкости c_ε при постоянной деформации. В линейном по ε приближении они имеют вид

$$s = -\frac{\partial F}{\partial T} = s_n - \frac{\partial a_1}{\partial\theta} + \frac{9K\alpha}{\rho_0}\left(a_2 + \theta\,\frac{\partial a_2}{\partial\theta}\right)\varepsilon \tag{3.12}$$

$$c_\varepsilon = T\frac{\partial s}{\partial T} = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = c_\varepsilon^{(n)} + T\frac{\partial^2 a_1}{\partial \theta^2} - \frac{9KT\alpha}{\rho_0}\left(\frac{\partial a_2}{\partial \theta} + \theta\frac{\partial^2 a_2}{\partial \theta^2}\right)\varepsilon \tag{3.13}$$

Учитывая, что главные члены разложения функций $a_{1,2}(\theta)$ в ряды по степеням θ соответственно равны $a_1(\theta) = a_{12}\theta^2 \geq 0$, $a_2(\theta) = a_{20} > 0$, из формул (3.12), (3.13) следуют важные выводы.

Так как энтропия в сверхпроводящем состоянии s меньше, чем в нормальном s_n, то сверхпроводящее состояние является более упорядоченным. Это состояние характеризуется согласованным когерентным поведением электронной подсистемы, которую можно рассматривать как одну из компонент многофазной сплошной среды. Переход в сверхпроводящее состояние деформированного сверхпроводника происходит при температуре $T_c(\varepsilon, \varepsilon_i)$, определяемой условиями $F = F_n$, $s = s_n$ или $A(\varepsilon, \varepsilon_i, T) = 0$ [11, 13, 16]. В линейном по ε приближении из (3.9) или (3.12) получим $T_c(\varepsilon) \doteq T_c^0 - (9K\alpha a_{20}/a_{10}\rho_0)\varepsilon$, причем фазовый переход при этой температуре происходит без поглощения или выделения тепла, так как $s(T_c) = s_n(T_c)$. Теплоемкость же при $T = T_c(\varepsilon)$ испытывает скачок, величина которого равна $\Delta c_\varepsilon = 2a_{12}T_c(\varepsilon) > 0$.

Отметим, что сжатие сверхпроводника ($\varepsilon < 0$) увеличивает температуру сверхпроводящего перехода $T_c(\varepsilon) > T_c^0$. Использование этого эффекта для увеличения локального внутреннего давления путем замещения лантана иттрием в металлооксидных керамиках позволило повысить температуру сверхпроводящего перехода с $T_c = 36K$ до $T_c = 92K$ [14].

4. Выведем линеаризованные уравнения упругопластического деформирования сверхпроводящих оболочек. Пусть условия охлаждения сверхпроводника таковы, что весь ток переносится сверхпроводящими электронами, т. е. джоулево тепловыделение отсутствует. Предположим, что волновая функция $\psi(\xi^a, t)$ равна равновесному значению ψ_0 и, следовательно, влиянием электронно-механической силы [2, 3] в уравнении баланса импульсов (2.11) можно пренебречь. Составляющая $\rho(\rho_n + \rho_s)E^a$ пондеромоторной силы может быть принята равной нулю в силу условия электронейтральности, которое связано со спецификой сверхпроводников как металлов. Предположим также, что выполняются все гипотезы нелинейной теории пологих оболочек [6].

Разложим виртуальные перемещения $\delta\kappa_a$ в степенной ряд по нормальной координате $\xi^3 = z$:

$$\delta x_a = \delta u_a = A_a^b \delta u_b^0 = (\delta_a^b + \nabla_a^0 u_0^b)\sum_{k=0}^{N} z^k \delta u_b^{0(k)} \tag{4.1}$$

подставим их в вариационное уравнение (2.3) и проинтегрируем результат по толщине оболочки. В итоге получим рекуррентную систему уравнений движения

$$\overset{2}{\nabla}{}_\beta^0 P_{(k)}^{\alpha\beta} - kP_{(k-1)}^{\alpha3} - b_{\alpha\beta}^0 P_{(k)}^{\alpha\beta}\delta_3^a + [T^{a3}z^k]_-^+ +$$
$$+ \sum_{l=0}^{N} \overset{2}{\nabla}{}_\alpha^0 (P_{(k+l)}^{\alpha\beta} \overset{2}{\nabla}{}_\beta^0 u_0^{3(l)})\,\delta_3^a + \rho_0 Q_{(k)}^a - \rho_0 \sum_{l=0}^{N} h_{(k+l)} \frac{\partial^2 u_0^{a(l)}}{\partial t^2} = 0 \tag{4.2}$$

$$P_{(k)}^{ab} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{ab} z^k\, dz, \quad Q_{(k)}^a = q^a + \int_{-h/2}^{h/2} (F^a + z\nabla_\alpha F^\alpha \delta_3^a)\, z^k\, dz \tag{4.3}$$

Здесь $\overset{2}{\nabla}{}_\alpha^0$ — ковариантная производная в метрике $a_{\alpha\beta}^0$ недеформированной срединной поверхности оболочки, q^a — компоненты вектора внешних сил механической природы, $F^a = 1/c\, \varepsilon^{abc}\, [j_{b(n)} + j_{b(s)}]\, B_c$ — компоненты вектора пондеромоторных сил, h — толщина оболочки, u_0^α — компоненты вектора перемещений в проекциях на оси недеформированного базиса $\mathbf{e}_\alpha^0$ лагранжевой системы координат, $b_{\alpha\beta}^0$ — компоненты второго фундаментального тензора срединной поверхности оболочки; греческие индексы принимают значения 1, 2.

Предположим, что внешние нагрузки, действующие на оболочку, образуют случайное однородное и стационарное гауссовское поле. Представим вектор внешней термомеханической нагрузки, пондеромоторных сил и сил инерции в виде $Q^\alpha(\xi^\alpha, t) = Q_0^\alpha + Q_*^\alpha(\xi^\alpha, t)$, где Q_0^α — математическое ожидание векторного поля $Q^\alpha(\xi^\alpha, t)$, $Q_*^\alpha(\xi^\alpha, t)$ — флуктуационная составляющая; звездочкой здесь и ниже будем обозначать случайные возмущения. При таком представлении напряжения и деформации в оболочке можно записать в виде $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^0 + \sigma_{\alpha\beta}^*$, $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^0 + \varepsilon_{\alpha\beta}^*$, где $\sigma_{\alpha\beta}^0$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$ — соответствуют безмоментному, вообще говоря, упругопластическому состоянию, а $\sigma_{\alpha\beta}^*(\xi^\alpha, t)$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^*(\xi^\alpha, t)$ — определяют моментные, изгибные напряжения и деформации. В дальнейшем, без ограничения общности, будем считать напряженно-деформированное состояние $\sigma_{\alpha\beta}^0(Q_0^\alpha, T, |\psi_0|^2)$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^0(Q_0^\alpha, T, |\psi_0|^2)$ известно. Связь между флуктуациями напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^*$ и деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}^*$ определим с помощью физических соотношений (3.10), (3.11) при условии механической несжимаемости материала облолочки и использовании гипотезы $\sigma^{33} = 0$ [4]:

$$\sigma_{\alpha\beta} = (2\sigma_i/3\varepsilon_i)\,[(a_{\alpha\beta}^0 a_{\gamma\delta}^0 + a_{\alpha\gamma}^0 a_{\beta\delta})\,\varepsilon^{\gamma\delta} + 3\alpha_s\theta a_{\alpha\beta}^0] \tag{4.4}$$

где $a_{\alpha\beta}^0$ — первый фундаментальный тензор срединной поверхности оболочки, $\alpha_s(\theta) = \alpha(T_c^0)(1 + a_2)(1 + a_3)^{-1}$ — коэффициент температурного расширения в сверхпроводящем состоянии.

Разложим напряжения $\sigma_{\alpha\beta}(\xi^\alpha, t)$ в ряд Тейлора в окрестности $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon_{\gamma\delta}) = \sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon_{\gamma\delta}^0) + \frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon_{\gamma\delta}^0)}{\partial\varepsilon_{\kappa\lambda}}\varepsilon_{\kappa\lambda}^* + \ldots \tag{4.5}$$

и подставим сюда выражения (4.4). Ограничиваясь линейными слагаемыми, получим линеаризованные соотношения между флуктуациями напряжений и деформаций

$$\sigma_*^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\gamma\delta}^*, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^* = e_{\alpha\beta}^* - z\kappa_{\alpha\beta}^* \tag{4.6}$$

$$E_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{2\sigma_i^0}{3\varepsilon_i^0}(a_{\alpha\beta}^0 a_{\gamma\delta}^0 + a_{\alpha\gamma}^0 a_{\beta\delta}^0) - \left[\frac{\sigma_i^0}{\varepsilon_i^0} - \frac{\partial\sigma_i(\varepsilon_i^0)}{\partial\varepsilon_i}\right]\frac{\sigma_{\alpha\beta}^0\sigma_{\gamma\delta}^0}{(\sigma_i^0)^2} \tag{4.7}$$

$$e_{\alpha\beta}^* = 1/2\,(\nabla_\alpha w_\beta^* + \nabla_\beta w_\alpha^*) + b_{\alpha\beta}^0 w_*, \quad \kappa_{\alpha\beta}^* = \nabla_\alpha\nabla_\beta w_*, \quad w_* = u_0^{3(1)} \tag{4.8}$$

$$\sigma_i^0 = [(\sigma_{11}^0)^2 - \sigma_{11}^0\sigma_{22}^0 + (\sigma_{22}^0)^2 + 3\,(\sigma_{12}^0)^2]^{1/2}, \quad \varepsilon_i = 2/\sqrt{3}\,[(\varepsilon_{11}^0)^2 +$$
$$+ \varepsilon_{11}^0\varepsilon_{22}^0 + (\varepsilon_{22}^0)^2 + (\varepsilon_{12}^0)^2 + 3\alpha_s\theta\,(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) + 3\,(\alpha_s\theta)^2]^{1/2} \tag{4.9}$$

Поскольку при случайном нагружении невозможно априорное знание распределения областей догружения и разгрузки, то для построения уравнений стохастической теории упругопластических оболочек будем считать, что физические уравнения (4.4) — (4.9) имеют место во всем объеме оболочки. Фактически, это соответствует нелинейно упругому деформированию оболочки в поле случайных сил.

Классические уравнения теории пологих оболочек получаются из системы (4.2), (4.3) при $k = 0,1$. Подставляя в эти уравнения соотношения (4.4) — (4.9), исключая безмоментное состояние оболочки, пренебрегая флуктуациями тангенциальных сил $Q^{\alpha}_{*}(\xi^{\beta}, t)$ и вводя функцию усилий $\varphi_{*}(\xi^{\alpha}, t)$ по формуле $P^{\alpha\beta}_{(0)*} = l^{\alpha\gamma} l^{\beta\delta} \nabla_{\gamma} \nabla_{\delta} \varphi_{*}$, где $l^{\alpha\beta}$ — антисимметричный тензор Леви-Чивита, получим линеаризованное уравнение, связывающее функции $w_{*}(\xi^{\alpha}, t)$ и $\varphi_{*}(\xi^{\alpha}, t)$:

$$\frac{h^3}{12} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} (E^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_{\gamma} \nabla_{\delta} w_{*}) + b^{0}_{\alpha\beta} l^{\alpha\gamma} l^{\beta\delta} \nabla_{\gamma} \nabla_{\delta} \varphi_{*} - \nabla_{\alpha} (P^{\alpha\beta}_{(0)} \nabla_{\beta} w_{*}) = Q^{3}_{*} \tag{4.10}$$

Уравнения (4.2) при $k=0$, $a=1,2$ с учетом сделанных предположений удовлетворяются тождественно. Недостающее уравнение для определения прогиба оболочки $w_{*}(\xi^{\alpha}, t)$ и функции усилий $\varphi_{*}(\xi^{\alpha}, t)$ получим, используя условие совместности деформаций $l^{\alpha\gamma} l^{\beta\delta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} (e^{*}_{\gamma\delta} - b^{0}_{\gamma\delta} w_{*}) = 0$. Выражая деформации $e^{*}_{\alpha\beta}$ через усилия $P^{\alpha\beta}_{(0)*}$ с помощью соотношений (4.3), (4.6), (4.8), найдем

$$\frac{1}{h} l^{\alpha\gamma} l^{\beta\delta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} (S_{\gamma\delta\kappa\lambda} l^{\kappa\mu} l^{\lambda\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \varphi_{*}) = l^{\alpha\gamma} l^{\beta\delta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} (b^{0}_{\gamma\delta} w_{*}) \tag{4.11}$$

где $S_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — компоненты тензора, обратного $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$.

5. При построении теории надежности упругопластических оболочек ключевой является проблема определения спектральной плотности интенсивности напряжений. Для анализа моментных соотношений при произвольном пространственно-временном спектре внешних воздействий воспользуемся методом спектральных представлений.

Рассмотрим область оболочки, достаточно удаленную от краев, т. е. граничные условия на контуре оболочки заменим условиями ограниченности напряжений и деформаций на бесконечности. Для учета сил взаимодействия оболочки со стохастическим упругим основанием или с соседними слоями в многослойной конструкции запишем правую часть уравнения (4.9) в виде $Q^{3}_{*} = q_{*} - c_0 w_{*} - \rho_0 h \partial^2 w_{*} / \partial t^2$, где $q_{*}(\xi^{\alpha}, t) = r_{*}(\xi^{\alpha}, t) + c_0 v_{*}(\xi^{\alpha})$ — функция внешних воздействий на оболочку, $r_{*}(\xi^{\alpha}, t)$ — случайная нагрузка, возникающая за счет флуктуаций термомеханических и электромагнитных полей, c_0 — эффективный коэффициент упругости основания, $v_{*}(\xi^{\alpha})$ — случайная функция неровностей основания.

Представим функции $q_{*}, w_{*}, \varphi_{*}$ в виде стохастических интегралов Фурье

$$f_a (\xi^{\alpha}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} F_a (k_1, k_2, \omega) \exp (i k_1 \xi^1 + i k_2 \xi^2 - i \omega t)\, dk_1\, dk_2\, d\omega \tag{5.1}$$

со спектральными функциями F_a, удовлетворяющими условию стохастической ортогональности

$$\begin{gathered} \langle \overline{F}_a (k_1, k_2, \omega) F_b (k_1^{\vee}, k_2^{\vee}, \omega^{\vee}) \rangle = \\ = S_{f_a f_b} (k_1, k_2 \omega)\, \delta (k_1 - k_1^{\vee})\, \delta (k_2 - k_2^{\vee})\, \delta (\omega - \omega^{\vee}) \end{gathered} \tag{5.2}$$

где угловыми скобками обозначено осреднение по множеству реализаций, черта над $\overline{F}_a$ отмечает комплексно-сопряженный вектор $\overline{F}_a = \{\overline{Q}, \overline{W}, \overline{\Phi}\}$, $S_{f_a f_b}(k_1, k_2, \omega)$— взаимная спектральная плотность случайных функций $f_a(\xi^{\alpha}, t), f_b(\xi^{\alpha}, t; f_a = \{q_{*}, w_{*}, \varphi_{*}\}$, $\delta(k_{\alpha})$ — дельта-функция Дирака.

Подставляя выражения (5.1) в линеаризованную систему (4.10), (4.11), получим систему алгебраических уравнений относительно спектральных функций W и Φ:

$$L_1 W - L_2 \Phi = Q, \quad L_2 W + L_3 \Phi = 0 \tag{5.3}$$

$$L_1 = (h^3/12)\, E^{\alpha\beta\gamma\delta} k_{\alpha} k_{\beta} k_{\gamma} k_{\delta} + c_0 - \rho_0 h \omega^2 + P^{\alpha\beta}_{(0)} k_{\alpha} k_{\beta}$$

$$L_2 = b^0_{\alpha\beta} l^{\alpha\gamma} l^{\beta\delta} k_\gamma k_\delta, \quad L_3 = (1/h)\, S_{\gamma\delta\kappa\lambda} l^{\alpha\gamma} l^{\beta\delta} l^{\kappa\mu} l^{\lambda\nu} k_\alpha k_\beta k_\mu k_\nu \tag{5.4}$$

в которой $b^0_{\alpha\beta} = R^{-1}_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta}$ — радиусы нормальной кривизны срединной поверхности оболочки. Умножая уравнения (5.3) последовательно на Q, W, Φ, осредняя результат по множеству реализаций и используя условие стохастической ортогональности (5.2), найдем соотношения между спектральными плотностями перемещений S_w, усилий S_φ, взаимной спектральной плотностью $S_{w\varphi}$ и спектральной плотностью внешней нагрузки S_q:

$$S_w = L_3^2 L_4^{-2} S_q, \quad S_\varphi = L_2^2 L_4^{-2} S_q$$

$$S_{w\varphi} = -L_2 L_3 L_4^{-2} S_q, \quad L_4 = L_1 L_3 + L_2^2 \tag{5.5}$$

Разложим формулу для интенсивности напряжений в ряд Тейлора по степеням $\sigma^*_{\alpha\beta}$ и ограничимся линейными слагаемыми

$$\sigma_i (\xi^a, t) = \sigma^0_i + \sigma^*_i (\xi^a, t) = \sigma^0_i + T^0_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}_* (\xi^a, t)$$

$$T^0_{\alpha\beta} = \sigma^{\vee 0}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} l_{\alpha\gamma} l_{\beta\delta} \sigma^{\vee\gamma\delta}_0, \quad \sigma^{\vee 0}_{\alpha\beta} = \sigma^0_{\alpha\beta} (\sigma^0_i)^{-1} \tag{5.6}$$

Представим функции $\sigma^*_i(\xi^a, t), \sigma^*_{\alpha\beta}(\xi^a, t)$ в виде стохастических интегралов Фурье, умножим выражение (5.6) на комплексно-сопряженное, осредним результат по множеству реализаций и воспользуемся условием (5.2). В итоге получим формулу для спектральной плотности интенсивности напряжений

$$S_{\sigma_i} = T^0_{\alpha\beta} T^0_{\gamma\delta} S_{\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta}} \tag{5.7}$$

где $S_{\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta}}$ — спектральные плотности компонент тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}(\xi^a, t)$.

Для того, чтобы связать $S_{\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta}}$ со пректральной плотностью внешней нагрузки S_q, выразим приращения тензора напряжений $\sigma^*_{\alpha\beta}$ через приращения функции перемещений w_* и усилий φ_* с помощью формул (4.3), (4.6), (4.8). В пространстве Фурье эти соотношения имеют вид

$$S^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} W - B^{\alpha\beta} \Phi \tag{5.8}$$

$$A^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\gamma\delta} k_\gamma k_\delta z, \quad B^{\alpha\beta} = (1/h)\, E^{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta\kappa\lambda} l^{\kappa\mu} l^{\lambda\nu} k_\mu k_\nu$$

где $S^{\alpha\beta}$ — образ тензора напряжений $\sigma^{\alpha\beta}_*$. Отсюда получим

$$S_{\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta}} = A^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta} S_w - (A^{\alpha\beta} B^{\gamma\delta} + B^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta})\, S_{w\varphi} + B^{\alpha\beta} B^{\gamma\delta} S_\varphi \tag{5.9}$$

Система уравнений (5.5), (5.7), (5.9) позволяет вычислить спектральную плотность интенсивности напряжений S_{σ_i} через спектральную плотность внешней нагрузки $S_q(k_1, k_2, \omega)$:

$$S_{\sigma_i}(k_1, k_2, z, \omega) = H^2(k_1, k_2, z, \omega) S_q(k_1, k_2, \omega) \tag{5.10}$$

6. Для оценки вероятности безотказной работы упругопластической сверхпроводящей оболочки в поле случайных сил воспользуемся теорией выбросов случайных скалярных полей [7, 8, 17]. Пусть условие качества состоит в том, что ни в одной точке области G, совпадающей с множеством точек объема оболочки, в течение назначенного ресурса T интенсивность напряжений $\sigma_i(\xi^a, t)$ не достигнет предела прочности R. Тогда функцию надежности $P(G, T)$ определим как вероятность случайного события, состоящего в том, что в объеме оболочки G за время T не произойдет ни одного выброса функции $\sigma_i(\xi^a, t)$ за пределы области допустимых состояний $\Omega = \{\sigma_i(\xi^a, t), R : \sigma_i(\xi^a, t) < R\}$, т. е. $P(G, T) = P\{\sup \sigma_i(\xi^a, t) > R, \xi^a \in G, t \in [0, T]\}$. Поскольку максимальные напряжения в оболочке имеют место при $z = \pm h/2$, то в качестве меры области G можно взять площадь срединной поверхности оболочки S, приняв одновременно, что $\max\sigma_i(\xi^a, t) = \sigma_i(\xi^a, |h/2|, t)$. В этом случае случайное поле интенсивности напряжений оказывается двумерным и функция надежности может быть определена как $P(S, T) = P\{\sup \sigma_i(\xi^\alpha, t) > R, \xi^\alpha \in S, t \in [0, T]\}$.

Пусть функция надежности $P(G, T)$ определяется по формуле пуассоновского распределения. Тогда, если поле $\sigma_i(\xi^\alpha, t)$ достаточно перемешанное, а уровень R достаточно высок, выполняется асимптотическое равенство [7, 8]:

$$P(S, T) \approx \exp\left[-\int_0^T \iint_S \nu_{\max}(R; \xi^\alpha, t)\, d\xi^1\, d\xi^2\, dt\right] \tag{6.1}$$

где $\nu_{\max}(R; \xi^\alpha, t)$ — математическое ожидание числа максимумов поля $\sigma_i(\xi^\alpha, t)$ превышающих предел прочности оболочки R на единице площади поверхности в единицу времени. Формула для интенсивности выбросов $\nu_{\max}(v_*;\ \mathrm{x})$ в случае случайного скалярного поля $v(\mathrm{x})$ получена в [7, 8]:

$$\nu_{\max}(v_*; x) = \int_{v_*}^{\infty} dv \int_{V_{ab}} p(v, 0, v_{ab}; \mathrm{x})\, |\det H| \prod_{a=1}^{n-1} \prod_{b=a+1}^{n} dv_{ab} \tag{6.2}$$

где v_* — заданное предельное значение поля $v(\mathrm{x})$ в одномерном пространстве качества, $\det H = \det[v_{ab}]$ — гессиан функции $v(\mathrm{x})$, V_{ab} — множество значений компонент тензорного поля $v_{ab}(\mathrm{x})$, которым соответствует отрицательно определенная матрица Гессе $H = [v_{ab}]$, $p(v, v_a, v_{ab}; \mathrm{x})$ — совместная плотность вероятности для полей $v(\mathrm{x})$, $v_a(\mathrm{x}) = \nabla_a v$, $v_{ab}(\mathrm{x}) = \nabla_a \nabla_b v$, число n определяет размерность области изменения переменных $\mathrm{x} = \{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$.

По существу формула (6.2) позволяет оценить интенсивность выбросов, если задана совместная плотность вероятности и имеется возможность вычисления многомерных интегралов. Однако до последнего времени наибольшее продвижение в практическом использовании формулы (6.2) достигнуто только для двумерной области изменения переменных при довольно жестком предположении об узкополосности случайного скалярного поля $v(x^1, x^2)$ [8]. Простых аналитических соотношений для функции надежности распределенных физических систем в случае многомерного координатного пространства при произвольном спектре случайного поля до сих пор не получено. В данной статье отчасти восполняется этот пробел.

Рассмотрим однородное случайное гауссовское поле $v(\mathrm{x})$ с математическим ожиданием v_0 и спектральной плотностью $S_v(\mathrm{k})$. Перепишем выражение (6.2) в удобном для дальнейших вычислений виде [17]:

$$\nu_{\max}(v_*) = \int_{v_*}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{0} \prod_{a=1}^{n} dv_{aa} \prod_{b=2}^{n} \int_{(-1)^b \Delta_b > 0} p(v, 0, v_{ab})\, |\Delta_n(v_{ab})| \prod_{a=1}^{b-1} dv_{ab} \tag{6.3}$$

$$p(v, v_a, v_{ab}) = p_1(v, v_{aa})\, p_2(v_a)\, p_3(v_{ab})$$

$$p_1(v, v_{aa}) = (2\pi)^{-(n+1)/2} (\det A)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n} B_{ab} v_{aa} v_{bb} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\sum_{a=1}^{n} B_{a,\,n+1} v_{aa}(v - v_0) + B_{n+1,\,n+1}(v - v_0)^2\right]\right\} \tag{6.4}$$

$$p_2(v_a) = (2\pi)^{-n/2}\left(\prod_{a=1}^{n}\sigma_{v_a}\right)^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} v_a^2\sigma_{v_a}^{-2}\right\} \tag{6.5}$$

$$p_3(v_{ab}) = (2\pi)^{-n(n-1)/4}\left(\prod_{a=1}^{n-1}\prod_{b=a+1}^{n}\sigma_{v_{ab}}\right)^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{b=a+1}^{n} v_{ab}^2\sigma_{v_{ab}}^{-2}\right\} \tag{6.6}$$

Здесь $\Delta_a(v_{bc})$ — главный минор a-го порядка определителя $\det H = \det[v_{ab}]$, A — $(n+1)$-мерная корреляционная матрица с элементами, характеризующими статистическую связь между случайными полями v, v_a и v_{ab}. Вычислим вначале внутренний интеграл по переменным v_{ab}.

Необходимым и достаточным условием отрицательной определенности матрицы Гессе является соблюдение неравенств $(-1)^a\Delta_a > 0$ $(a = 1, 2, \ldots, n)$ [18]. Отсюда следует, что область интегрирования V_{ab} может быть представлена в виде $V_{ab} = \{b_{ab} : (-1)^a\Delta_a(v_{bc}) > 0\}$. Последовательные неравенства $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0, \ldots$ $\ldots, (-1)^n\Delta_n > 0$ автоматически влекут выполнение неравенств $v_{aa} < 0$. При этом оказывается, что область интегрирования по переменным v_{ab} совпадает с внутренней областью эллипсоида $(b-2)$-го порядка, главные оси которого повернуты относительно осей v_{ab}, а координаты центра совпадают с началом координат $v_{ab} = 0$. Это наблюдение значительно облегчает вычисление многомерных интегралов в (6.3).

Воспользуемся методом Лапласа [19] для асимптотической оценки многомерного интеграла по переменным v_{ab}, в которых подынтегральная функция сохраняет знак в области интегрирования и имеет в этой области один или несколько максимумов, выделяющихся тем резче, чем больше значения параметра λ, по обратным степеням которого проводится разложение. При этих условиях величина интеграла оказывается зависящей лишь от локального поведения подынтегральной функции в точке максимума. Координаты точки максимума ϑ_{ab}^0 функции $\exp[\lambda S(v_{ab})]$ определяются условиями $\partial S(\vartheta_{ab}^0)/\partial v_{ab} = 0$. Откуда следует, что точка $\vartheta_{ab}^0 = 0$ является внутренней для области V_{ab} невырожденной точкой максимума. Главный член асимптотики интеграла выражается в этом случае формулой [19]:

$$I_3(v_{ab}) = \exp[\lambda S(\vartheta_{ab}^0)](2\pi/\lambda)^{n(n-1)/4} f(\vartheta_{ab}^0)\,|\det S_{v_{ab}v_{cd}}(\vartheta_{ab}^0)|^{-1/2} \times$$
$$\times [1 + O(\lambda^{-1})],\quad S''_{v_{ab}v_{cd}}(\vartheta_{ab}^0) = \partial^2 S(\vartheta_{ab}^0)/\partial v_{ab}\,\partial v_{cd} \tag{6.7}$$

где $\lambda = (v_* - v_0)^2/\sigma_v^2$. Подставляя сюда значения $\vartheta_{ab}^0 = 0$ и вычисляя гессиан по переменным v_{ab}, получим асимптотическую оценку для внутреннего интеграла [17]:

$$I_3(v_{ab}) = \left|\prod_{a=1}^{n} a_{aa}\right|[1 + O(\lambda^{-1})] \tag{6.8}$$

Средний интеграл в (6.3) вычислим аналогичным образом. Точка максимума функции $\exp[\lambda S(v_{aa})]$ по переменным v_{aa} определяется из условия $\partial S(v, v_{aa})/\partial v_{aa} = 0$ или

$$\sum_{a=1}^{n} B_{ab}v_{bb} = -B_{a,n+1}(v - v_0) \tag{6.9}$$

Единственное решение этой системы алгебраических уравнений по правилу Крамера есть

$$\vartheta_{aa}^0 = \frac{D_a}{D} = \frac{B^*_{a,n+1}}{B^*_{n+1,n+1}}(v - v_0) = \frac{A_{a,n+1}}{A_{n+1,n+1}}(v - v_0) = -k_{ae}^2(v - v_0) \tag{6.10}$$

где $D = \det[B_{ab}]$ — определитель системы уравнений (6.9), D_a — определитель, получающийся из D при замене элементов B_{ba} a-го столбца свободными членами — $B_{b,\ n+1}\ (v - v_0)$, $B^*_{\alpha\beta}$ — алгебраическое дополнение элемента $B_{\alpha\beta}$ в расширенном определителе $\det[B_{\alpha\beta}]\,(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, h+1)$. Подставляя в формулу типа (6.7) значения $v^0_{aa} = -k^2_{ae}(v - v_0)$ и учитывая соотношение [18]:

$$\sum_{\gamma=1}^{n+1} B_{\alpha\gamma} B^*_{\beta\gamma} = \det\,[B_{\alpha\beta}]\,\delta_{\alpha\beta} \tag{6.11}$$

в которой через $\delta_{\alpha\beta}$ обозначен символ Кронекера, получим [17]:

$$I_2\,(v_{aa}) = (2\pi)^{-(n+1)/2} \prod_{a=1}^{n} k_{ae}\sigma_v^{-(n+1)}\,(v - v_0)^n \exp\left[-\frac{(v - v_0)^2}{2\sigma_v^2}\right]\,[1 + O\,(\lambda^{-1})] \tag{6.12}$$

Во внешнем интеграле максимальное значение подынтегральной функции достигается в граничной точке $v = v_*$. Поэтому для асимптотической оценки вклада граничной точки будем использовать разложение [17, 19], отличающееся от формулы (6.7):

$$I_1 = \int_{v_*}^{\infty} f\,(v) \exp\,[\lambda S\,(v)]dv = |\lambda S_v'\,(v_*)|^{-1} f\,(v_*) \times$$
$$\times \exp\,[\lambda S\,(v_*)]\,[1 + O\,(\lambda^{-1})],\quad S_v'\,(v_*) = \partial S\,(v_*)/\partial v \tag{6.13}$$

Подставляя сюда выражения для внутреннего и среднего интегралов, получим окончательную формулу для математического ожидания числа максимумов случайного гауссовского поля $v(\mathrm{x})$, превышающих достаточно высокий уровень v_* в единице объема области G:

$$\nu_{\max}\,(v_*) = (2\pi)^{-(n+1)/2} \prod_{a=1}^{n} k_{ae} \left(\frac{v_* - v_0}{\sigma_v}\right)^{n-1} \exp\left[-\frac{(v_* - v_0)^2}{2\sigma_v^2}\right]\,[1 + O\,(\lambda^{-1})] \tag{6.14}$$

Широкополосность случайного поля учитывается здесь через эффективные волновые числа k_{ae}, связанные со спектральной плотностью $S_v(k)$ соотношениями

$$k_{ae} = \sigma_{v_a}\sigma_v^{-1},\quad \sigma^2_{v_a} = \int_{-\infty}^{\infty} S_v\,(\mathrm{k})\,k_a^2 \prod_{b=1}^{n} dk_b,\quad \sigma_v^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_v\,(\mathrm{k}) \prod_{a=1}^{n} dk_a \tag{6.15}$$

В случае узкополосного гауссовского поля из (6.15) следует $k_{ae} = k^0_a$ и формула (6.14) при $n = 2$ и $v_0 = 0$ совпадает с формулой для $\nu_{\max}(v_*)$ из [8], полученной с помощью несколько искусственного предположения о виде совместной плотности вероятности $p_1(v, v_{aa})$ при узкополосном поле $v(x)$. Для пространственно-временных случайных полей одно из волновых чисел можно отождествить с эффективной частотой $\omega_e = k_{ne}$, а в качестве меры области изменения переменных $\{\mathrm{x}, t\} = \{x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}, t\}$ взять произведение GT, где G — объем области, занятой распределенной физической системой, а T — назначенный ресурс.

Применяя полученный результат к оценке функции надежности упругопластической сверхпроводящей оболочки, находящейся под действием пространственно-временных случайных сил, получим

$$P\,(S, T) = \exp\left\{-2ST\,(2\pi)^{-2}\left(\frac{R - \sigma_i^0}{\sqrt{D_\sigma}}\right)^2 \times\right.$$
$$\left.\times\, k_{1e}k_{2e}\omega_e \exp\left[-\frac{(R - \sigma_i^0)^2}{2D_\sigma}\right]\right\}\,[1 + O\,(\lambda^{-1})] \tag{6.16}$$

$$\omega_e^2 = D_\omega D_\sigma^{-1}, \quad k_{\alpha e}^2 = D_\alpha D_\sigma^{-1}, \quad D_\sigma = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} S_{\sigma_i}(k_1, k_2, \omega)\, dk_1\, dk_2\, d\omega$$

$$D_\omega = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} S_{\sigma_i}(k_1, k_2, \omega)\, \omega^2\, dk_1\, dk_2\, d\omega, \quad D_\alpha = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} S_{\sigma_i}(k_1, k_2, \omega)\, k_\alpha^2\, dk_1\, dk_2\, d\omega \tag{6.17}$$

где D_σ, D_ω, D_α — дисперсии поля интенсивности напряжений $\sigma_i(\xi^\alpha, t)$ и производных поля $\partial\sigma_i/\partial t$, $\nabla_\alpha \sigma_i$ соответственно, $\lambda = (R - \sigma_i^0)^2/D_\sigma$, ширина спектра поля $\sigma_i(\xi^\alpha, t)$ согласована с довольно общим предположением $\lambda \gg 1$ о высокой надежности упругопластической сверхпроводящей оболочки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Том Г., Тарр Дж.* Магнитные системы МГД генераторов и термоядерных установок. М.: Энергоатомиздат. 1985. 272 с. 000.
2. *Лобанов Е. В.* Построение релятивистской модели сверхпроводящей сплошной среды с помощью вариационного принципа//Докл. АН БССР. 1991. Т. 35. № 3. С. 235—238.
3. *Лобанов Е. В.* Теория связанных полей в высокотемпературных сверхпроводниках//Процессы и структуры в открытых системах. М.: Изд-во Ин-та физ. тех. проблем. 1992.
4. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Упругопластические деформации. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
5. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1990. 310 с.
6. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
7. *Беляев Ю. К.* О всплесках и бликах случайных полей//Докл. АН СССР. 1976. Т. 176. № 3. С. 495—497.
8. *Болотин В. В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат. 1982. 351 с.
9. *Седов Л. И., Цыпкин А. Г.* Основы макроскопических теорий гравитации и электромагнетизма. М.: Наука, 1989. 272 с.
10. *Biot M. A.* Thermoelasticity and irreversible thermodynamics//J. Appl. Phys., 1956. V. 27. № 3. P. 240—253.
11. *Булаевский Л. П., Гинзбург В. Л., Собянин А. А.* Макроскопическая теория сверхпроводников с малой длиной когерентности//Ж. эксперим. и теорет. физики, 1988. Т. 94. Вып. 7. С. 355—375.
12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976. 584 с.
13. *Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д.* К теории сверхпроводимости//Журнал эксперим. и теоретич. физики, 1950. Т. 20. Вып. 12. С. 1064—1082.
14. *Мюллер К., Беднорц Ж., Тарновски Д.* Открытие высокотемпературной сверхпроводимости//Физика за рубежом. Сер. А. М.: Мир, 1987. С. 6—27.
15. *Головашкин А. И.* Высокотемпературные сверхпроводящие керамики (Обзор экспериментальных данных)//Успехи физ. наук, 1987. Т. 152. Вып. 4. С. 553—573.
16. *Сан Жам Д., Сарма Г., Томас Е.* Сверхпроводимость второго рода. М.: Мир, 1970. 364 с.
17. *Лобанов Е. В.* К теории надежности распределенных физических систем. I. Скалярные поля//Проблемы машиностроения и надежности машин, 1992. № 5.
18. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970. 400 с.
19. *Федорюк М. В.* Асимптотика (Интегралы и ряды). М.: Наука, 1987. 544 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.VII.1991