

© 1992 г. В. А. ИВАНОВ

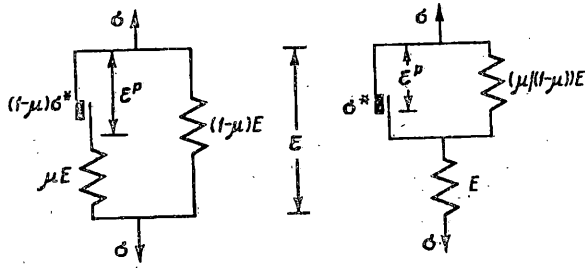
## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОНЯТИЯ ТРАКТРИССЫ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Определяющие уравнения модели Ишлинского — Прагера [1] (упругопластическое тело с линейным упрочнением и идеальным эффектом Баушингера) формулируются в виде соотношения между траекториями напряжений и деформаций. Учет собственно «истории нагружения» выносится в решение дополнительной задачи о траектории пластической деформации, и эта задача имеет геометрический смысл как определение трактриссы к некоторой кривой в пространстве Ильюшина [2]. На плоскости определение трактриссы сводится к квадратуре, определяемой через табличные интегралы для характерных траекторий нагружения или деформаций.

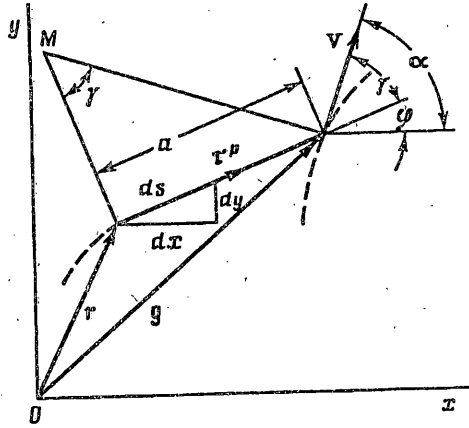
Понятие о трактриссе особенно эффективно при практическом использовании структурно-феноменологической теории Кадашевича — Новожилова [3, 4]. Система интегродифференциальных уравнений этой теории сводится к достаточно простой зависимости между траекториями напряжений и деформаций. В частности, для траекторий нагружений или деформаций в виде двухзвенных ломаных, характерных в исследованиях [5—7], определяющие уравнения выражаются через элементарные функции. Эти функции на втором звене ломаной вырождаются очевидным образом в соотношения теории малых упругопластических деформаций. Поэтому понятие «следа» в «теореме о запаздывании» [2] получает математическое содержание и может быть численно оценено.

1. Модель Ишлинского — Прагера. Используется пятимерное евклидово пространство  $I_5$  (приведенное пространство Ильюшина), каждой точке которого соответствует шесть приведенных составляющих девиаторов напряжений или деформаций в соответствии с преобразованием:  $S^n = \alpha_{ij}^n s_{ij}$ ,  $\epsilon^n = \alpha_{ij}^n \epsilon_{ij}$ ;  $n = 1, 2, \dots, 5$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ ;  $s_{ij} = s_{ij}'/a^+$ ,  $\epsilon_{ij} = 2G\epsilon_{ij}'/a^+$ ;  $s_{ij}'$ ,  $\epsilon_{ij}'$  — составляющие девиаторов напряжений и деформаций,  $G$  — модуль сдвига,  $a^+$  — постоянная, имеющая размерность напряжений; элементы матрицы преобразования  $\alpha_{ij}^n$  описаны в [2].

Известно [8], что определяющие уравнения Ишлинского — Прагера для упругопластического тела с линейным упрочнением и идеальным эффектом Баушингера могут быть получены без привлечения концепции поверхности нагружения, исходя из аналогии между сопротивлением пластической деформации и кулоновым трением. Для тела, подвергнутого растяжению — сжатию, механическую модель можно представить одной из двух комбинаций, состоящих из пружин и кулонова элемента (фиг. 1), которые далее называются моделями типа Фойхта и Рейсса. На фиг. 1 и далее в тексте обозначены:  $E$  — модуль упругости;  $\mu$  — коэффициент упрочнения, равный отношению касательного модуля на стадии упрочнения к модулю упругости;  $\sigma^*$  — предел текучести,  $\sigma^* = \sqrt{3}a'$ ,  $a'$  — критерий Мизеса. Принимается, что статические и кинематические условия композиции одномерных моделей можно обобщить на векторные величины в пространстве  $I_5$ . При этом аналогия с кулоновым трением состоит собственно в том, что сопротивление пластической деформации постоянно по величине и направлено в сторону, противоположную единичному вектору  $\vec{t}^p$  касательной к траектории пластической деформации  $\vec{\epsilon}^p(t)$ , где через  $t$  обозначен параметр траектории (время). При калибровке постоянных, указанной на фиг. 1, для



Фиг. 1



Фиг. 2

моделей типа Фойхта и Рейсса имеют место одинаковые определяющие уравнения при различных формулировках условий пластичности. Если  $|\vec{\epsilon} - \vec{\epsilon}^p| < a$ , где  $a = a'/a^*$  или  $|S - \mu\vec{\epsilon}^p/(1-\mu)| < a$ , то

$$S = \vec{\epsilon} \quad (1.1)$$

Если  $|\vec{\epsilon} - \vec{\epsilon}^p| = a$  или  $|S - \mu\vec{\epsilon}^p/(1-\mu)| = a$ , то

$$S = \mu\vec{\epsilon} + \vec{v}(1-\mu)a, \quad \tau^p = d\vec{\epsilon}^p / |d\vec{\epsilon}^p| \quad (1.2)$$

Концепция о поверхности нагружения содержится в уравнении (1.2) в скрытой форме, как геометрическая интерпретация условия пластичности, представляющая сферу радиуса  $a$  в пространстве  $I_5$ . В понятиях ассоциированной теории пластического течения для модели типа Фойхта поверхность нагружения задана в «пространстве деформаций», а для модели типа Рейсса — в «пространстве напряжений».

Условия пластического течения в формуле (1.2) соответствуют мгновенному состоянию. Если рассмотреть траектории напряжений и деформаций, то эти условия разворачиваются в формулу

$$r(t) + a dr(t) / |dr(t)| = g(t), \quad r(0) = r_0 \quad (1.3)$$

где  $r(t) = \vec{\epsilon}^p(t)$ ,  $g(t) = \vec{\epsilon}(t)$  для модели типа Фойхта или  $r(t) = \mu\vec{\epsilon}^p(t)/(1-\mu)$ ,  $g(t) = S(t)$  для модели типа Рейсса.

В понятиях ассоциированной теории пластического течения уравнение (1.3) можно интерпретировать таким образом, что малое смещение центра поверхности нагружения, т. е. сферы, происходит вдоль направления отрезка, соединяющего

центр с точкой нагружения, и эта интерпретация представляет модификацию Циглера [9] к теории Прагера.

Уравнение (1.3) разрешимо относительно первой производной пластической деформации

$$d\tau(t)/dt = a^{-2} [g(t) - r(t)] [(g(t) - r(t)) dg/dt] \quad (1.4)$$

$$r(0) = r_0$$

Проектируя уравнение (1.4) на оси координат, имеем систему уравнений для определения траекторий пластической деформации

$$a^2 r_i = [g_i(t) - r_i(t)] \sum_{j=1}^5 g_j(t) [g_j(t) - r_j(t)]$$

$$r_i(0) = r_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (1.5)$$

Интегрированием системы уравнений (1.5) определяется  $r(t) = \{r_1(t), r_2(t), \dots, r_5(t)\}$ , затем единичный вектор касательной  $\vec{t}^p = d\tau/d\tau$ . Эти вычисления приводят к зависимости использования определяющего уравнения (1.2), представляющего зависимость между траекториями напряжений и деформаций. Уравнения (1.2), (1.4) симметричны по отношению к группе вращений и отражений в соответствии с постулатом изотропии [2].

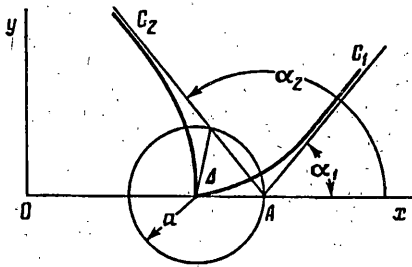
Кривая  $r(t)$ , определяемая формулой (1.3), является трактриссой, т. е. кривой «у которой отрезок касательной от точки касания до некоторой кривой, называемой эквитангенциальной, является постоянной величиной» [10]. Понятие о трактриссе возникло [10] в связи с задачей Клода де Перро об определении траектории материальной точки на горизонтальной поверхности, если эта точка привязана к одному концу нити, а другой конец перемещается по заданной траектории. Обобщая модель Перро в пространстве  $I_5$ , можно представить перемещение нити, один конец которой скользит по заданной траектории, а скорость другого конца направлена по оси нити (вследствие свойства пространства).

Пусть эквитангенциальная кривая расположена в любой плоскости, проходящей через начало координат в пространстве  $I_5$ , и  $xOy$  — система координат в этой плоскости. Скорость движения свободного конца нити Перро длиной  $a$  по заданной в плоскости траектории  $g(t)$  принимается постоянной  $|dg/dt| = V = \text{const}$ . Пусть эта скорость составляет с осью  $x$  угол  $\alpha(t)$ . Угловая скорость вращения нити (фиг. 2) относительно мгновенного центра скоростей, точки  $M$ , определяется по формуле  $\varphi' = a^{-1} V \sin \gamma$ ,  $\varphi = \alpha - \gamma$ , где  $\gamma$  — угол между направлением нити и скоростью  $V$ , отсчитываемый против часовой стрелки. Из приведенных соотношений непосредственно следует, что

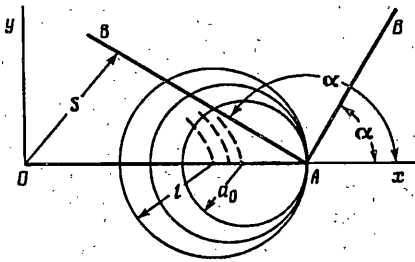
$$t' = t + C = \int \frac{d\gamma}{\alpha \cdot (t) - k \sin \gamma}, \quad k = V/a \quad (1.6)$$

Единичный вектор касательной к трактриссе определяется по формуле  $\tau = i \cos(\alpha - \gamma) + j \sin(\alpha - \gamma)$ , где  $i, j$  — единичные векторы координатных осей. Ниже рассмотрены характерные случаи.

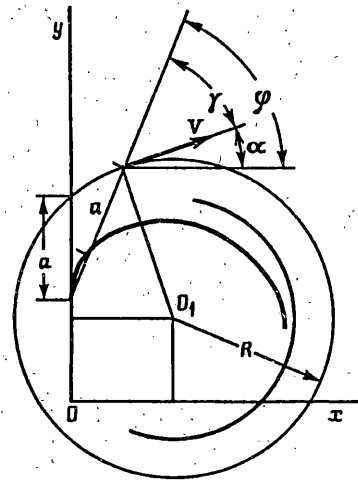
1. Эквитангенциальная кривая — двухзвенная ломаная с углом перегиба менее  $90^\circ$ . Первое звено ломаной длиной  $b \geq a$  совмещено с осью  $x$ , а второе составляет с этой осью угол  $\alpha_1 = \alpha < \pi/2$  (фиг. 3). Если материальная точка в модели Перро находилась в некоторый момент времени в начале координат, то движение свободного конца нити вдоль оси  $x$  интереса не представляет. За начало отсчета времени положен момент, в который свободный конец нити проходит точку перегиба. Уравнение (1.6) после вычисления интеграла при  $\alpha = \text{const}$  приводится к формуле  $\cos \gamma = \text{th}(Vt/a)$ . Составляющие единичного



Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4

вектора касательной трактриссы выражаются через косинус и синус разности углов

$$dx/ds = \cos(\alpha - \gamma) = \text{th}(Vt/a + C) \cos \alpha + \text{sech}(Vt/a + C) \sin \alpha$$

$$dy/ds = \sin(\alpha - \gamma) = \text{th}(Vt/a + C) \sin \alpha - \text{sech}(Vt/a + c) \cos \alpha$$

$$C = C_1 = \text{arc th } \cos \alpha, \quad ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2} \quad (1.7)$$

2. Эквитангенциальная кривая — двухзвенная ломаная с углом перегиба менее  $90^\circ$ . Отличие от предыдущего примера по модели Перро состоит в том, что после прохождения свободным концом нити точки перегиба эта нить в начале движения свободного конца по второму звену на участке длиной  $\Delta = 2a|\cos \alpha|$  не натянута (фиг. 3). Область, в которой отсутствует натяжение нити при различных углах перегиба  $\alpha_2 = \alpha > \pi/2$ , прообразует область промежуточного разгрузки и ограничена окружностью, являющейся поверхностью нагружения. С учетом промежуточного разгрузки в формуле (1.7) следует положить

$$C = C_2 = \text{arcth}|\cos \alpha|, \quad t \geq 2|\cos \alpha| \quad (1.8)$$

3. Эквитангенциальная кривая — отрезок оси ординат  $y \in [0, B]$ ,  $b \geq a$  и окружность  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ ,  $R \geq a$ , проходящая через точку  $(0, B)$  (фиг. 4). В формуле (1.6) следует учесть, что  $\alpha = \alpha_0 - Vt/R$ ,  $\alpha_0 = \text{arctg}[x_0/(b - y_0)]$ . После интегрирования имеют место следующие формулы

$$\gamma = 2 \text{arc tg} [\nu + (\nu^2 - 1)^{1/2} \text{ctg}(\alpha^{1/2})], \quad \nu = R/a$$

$$\alpha' = [(\alpha - \alpha_0)(\nu^2 - 1)^{1/2} - \ln \frac{\text{tg}(\gamma_0/2) + \nu - (\nu^2 - 1)^{1/2}}{\text{tg}(\gamma_0/2) + \nu + (\nu^2 - 1)^{1/2}}],$$

$$\gamma_0 = \pi/2 - \alpha_0$$

В [1] даны определяющие уравнения на траекториях, соответствующих

примеру 1 и примеру 3 (при  $x_0 = y_0 = 0$ ) без использования понятия о трактриссе. Используя понятие о трактриссе, можно предложить общий метод решения подобного рода задач.

2. Модель Кадашевича — Новожилова. Применение понятия о трактриссе может иметь существенное значение в структурно-феноменологической теории Кадашевича — Новожилова. Система интегродифференциальных уравнений этой теории сводится к зависимости между траекториями напряжений и деформаций.

В структурно-феноменологической модели Кадашевича — Новожилова [3, 4] образец представляется множеством микрообъемов, имеющим мощность континуума. Механические свойства на микроуровне описываются некоторой простой моделью, в частности [3] — моделью Ишлинского — Прагера с заданием критериев Мизеса микрообъемов через плотность распределения вероятностей. Взаимодействие микрообъемов оценивается косвенным образом через задание соотношения корреляционного типа. В качестве таких соотношений рассматривались [3] условия Фойхта  $\vec{\varepsilon}^k = \vec{\varepsilon}$ , условия Рейсса  $S^k = S$  и условия Кренера  $\vec{\varepsilon}^k - \vec{\varepsilon} = \beta(S - S^k)$  ( $k$  — индекс микрообъема).

Пусть плотность распределения вероятностей критериев Мизеса  $F(a)$  определена на отрезке  $[a_0, 1]$ . При этом определении введенная ранее постоянная  $a^+$  приобретает смысл верхней границы значений критериев Мизеса  $a^+ = \sup \{a^k\}$ .

Рассматривается образец, первоначально находящийся в естественном состоянии. Очевидно, что при неубывающей по модулю пластической деформации  $|d\varepsilon^p| \geq 0$  относительная мера (объемное содержание) микрообъемов, находящихся в упруго-пластической стадии деформации, равна интегральной вероятности распределения критериев Мизеса  $\lambda(a) = \int_{a_0}^a F(\xi) d\xi$ , если  $a_0 < a < 1$ ;  $\lambda = 1$ , если

$a = 1$ , где  $a = a(t)$  — текущее значение верхней границы значений критериев Мизеса.

Механическая модель макрообразца при описании микропластичности моделью типа Фойхта и применении условий Фойхта называется далее структурной моделью Фойхта. При непрерывной в смысле обобщенных функций плотности распределения вероятностей  $F(a)$  текущее значение верхней границы критериев Мизеса равно модулю микронапряжений в упругодеформированных микрообъемах  $a(t) = S_0 = \varepsilon_c$ . Определяющее уравнение структурной модели Фойхта имеет вид

$$S(t) = \vec{\varepsilon}(t) - (1 - \mu) \vec{\varepsilon}(t) \lambda(\varepsilon_0) + (1 - \mu) \int_{a_0}^{\varepsilon_0} \xi \vec{\varepsilon}^p(\xi, t) F(\xi) d\xi \quad (2.1)$$

где  $\varepsilon_0 = |\varepsilon|$ ,  $d\varepsilon_0 \geq 0$ ,  $a_0 \leq \varepsilon_0 \leq 1$ . Здесь и далее в формулировке определяющих уравнений не будет рассматриваться упругая стадия  $S = \vec{\varepsilon}$  при  $|S| < a_0$ . Случай  $\varepsilon_0 > 1$  соответствует включению в упругопластическое деформирование всех микрообъемов, при этом в формуле (2.1) следует положить  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\lambda = 1$ .

Единичный вектор касательной к траектории микропластической деформации в формуле (2.1) определяется решением рассмотренной выше задачи о трактриссе к траектории деформации макрообразца.

Модель макрообразца при описании микропластичности моделью типа Рейсса и применении условий Рейсса называется структурной моделью Рейсса. Для этой модели устанавливается определяющее уравнение

$$\vec{\varepsilon}(t) = S(t) + \frac{1 - \mu}{\mu} S(t) \lambda(S_0) - \frac{1 - \mu}{\mu} \int_{a_0}^{S_0} \xi \vec{\varepsilon}^p(\xi, t) F(\xi) d\xi \quad (2.2)$$

где  $S_0 = |S|$ ,  $dS_0 \geq 0$ ,  $a_0 \leq S_0 \leq 1$ . Уравнения (2.1) и (2.2) не являются взаимными обращениями, относясь к различным механическим моделям. Имеют место различные модели в зависимости от применения условий Кренера к микропластич-

ности по Фойхту или Рейссу. Определяющее уравнение структурной модели Кренера — Фойхта имеет вид

$$S(t) = u(t) - \frac{1-\mu}{1+\mu\beta} u(t) \lambda(u_0) + \frac{1-\mu}{1+\mu\beta} \int_{a_0}^{a_0} \xi F(\xi) \vec{\tau}^p(\xi, t) d\xi$$

где  $u_0 = |u|$ ,  $u = (\vec{\epsilon} + \beta S)/(1 + \beta)$ ,  $du_0 \geq 0$ ,  $a_0 \leq u_0 \leq 1$ .

Единичный вектор касательной к траектории микропластической деформации определяется из решения задачи о трактриссе, в которой эквитангенциальной кривой является годограф вектора  $(1 + \beta)u/(1 + \beta\mu)$ , а плечом трактриссы — величина  $a(1 + \beta)/(1 + \beta\mu)$ .

Ниже рассмотрены определяющие уравнения на двухзвенных ломаных траекториях напряжений или деформаций, которые являются стандартными при экспериментальной проверке различных теорий пластичности [5—7].

1. Двухзвенная ломаная  $OAB$  расположена в плоскости  $xOy$  таким образом, что первое звено  $OA$  длиной более 1 расположено по оси  $Ox$ , а второе звено  $AB$  составляет с этой осью угол  $\alpha < \pi/2$  (фиг. 5). Принимается, что одна и та же ломаная  $OAB$  является или траекторией деформаций при использовании модели Фойхта, или траекторией напряжения при использовании модели Рейсса. Радиус-вектор точки, расположенной на втором звене, можно соответственно представить формулами  $\vec{\epsilon}(t) = i \epsilon_A + \vec{\tau}_0 s(t)$ ,  $S(t) = i S_A + \vec{\tau}_0 s(t)$ ,  $\vec{\tau}_0 = i \cos \alpha + j \sin \alpha$ ,  $s(t) = Vt$ . Звено  $OA$  соответствует простому нагружению — растяжению. Рассматривается перемещение точки нагружения из точки  $A$  по закону  $s = Vt$ . Определяющие уравнения (2.1) и (2.2) структурных моделей Фойхта и Рейсса на втором звене ломаной, учитывая формулу (1.7) для составляющих единичного вектора касательных к траектории микропластических деформаций, имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon^p = (1 - \mu) \epsilon - (1 - \mu) \int_{a_0}^1 \{ i \left[ \operatorname{th} \left( \frac{s}{a} + C_1 \right) \cos \alpha + \operatorname{sech} \left( \frac{s}{a} + C_1 \right) \sin \alpha \right] + \\ + j \left[ \operatorname{th} \left( \frac{s}{a} + C_1 \right) \sin \alpha - \operatorname{sech} \left( \frac{s}{a} + C_1 \right) \cos \alpha \right] \} a F(a) da \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^p = \frac{1 - \mu}{\mu} S - \frac{1 - \mu}{\mu} \int_{a_0}^1 \{ i \left[ \operatorname{th} \left( \frac{s}{a} + C_1 \right) \cos \alpha + \operatorname{sech} \left( \frac{s}{a} + C_1 \right) \sin \alpha \right] + \\ + j \left[ \operatorname{th} \left( \frac{s}{a} + C_1 \right) \sin \alpha - \operatorname{sech} \left( \frac{s}{a} + C_1 \right) \cos \alpha \right] \} a F(a) da \end{aligned} \quad (2.4)$$

В формулах (2.3), (2.4)  $\vec{\epsilon}^p = \vec{\epsilon} - S$  — пластическая деформация образца. При  $s \geq 2$  можно положить  $\operatorname{th} x \approx 1$ ,  $\operatorname{sech} z \approx 0$  с точностью, при которой относительная погрешность выражений в квадратных скобках не превосходит 5%. Это допущение приводит к асимптотическим формулам

$$\vec{\epsilon}^p \approx (1 - \mu) i \epsilon_A + (1 - \mu) \vec{\tau}_0 [s(t) - \int_{a_0}^1 a F(a) da] \quad (2.5)$$

$$\vec{\epsilon}^p \approx \frac{1 - \mu}{\mu} i S_A + \frac{1 - \mu}{\mu} \vec{\tau}_0 [s(t) - \int_{a_0}^1 a F(a) da] \quad (2.6)$$

Согласно формулам (2.5) и (2.6), вектор приращения пластической деформации коллинеарен вектору приращения деформации или напряжения, а это обстоятельство связано с обоснованием теории малых упругопластических деформаций [2]. Участок траектории, на котором имеет место «переходный процесс» от теории пластического течения к теории малых упругопластических деформаций

(или по А. А. Ильюшину «запаздывание») называется следом [2]. Величина следа, принятая раньше двум, основана на грубой внешней оценке. Согласно экспериментальным данным [5, 6, 7], величина следа составляет 1 + 2. В работе [7] установлены эмпирические зависимости типа функционала, определенного на траектории напряжения.

2. Пусть траекторией напряжений является двухзвенная ломаная (фиг. 5), первое звено которой расположено по оси  $Ox$ , а второе составляет с этой осью угол  $\alpha > \pi/2$ . Радиус-вектор точки нагружения, расположенной на втором звене  $S(t) = iS_A + \vec{\tau}s(t)$ ,  $s(t) = Vt$ ,  $\vec{\tau}_0 = i \cos \alpha + j \sin \alpha$ , принято  $S_A > 1$ . При перемещении точки нагружения из начала координат до перегиба ломаной имеет место нагружение (растяжение), в конце которого деформация, принимая структурную модель Рейсса, равна, согласно формуле (2.2):

$$\vec{\varepsilon}_A = i \left( \frac{S_A}{\mu} - \frac{1-\mu}{\mu} \int_{a_0}^1 aF(a) da \right)$$

Если построить совокупность окружностей, являющихся поверхностями нагружения микрообъемов в момент, когда точка нагружения расположена в точке перегиба ломаной, то четко определяются стадии промежуточного упругого разгрузки микрообъемов. Относительное содержание микрообъемов, находящихся в упругопластической стадии деформации, при перемещении точки нагружения вдоль второго звена ломаной, согласно фиг. 5, будет  $\lambda(s) = 0$ , если  $s(t) < 2a_0 |\cos \alpha|$ . Если  $s(t) < 2 |\cos \alpha|$ , то  $\lambda(s) = 1$ . Если  $2a_0 |\cos \alpha| \leq s(t) \leq 2 |\cos \alpha|$ , то  $\lambda(s) = \int_{a_0}^{s/2 |\cos \alpha|} F(a) da$ .

Определяющие уравнения на микроуровне с учетом предшествующей пластической деформации сохраняют линейную форму уравнений (1.1) и (1.2) только для приращений параметров  $S - S_A = \vec{\varepsilon}^k - \vec{\varepsilon}_A^k$  для всех  $k$  таких, что  $s(t) < 2a^k |\cos \alpha|$ ,  $S - S_A = \mu (\vec{\varepsilon}^k - \vec{\varepsilon}_A^k) + (1-\mu)a^k(\vec{\tau}^p(t) - i)$  для всех  $k$ , таких что  $s(t) \geq 2a^k |\cos \alpha|$ .

Определяющее уравнение структурной модели Рейсса после осреднения определяющих уравнений на микроуровне имеет вид  $\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}_A = S - S_A$ , если  $s(t) < 2a_0 |\cos \alpha|$ . Если  $2a_0 |\cos \alpha| \leq s(t) \leq 2 |\cos \alpha|$ , то

$$\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}_A = S - S_A + \frac{1-\mu}{\mu} \lambda(s) (S - S_A) - \frac{1-\mu}{\mu} \int_{a_0}^{s/2 |\cos \alpha|} (\tau^p - i) aF(a) da \quad (2.7)$$

Если  $s(t) > 2 |\cos \alpha|$ , то определяющее уравнение будет таким

$$\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}_A = \frac{S - S_A}{\mu} + \frac{1-\mu}{\mu} \int_{a_0}^1 [\tau^p - i] aF(a) da \quad (2.8)$$

Единичный вектор касательной к траектории микропластической деформации равен  $\tau^p = i dx/ds + j dy/ds$ , где составляющие вектора определяются по формулам (1.7), (1.8).

При  $\alpha = \pi$  имеет место перемена направления нагружения  $S = i(S_A - s(t))$ , и определяющие уравнения (2.7), (2.8) принимают вид

$$\frac{\varepsilon_A - \varepsilon}{2} = \frac{S_A - S}{2} + \frac{1-\mu}{\mu} \int_{a_0}^{(S_A - S)/2} \int_{a_0}^{\xi} F(a) da d\xi \quad (2.9)$$

$$2a_0 \leq S_A - S = s(t) \leq 2$$

$$\frac{\varepsilon_A - \varepsilon}{2} = \frac{S_A - S}{2\mu} - \frac{1 - \mu}{\mu} \int_{a_0}^1 aF(a) da, \quad S_A - S = s(t) > 2. \quad (2.10)$$

Формулы (2.9) и (2.10) соответствуют известному принципу Мазинга, описывающему идеальный эффект Баушингера [11].

При  $s \rightarrow \infty$   $\vec{\tau}^p \rightarrow \vec{\tau}_0$  имеет место переход к теории малых упругопластических деформаций аналогично рассмотренному выше.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением//Прикладные задачи механики. Т. 1. М.: Наука, 1986. С. 84—104.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
3. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Об учете микронапряжений в теории пластичности//ММТ. 1968. № 3. С. 82—91.
4. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности и ползучести металлов, учитывающие микронапряжения//Изв. АН СССР. МТГ, 1981. № 5. С. 99—110.
5. Васин Р. А. Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении//Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ., 1971. Вып. 1. С. 59—126.
6. Шишмарев О. А., Щербо А. Г. Образ процесса нагружения для двузначных ломаных траекторий деформаций с углом излома более 90°//Изв. АН СССР. МТГ. 1982. № 5. С. 185—188.
7. Ohashi Y., Kurita Y., Suzuki T., Tokuda M. Experimental examination of the hypothesis of local determinability in the plastic deformation of metals//J. Mech. Phys. Solids. 1981. V. 29. № 1. P. 51—67.
8. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения//ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 78—89.
9. Ziegler H. A modification of Prager's hardening rule//Qurt. Appl. Math. 1959. V. 17. № 1. P. 55—65.
10. Саселов А. А. Плоские кривые. М.: Физматгиз. 1960. 293 с.
11. Masing G. Eigenspannungen und Verfestigung beim Messing//Proc. of the 2nd Internat. Congress of Appl. Mech. Zurich. 1926. P. 332—335.

Воронеж

Поступила в редакцию  
3.X.1988