МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1992

УДК 539.3

 В. П. ОЛЬШАНСКИЙ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ФОРМУЛЫ ОДКВИСТА

При оценке жесткости оболочки приходится вычислять ее прогиб под сосредоточенной нормальной силой. Для выпуклых поверхностей, близких по форме к сферическим, это можно сделать по формуле [1]. Однако названное решение нельзя применить к расчету цилиндрической оболочки. Поэтому остановимся на определении прогибов тонкостенного цилиндра. Из работ в этом направлении выделим [2] и [3]. В первой из них получена простая формула для вычисления прогибов длинного цилиндра. Во второй предложено компактное выражение максимального прогиба короткой оболочки. Границы применимости указанных результатов не пересекаются, т. е. оба решения приводят к существенным погрешностям при расчете цилиндрических оболочек средней длины.

В данном сообщении предлагается обобщение формулы Ф. Одквиста, позволяющее расширить границы ее применимости и на оболочки среднего удлинения. Это достигается приближенным суммированием тригонометрических рядов, представляющих решение уравнений полубезмоментной теории оболочек в форме В. З. Власова, которые достаточно точны при расчете тонкостенных цилиндров с отношением длины l к радиусу R в пределах $2 < l/R < 16$ [4]. Ф. Одквист в своем исследовании исходил из упрощенных уравнений [5].

Согласно полубезмоментной теории прогиб оболочки w определяется уравнениями [4], [6]:

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4} + \frac{c^2}{1-\nu^2}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)^2\Phi = \frac{R^2}{Eh}p(\alpha,\beta)$$

$$w = \partial^4\Phi/\partial\beta^4, \quad c^2 = h^2/12R^2 \tag{1}$$

Здесь E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала: h — толщина; $p(\alpha,\beta)$ — плотность внешней нормальной нагрузки; $\alpha R, \beta R$ — соответственно расстояния вдоль образующей и направляющей окружности.

При действии сосредоточенной силы P в точке с координатами: $\alpha = \alpha_1, \beta = 0$ плотность нагрузки выражается с помощью дельта — функции $\delta(z)$ и имеет вид

$$p(\alpha,\beta) = PR^{-2}\delta(\alpha-\alpha_1)\,\delta(\beta-0) \tag{2}$$

Разлагая $\Phi(\alpha,\beta)$ и $p(\alpha,\beta)$ в тригонометрические ряды, удовлетворяющие условиям свободного опирания торцов $\alpha = 0, \alpha = l/R$, для прогиба из (1), (2) получаем

$$\frac{ER}{P}w(\alpha,\beta) = \frac{24(1-\nu^2)}{\pi(l/R)}\left(\frac{R}{h}\right)^3 \sum_{m=1}^{\infty}{}' \sin(\lambda_m\alpha_1)\times$$

$$\times\sin(\lambda_m\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2\cos(n\beta)}{n^4(n^2-\omega)^2+b^8m^4}, \quad \lambda_m = \frac{m\pi R}{l} \tag{3}$$

$$b^8 = 12(1-\nu^2)\left(\frac{R}{h}\right)^2\frac{\pi^4}{(l/R)^4}, \quad \omega = 1$$

Таблица 1

ω	b	30 членов ряда	100 членов ряда	Формула (6)
0	2	0,05447	0,05448	0,05313
0	3	0,01575	0,01576	0,01574
1	2	0,06699	0,06701	0,06429
1	3	0,01716	0,01718	0,01716

Таблица 2

R/h	l/R	[11]	$\omega = 1$	$\omega = 0$
15	3	300	300	280
15	6	468	453	397
15	10	601	639	512
50	3	4352	4367	4211
50	8	7631	7577	6876
50	20	13430	13859	10872

Таблица 3

R/h	l/R	[12]	$\omega = 1$	$\omega = 0$
100	3	20401	20552	20030
100	5	26897	26992	25859
100	8	34857	35033	32709
100	10	39665	39845	36570
300	3	238690	240802	237248
300	5	311889	313970	306285
300	8	400361	403089	387424
300	10	452551	455153	433153
500	3	749439	757468	748793
500	5	976723	985423	966687
500	8	1248854	1260905	1222773
500	10	1404394	1420593	1367002

Если исходить из уравнения [5] в рядах (3), следует положить $\omega = 0$.

Для построения замкнутых решений проведем приближенное аналитическое суммирование ряда по n. Полагая $\beta = 0$, перейдем от суммирования по дискретному спектру к интегрированию по непрерывному, т. е. примем

$$I(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n^4 (n^2 - \omega)^2 + b^8 m^4} \cong \int_0^{\infty} \frac{z^4 dz}{z^4 (z^2 - \omega)^2 + b^8 m^4} \tag{4}$$

Этот предельный переход означает замену замкнутой цилиндрической поверхности в окружном направлении некоторой полосой бесконечной длины. В зоне локального возмущения такое упрощение оправдано, если учесть быстрое затухание и малую протяженность зоны вдоль направляющей окружности, отмеченные в [7]. При локальном нагружении цилиндрическая оболочка принималась бесконечной в окружном направлении и в других работах [3]. Замена двойного тригонометрического ряда двойным интегралом Фурье применялась также в комбинированном методе при вычислении локальных напряжений в изотропных [8] и трансверсально изотропных [9] оболочках. Как показывают расчеты (см. табл. 1) формула (4) обеспечивает хорошую точность при $b \geq 2$, $\omega = 0; 1$.

Интеграл (4) можно вычислить по теории вычетов, из которой следует

$$I(m) = \frac{\pi}{8b^4m^4}\left[z_{1+} - z_{3-} + z_{2-} - z_{4+} + \frac{\omega}{m\sqrt{2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{z_{1+} - z_{2-}}{1+i} + \frac{z_{4+} - z_{3-}}{1-i}\right)\right], \quad i = \sqrt{-1}$$

Здесь $z_{1+}, z_{2-}, z_{3-}, z_{4+}$ — четыре корня уравнения

$$z^4(z^2 - \omega)^2 + b^8m^4 = 0 \tag{5}$$

имеющие положительную мнимую часть. Все восемь корней уравнения (5) легко найти по формулам

$$z_{j\pm} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(((\xi_j^2 + \eta^2)^{1/2} + \xi_j)^{1/2} \pm i\,((\xi_j^2 + \eta^2)^{1/2} - \xi_j)^{1/2}\right)$$

$$\xi_j = \frac{\omega}{2} - (-1)^j\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{\omega^4}{16} + b^8m^4\right)^{1/2} + \frac{\omega^2}{4}\right)^{1/2}$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{\omega^4}{16} + b^8m^4\right)^{1/2} - \frac{\omega^2}{4}\right)^{1/2}$$

Отбрасывая в рамках принятых ограничений на b ($b \geq 2$) малые, второстепенные величины, получаем

$$I(m) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}\,b^3m^{3/2}}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} + 0{,}6042\omega_1 + 0{,}1453\omega_1^2 + 0{,}03773\omega_1^3\right),$$

$$\omega_1 = \omega\,(b^2m)^{-1} \tag{6}$$

Результаты вычисления $I(m)$ по формуле (6) при $m = 1$ указаны в табл. 1. Там же помещены значения частичных сумм ряда (4) из 30 и 100 членов. Анализ показывает, что формула (6) обеспечивает хорошую точность вычислений, причем она повышается с ростом m.

Учитывая (3), (6) прогибы оболочки на нулевой образующей представляем одинарным тригонометрическим рядом. При оценке жесткости оболочки представляет интерес определение наибольшего значения w_{max}, которое достигается под сосредоточенной силой, приложенной в точке с координатами $\alpha_1 = l/(2R), \beta = 0$. В этой точке

$$\frac{ER}{P}w_{max} = \frac{24\,(1-\nu^2)\,(R/h)^3}{\pi\,(l/R)}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty} I(m) \tag{7}$$

и вычисление максимального прогиба не вызывает затруднений, так как ряды (7) сводятся к табулированной в [10] дзета-функции Римана. Учитывая, что [10]:

$$\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty} m^{-s} = (1 - 2^{-s})\,\zeta(s)$$

где $\zeta(3/2) = 2{,}612$; $\zeta(5/2) = 1{,}341$; $\zeta(7/2) = 1{,}127$; $\zeta(9/2) = 1{,}0547$, получаем

$$w_{max} = \frac{P}{ER}\left(\frac{R}{h}\right)^{9/4}\left(\frac{l}{R}\right)^{1/2}\frac{[12\,(1-\nu^2)]^{5/8}}{2\pi\sqrt{2\pi}} \times$$

$$\times\left[1{,}689 + 0{,}634\frac{\omega}{b^2} + 0{,}149\left(\frac{\omega}{b^2}\right)^2 + 0{,}038\left(\frac{\omega}{b^2}\right)^3\right] \tag{8}$$

$$b^2 = \sqrt[4]{12(1-\nu^2)}\,\sqrt{R/h}\,\pi/(l/R)$$

Выражение (8) является обобщением формулы Ф. Одквиста, так как переходит в нее при $\omega = 0$.

Суммирование рядов выполнено в предположении, что $b \geq 2$ или

$$l \leq \frac{\pi R}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{R}{h}}\,\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}.$$

Это неравенство определяет и границы применимости формулы (8). Из него следует, что в случае тонких оболочек ($R/h > 100$) формула (8) достаточно точна на всем интервале длин, оговоренных в полубезмоментной теории.

Поскольку решение (8) получено на базе упрощенных уравнений оболочек, представляет интерес сравнить численные результаты с теми, которые дают более строгие и, естественно, более сложные теории. В табл. 2 указаны значения $w_1 = w_{\max}ERP^{-1}$ вычисленные для $\nu = 0{,}3$ по формуле (8) при $\omega = 1$ и $\omega = 0$, а также в [11] суммированием на ЭВМ двойных тригонометрических рядов. Расчет показывает, что погрешность решения (8) при $\omega = 1$ не превышает 6,4%, тогда как при $\omega = 0$ она достигает 19%. В табл. 3 приведены аналогичные результаты для более тонких оболочек, причем в [12] они получены суммированием на ЭВМ рядов, соответствующих общей теории оболочек в форме В. З. Власова [4]. Формула (8) при $\omega = 1$ дает хорошую точность и для оболочек, у которых $l/R = 10$. Расчет выполненный при $\omega = 1$ приводит к завышенным, а при $\omega = 0$ — заниженным значениям прогибов, что образует некоторую вилку для оценок сверху и снизу. Таким образом, введенные здесь элементарные дополнения в формулу Ф. Одквиста расширяют границы ее применимости и на оболочки среднего удлинения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чернышев Г. Н.* Прогиб под сосредоточенной силой в оболочках положительной кривизны//ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 5. С. 883—886.
2. *Даревский Р. М.* Определение перемещений и напряжений в цилиндрической оболочке при локальных нагрузках//Прочность и динамика авиационных двигателей. М.: Машиностроение. 1964. Вып. 1. С. 23—83.
3. *Odquist F. K. G.* Action of forces and moments symmetrically distributed along a generatrix of thin cylindrical shells//J. Appl. Mech. 1946. V. 13. No 2. P. 106—109.
4. *Власов В. З.* Тонкостенные пространственные системы. М.: Госстройиздат, 1949. 502 с.
5. *Schores H.* Line loads action on thin cylindrical shells subjected to concentrated radial loads//Pros. ASCE. 1935. V. 61. № 3. P. 281—316.
6. *Нерубайло Б. В.* Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1983. 248 с.
7. *Гольденвейзер А. Л.* К вопросу о расчете оболочек на сосредоточенные силы//ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 2. С. 181—186.
8. *Ольшанский В. П.* Приближенныи расчет локальных напряжений в оболочках комбинированным методом//Изв. АН СССР, МТТ. 1986. № 1. С. 149—154.
9. *Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Ольшанский В. П.* Комбинированный метод вычисления локальных напряжений в трансверсальноизотропных оболочках//Расчеты на прочность. М.: Машиностроение. 1988. Вып. 28. С. 3—11.
10. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977. 344 с.
11. *Бейлард П. П.* Напряжения от локальных нагрузок в цилиндрических сосудах давления//Вопросы прочности цилиндрических оболочек. М.: Оборонгиз. 1960. С. 43—65.
12. *Жигалко Ю. П., Гурьянов Н. Г.* Свободно опертая цилиндрическая оболочка под действием локальных нагрузок//Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во КГУ, 1966. Вып. 4. С. 42—54.

Харьков

Поступила в редакцию
25.IV.1990