

ВОЛНЫ РЕЛЕЯ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С  
 ПАРОЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭЛЕКТРОДОВ

Исследуются поверхностные электроупругие волны Релея, возбуждаемые двумя разноименно заряженными электродами на границе пьезоэлектрического полупространства классов  $6mm$ ,  $4mm$ , когда ось симметрии шестого или четвертого порядков перпендикулярна свободной от механических нагрузок граничной поверхности. Предполагается, что электроды невесома, имеют пренебрежимо малую жесткость, а пьезоэлектрическое полупространство находится в электрическом контакте с изотропной диэлектрической средой.

Отметим, что ранее подобная задача решалась в [1] в предположении малости взаимосвязи механических и электрических полей. Это предположение приводит к двухпарциальной волне Релея, которая в действительности является трехпарциальной, и не позволяет описать ряд других эффектов (например, волну электростатического потенциала в вакууме). В работе [2] изучена задача определения электроупругих волновых полей в пьезоэлектрическом полупространстве с периодической системой электродов. В [3] предлагается для решения рассматриваемых задач использовать функции Грина.

В данной работе задача возбуждения волн Релея в пьезоэлектрическом полупространстве решается с использованием тройных интегральных уравнений. Эффективность этого метода для изучения волн Гуляева — Блюстейна показана в [4].

1. Определение сопряженных электромеханических полей, возбуждаемых в пьезоэлектрическом полупространстве симметрии класса  $6mm$  (или  $4mm$ ) в случае плоской деформации, не зависящей от переменной  $x_2$  (фиг. 1), связано с решением системы уравнений [5] в области пьезоэлектрика  $x_3 > 0$ :

$$c_{11}^E u_{,11} + c_{44}^E u_{,33} + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{,3,13} + (e_{31} + e_{15}) \varphi_{,13} + \rho \omega^2 u_1 = 0 \quad (1.1)$$

$$(c_{13}^E + c_{44}^E) u_{,1,13} + c_{44}^E u_{,3,11} + c_{33}^E u_{,3,33} + e_{33} \rho_{,33} + e_{15} \rho_{,11} + \rho \omega^2 u_3 = 0$$

$$(e_{31} + e_{15}) u_{,1,13} + e_{15} u_{,3,11} + e_{33} u_{,3,33} - \epsilon_{11}^S \varphi_{,11} - \epsilon_{33}^S \varphi_{,33} = 0$$

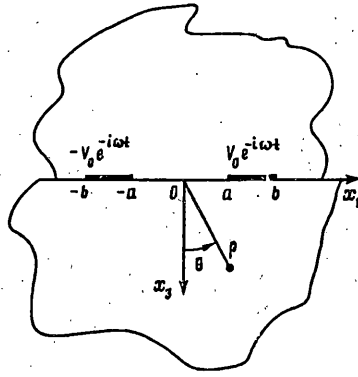
и определением потенциала  $\varphi^*$  в области изотропного диэлектрика  $x_3 < 0$  из решения уравнения Лапласа

$$\varphi_{,11}^* + \varphi_{,33}^* = 0 \quad (1.2)$$

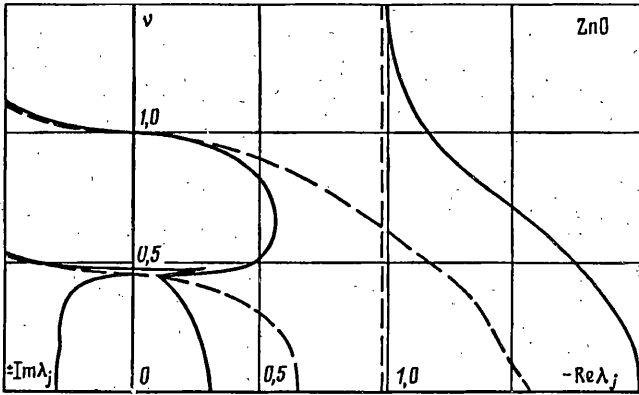
Здесь  $c_{ij}^E$ ,  $e_{ij}^S$ ,  $e_{ij}$ ,  $\rho$  — электротехнические характеристики пьезоэлектрика,  $\omega$  — круговая частота, запятая в индексе обозначает частную производную по соответствующей переменной,  $u_1$ ,  $u_3$  и  $\varphi$  обозначают проекции вектора смещения и потенциал электрического поля в пьезоэлектрическом полупространстве.

Решение системы (1.1) строится в предположении, что граница  $x_3 = 0$  пьезоэлектрика свободна от механических нагрузок, т. е.

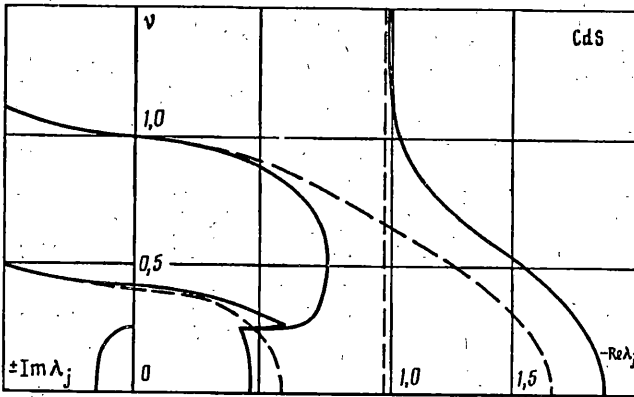
$$\sigma_{13}(x_1, 0) = \sigma_{33}(x_1, 0) = 0, \quad |x_1| < \infty \quad (1.3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

и кроме этого выполнены условия непрерывности для электрического поля

$$\varphi(x_1, 0) = \varphi^*(x_1, 0), \quad |x_1| < \infty \quad (1.4)$$

$$\varphi(x_1, 0) = V, \quad -b < x_1 < -a, \quad \varphi(x_1, 0) = V, \quad a < x_1 < b \quad (1.5)$$

$$D_3(x_1, 0) = D_3^*(x_1, 0), \quad -\infty < x_1 < -b, \quad -a < x_1 < a, \quad b < x_1 < \infty$$

где  $D_3, D_3^*$  — компоненты вектора электрической индукции в пьезоэлектрике и изотропном диэлектрике соответственно. Заметим, что изменчивость всех величин от времени  $t$  характеризуется фактором  $e^{-\omega t}$ .

С учетом симметрии решение системы (1.1) представляется в форме интегралов Фурье

$$u_1^*(x_1^*, x_3^*) = \int_0^{\infty} U(p) e^{\lambda p x_3^*} \cos(p x_1^*) dp \quad (1.6)$$

$$\{u_3^*(x_1^*, x_3^*), \varphi^*(x_1^*, x_3^*)\} = \int_0^{\infty} \{W(p), \Phi(p)\} e^{\lambda p x_3^*} \sin(p x_1^*) dp$$

и после подстановки (1.6) в (1.1) приводится к однородной системе алгебраических уравнений с матрицей  $\|A\|$ , элементы которой после преобразований определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 - \mu_1 \lambda^2 - \nu^2, \quad a_{12} = a_{21} = -\mu_2 \lambda, \quad a_{13} = -\lambda \\ a_{22} &= -\mu_1 + \mu_4 \lambda^2 + \nu^2, \quad a_{23} = \mu_3 \lambda^2 - \mu_6, \quad a_{31} = k_1^2 \lambda^2 \\ a_{33} &= k_2 - k_3 \lambda^2, \quad a_{33} = \lambda^2 - \mu_7^2 \\ \mu_1 &= c_{44}^E / c_{11}^E, \quad \mu_2 = (c_{13}^E + c_{44}^E) / c_{11}^E, \quad \mu = c_{33}^E / c_{11}^E \\ \mu_5 &= e_{33} / (e_{31} + e_{15}), \quad \mu_6 = e_{15} \mu_5 / e_{33}, \quad \mu_7^2 = \epsilon_{11}^S / \epsilon_{33}^S \\ k_1^2 &= (e_{31} + e_{15})^2 / (c_{11}^E \epsilon_{33}^S), \quad k_2 = e_{15} (e_{31} + e_{15}) / (c_{11}^E \epsilon_{33}^S) \\ k_3 &= e_{33} (e_{31} + e_{15}) / (c_{11}^E \epsilon_{33}^S), \quad \nu = \omega L / (p \vartheta_x) = 2\pi L / (\lambda_x p) \\ \vartheta_x^2 &= c_{11}^E / \rho, \quad \lambda_x = 2\pi \vartheta_x / \omega, \quad u_k^* = u_k / L, \quad x_k^* = x_k / L \\ (k &= 1, 3), \quad \varphi^* = \varphi / \gamma_0, \quad \gamma_0 = c_{11}^E L / (e_{31} + e_{15}), \quad \varphi^v = \varphi_b / \gamma_0 \end{aligned}$$

( $L$  — характерный размер).

Нетривиальное решение получаемой системы алгебраических уравнений существует при условии, что  $\lambda$  удовлетворяет характеристическому уравнению  $\det \|A\| = 0$ , которое эквивалентно бикубическому уравнению

$$\lambda^6 + (a_2 \nu^2 + a_0) \lambda^4 + (b_4 \nu^4 + b_2 \nu^2 + b_0) \lambda^2 + (c_4 \nu^4 + c_2 \nu^2 + c_0) = 0 \quad (1.7)$$

где  $a_2, a_0, \dots, c_2, c_0$  некоторые постоянные, определяющиеся через  $c_{ij}^E, e_{ij}, \epsilon_{ij}^S$ .

Уравнение (1.7) анализировалось с использованием ЭВМ. На фиг. 2, 3 представлены зависимости корней уравнения (1.7) от параметра  $\nu$  для кристаллов  $ZnO, CdS$  [6], причем штриховые линии относятся к случаю, когда пьезоэффект не учитывается. Как видно, даже для слабого пьезоэлектрика влияние пьезоэффекта изменяет тип корней характеристического уравнения, что согласуется с результатами работы [7]. Качественное поведение корней уравнения (1.7) в зависимости от параметра  $\nu$  сохраняется для ЦТС-19, PZT-4 и др.

Заметим, что методом возмущения [8] можно получить асимптотическое представление корней уравнения (1.7) при  $\nu \rightarrow 0$ . В этом случае имеем ( $\sigma = \lambda^2$ ):

$$\sigma = \sigma_0 - \nu^2 (c_2 + b_2 \sigma_0 + a_2 \sigma_0^2) / (2a_0 \sigma_0 + b_0) \quad (1.8)$$

где  $\sigma_0$  — любой из корней уравнения (1.7) при  $\nu = 0$ .

Можно показать, что при  $\nu \rightarrow \infty$  для корней уравнения (1.7) верны приближенные представления

$$\lambda_{1,2} = \pm \mu_7, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega/(p\vartheta_2), \quad \lambda_{5,6} = \pm i\omega/(p\vartheta_3) \quad (1.9)$$

$$\vartheta_2^2 = c_{33}^E (1 + k_{33}^2)/\rho, \quad k_{33}^2 = e_{33}^2/(c_{33}^E \epsilon_{33}^S), \quad \vartheta_3^2 = c_{44}^E/\rho$$

Заметим, что с учетом условий излучения из шести корней уравнения (1.7) выбираются те, у которых  $\text{Re } \lambda_j < 0$ , если же в некотором диапазоне параметра  $\nu$  действительная часть корня обращается в ноль, то тогда выбирается корень, у которого  $\text{Im } \lambda_j < 0$ .

Если обозначить  $\alpha(\lambda_j) = \alpha_j = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$ ,  $\beta(\lambda_j) = \beta_j = a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}$ ,  $\gamma(\lambda_j) = \gamma_j = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  ( $j = 1, 2, 3$ ), то окончательно решение системы (1.1), удовлетворяющее условиям излучения, представляется в форме (в дальнейшем знак \* у всех величин опущен)

$$u_1(x_1, x_3) = \int_0^\infty \sum_{j=1}^3 \alpha_j U_j(p) e^{\lambda_j p x_3} \cos(px_1) dp \quad (1.10)$$

$$\{u_3(x_1, x_3), \varphi(x_1, x_3)\} = \int_0^\infty \sum_{j=1}^3 \{\beta_j, \gamma_j\} U_j(p) e^{\lambda_j p x_3} \sin(px_1) dp$$

Входящие в (1.10) неизвестные функции  $U_j(p)$  определяются условиями (1.3), которые приводят к следующей зависимости

$$U_j(p) = \Delta_j(p) U_0(p) \quad (1.11)$$

$$m_j = -c_{13}^E \alpha_j / c_{33}^E + \beta_j \lambda_j + c_{11}^E e_{33} \gamma_j \lambda_j / (c_{33}^E e_{31} + c_{33}^E e_{15})$$

$$n_j = \alpha_j \lambda_j + \beta_j + c_{11}^E e_{15} \gamma_j / (c_{44}^E e_{31} + c_{44}^E e_{15})$$

$$\Delta_1 = m_2 m_3 - m_3 n_2, \quad \Delta_2 = m_3 n_1 - m_1 n_3, \quad \Delta_3 = m_1 m_2 - m_2 n_1$$

и  $U_0(p)$  — неизвестная функция.

Потенциал электрического поля изотропного диэлектрического полупространства с учетом условия (1.4) и поведения при  $x_3 \rightarrow -\infty$  представляется соотношением

$$\varphi^*(x_1, x_3) = \int_0^\infty R_1(p) U_0(p) e^{p x_3} \sin(px_1) dp$$

Вычисляя нормальные составляющие вектора электрической индукции и удовлетворяя условиям (1.5), приходим к системе тройных интегральных уравнений, которая после преобразований представима в форме

$$\int_0^\infty \frac{R_1(p)}{R_2(p) + \epsilon_0 R_1(p)} U_*(p) \sin(px_1) dp = V_*, \quad a < x_1 < b \quad (1.12)$$

$$\int_0^\infty p U_*(p) \sin(px_1) dp = 0, \quad 0 \leq x_1 < a, \quad b < x_1 < \infty$$

$$R_1 = \sum_{j=1}^3 \gamma_j \Delta_j, \quad R_2 = \sum_{j=1}^3 q_j \Delta_j$$

$$q_j = -\gamma_j + e_{15} (e_{31} + e_{15}) (\lambda_j \alpha_j + \beta_j) / (s_{11}^E \epsilon_{11}^S) \quad (1.13)$$

$$U_*(p) = (R_2 + \epsilon_0 R_1) U_0(p), \quad V_* = V_0/\gamma_0, \quad \epsilon_0 = \epsilon_b/\epsilon_{33}^S$$

Решению системы (1.12) предшествовало численно-аналитическое изучение свойств функции  $R_*(p) = R_1(p) / [R_2(p) + \epsilon_0 R_1(p)]$ . Использование асимптотических формул (1.4), (1.5) позволило установить, что при  $p \rightarrow 0$  или  $p \rightarrow \infty$  функция  $R_*$  ограничена. Методом половинного деления исследовались нули уравнения  $R_2(p) + \epsilon_0 R_1(p) = 0$ . Для ряда материалов (CdS, ZnO, ЦТС-19, PZT-4 и др.) установлено, что данное уравнение имеет не менее одного корня, причем в случае, когда корней более одного, то наименьший из них представляет простой полюс функции  $R_*(p)$ , а другие корни являются устранимыми особенностями.

Не останавливаясь на деталях решения системы (1.12), отметим что эта система так же, как и в [4], сводится к бесконечной системе алгебраических уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Omega_{nm} = 2\delta_{m0} \quad (m = 0, 1, \dots) \quad (1.14)$$

коэффициенты которой определяются соотношением

$$\Omega_{nm} = \int_0^{\infty} R_*(p) S_n(\eta/\alpha) S_m(\eta/\alpha) J_n(\eta) J_m(\eta) \eta^{-1} d\eta \quad (1.15)$$

$$\delta_{00} = 1, \quad \delta_{0m} = 0 \quad (m \geq 1), \quad \alpha = (b-a)/(b+a), \quad 2\eta = p(b-a)$$

При этом решение системы (1.13) связано с функцией  $U_*(p)$  выражением

$$pU_*(p) = \frac{e_{15} + e_{31}}{c_{11}^E L} \sum_{n=0}^{\infty} a_n S_n\left(p \frac{b+a}{2}\right) J_n\left(p \frac{b-a}{2}\right) \quad (1.16)$$

$$S_n(\dots) = \left[ (1 - (-1)^n)^{\frac{n-1}{2}} \cos(\dots) + (1 + (-1)^n) (-1)^{n/2} \sin(\dots) \right]$$

$J_n(\dots)$  — функция Бесселя первого рода  $n$ -го порядка.

2. Использование формул (1.10), (1.11), (1.13), (1.16) позволяет определить искомые смещения и потенциал в пьезоэлектрическом полупространстве. В частности, для амплитуды смещения  $u_1(x_1, x_3)$  имеем

$$u_1(x_1, x_3) = \frac{(e_{15} + e_{31}) V_0}{c_{11}^E L} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^3 \alpha_j \Delta_j e^{j p x_3} Q(p) \sin(p x_1) dp \quad (2.1)$$

$$Q(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n S_n\left(p \frac{b+a}{2}\right) J_n\left(p \frac{b-a}{2}\right) / [p(R_2(p) + \epsilon_0 R_1(p))] ]$$

Используя формулу  $\sin(p x_1) = -i \operatorname{sh}(i p x_1)$  и вводя полярные координаты  $\rho$ ,  $\theta$ , соотношениями  $x_1 = \rho \sin \theta$ ,  $x_3 = \rho \cos \theta$  преобразуем (2.1) к виду, содержащему следующие однотипные интегралы

$$I^{\pm} = \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^3 \alpha_j \Delta_j e^{j p \rho (\alpha_j \cos \theta - i \sin \theta)} Q(p) dp \quad (2.2)$$

Аналогичные интегралы с заменой  $\alpha_j$  на  $\beta_j$  или на  $\gamma_j$  содержатся в выражениях для  $u_3(x_1, x_3)$  и  $\varphi(x_1, x_3)$  соответственно.

Численные расчеты, проведенные на ЭВМ, показали, что функция  $\Sigma \alpha_j \Delta_j / (R_2 + \epsilon_0 R_1)$  ( $j=1, 2, 3$ ) и аналогичные ей для  $u_3$  и  $\varphi$  имеют один полюс, который определяется наименьшим корнем уравнения  $R_2(\nu) + \epsilon_0 R_1(\nu) = 0$ . Асимптотический анализ соотношения (2.2) при  $\rho \gg 1$  приводится на основе метода стационарной фазы [9]. Учитывая вклад полюсной точки и используя метод стационарной фазы, для  $\rho \gg 1$  получим

$$u_1(\rho, \theta) = u_{1R}^{\pm}(\rho, \theta) + \frac{(e_{15} + e_{31}) V_0}{c_{11}^E L} e^{-\pi i/4} \times \\ \times \sum_{j=2}^3 \left[ \frac{2\pi}{\rho |\varphi_j''(v_j(\theta))|} \right]^{1/2} \alpha_j(v_j(\theta)) \Delta_j(v_j(\theta)) Q(p_j(v_j(\theta))) e^{i\varphi_j^{\pm}(v_j(\theta))} \quad (2.3)$$

Здесь  $v_R$  — корень уравнения  $R_2(v) + \varepsilon_0 R_1(v) = 0$ ,  $p_R = \omega L/v_R$ ,  $v_R = v_R v_x$

$$u_{1R}^{\pm}(\rho, \theta) = \frac{(e_{15} + e_{31}) V_0}{2c_{11}^E L} \pi i \sum_{j=1}^3 \alpha_j(v_R) \Delta_j(v_R) \exp(\rho p_R (\lambda_j(v_R) \cos \theta \pm i \sin \theta)) Q_R(v_R) \\ Q_R(v_R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n S_n \left( p_R \frac{b+a}{2} \right) J_n \left( p_R \frac{b-a}{2} \right) / [p_R (R_2'(p_R) + \varepsilon_0 R_1'(p_R))] \quad (2.4)$$

$$dR_k(p_R)/dp = R_k'(p_R) \quad (k = 1, 2), \quad \varphi_j^{\pm} = i [\operatorname{Im}(\lambda_j(v) \cos \theta \pm \sin \theta)]$$

Запись  $\varphi_j(v_j(\theta))$  означает, что для фиксированного направления  $\theta = \theta_0$  определено значение  $v_j(\theta)$ , при котором имеет место уравнение  $[\varphi_j^{\pm}(v_j(\theta))]' = 0$ .

Заметим, что первое слагаемое в (2.3) описывает квазипродольные и квазиперечные объемные волны, скорость которых зависит от направления  $\theta$  и определяется условием стационарности фазы  $\varphi_j'(v(\theta)) = 0$ . Можно показать, используя асимптотическое представление корней характеристического уравнения, что при  $\theta = 0$  скорости этих волн определяются величинами  $v_z$  и  $v_x$ .

При вычислении интегралов вида (2.2) учитывается наличие полюса подынтегральной функции, обход которого согласуется с условиями излучения. Вклад этой полюсной точки соответствует первому слагаемому в (2.3) и определяет пьезоэлектрическую волну Релея.

Характеристики волн Релея представляют значительный практический интерес. Приведем окончательные выражения для смещений и потенциала электрического поля волны Релея в пьезоэлектрическом полупространстве ( $\lambda_R$  — длина волны Релея):

$$u_{1R} = -iN_* \frac{\lambda_R}{\pi L} U_R(x_3) H(t, x_1), \quad u_{3R} = -N_* \frac{\lambda_R}{\pi L} W_R(x_3) H(t, x_1) \\ H(t, x_1) = Q_R(v_R) \exp[i\omega(x_1 - v_R t)/v_R] \\ \varphi_R = -\frac{\pi}{2} \frac{(e_{31} + e_{15}) V_0}{c_{11}^E L} \Phi_R(x_3) H(t, x_1) \quad (2.5)$$

$$N_* = \pi^2 (e_{31} + e_{15}) V_0 / (c_{11}^E \lambda_R), \quad \lambda_R = v_R \lambda_x$$

$$U_R = \sum_{j=1}^3 \alpha_j e_j, \quad W_R = \sum_{j=1}^3 \beta_j e_j, \quad \Phi_R = \sum_{j=1}^3 \gamma_j e_j, \quad e_j = \Delta_j \exp[2\pi \lambda_j(v_R) x_3 / \lambda_R]$$

Отметим, что соотношения (2.5) представляют волну Релея, распространяющуюся в положительном направлении оси  $x_1$ . Аналогичная волна распространяется и в отрицательном направлении оси  $x_1$ .

Если обозначить

$$\sum_{11} = \sum_{j=1}^3 t_j e_j, \quad \sum_{13} = \sum_{j=1}^3 n_j e_j, \quad \sum_{33} = \sum_{j=1}^3 m_j e_j \\ d_{11} = \sum_{j=1}^3 r_j e_j, \quad d_{33} = \sum_{j=1}^3 q_j e_j \quad (2.6)$$

$$t_j = -\alpha_j + c_{13}^E \lambda_j \beta_j / c_{11}^E + e_{31} \lambda_j \gamma_j / (e_{31} + e_{15})$$

$$r_j = -\gamma_j + e_{15} (e_{31} + e_{15}) (\lambda_j \alpha_j + \beta_j) / (c_{11}^E \varepsilon_{11}^S)$$

то компоненты тензора напряжений и вектора электрической индукции волны Релея могут быть представлены соотношениями

$$\sigma_{11R} = -N_* \Sigma_{11} H(t, x_1), \quad \sigma_{33R} = -N_* \Sigma_{33} H(t, x_1), \quad \sigma_{13R} = -i N_* \Sigma_{13} H(t, x_1) \quad (2.7)$$

$$D_{3R} = -N_* d_{33} H(t, x_1), \quad D_{1R} = -i N_* d_{11} H(t, x_1)$$

Соотношения (2.5), (2.7) позволяют определить энергетические характеристики распространяющейся трехпарциальной волны Релея. Средний за период колебаний поток механической энергии в направлениях координатных осей  $x_1, x_3$  определяется формулами [3, 4]:

$$2P_{1R}^{(e)} = -\omega \text{Im} \{u_{1R} \sigma_{11R}^* + u_{3R} \sigma_{13R}^*\}, \quad 2P_{3R}^{(e)} = -\omega \text{Im} \{u_{1R} \sigma_{13R}^* + u_{3R} \sigma_{33R}^*\} \quad (2.8)$$

и с учетом (2.5), (2.7) после вычислений получим

$$P_{1R}^{*(e)} = -\text{Re} \{U_R \Sigma_{11}^* - \mu_1 W_R \Sigma_{13}^*\}, \quad P_{3R}^{(e)} = 0 \quad (2.9)$$

Здесь знак «\*» обозначает комплексно-сопряженную величину, а

$$P_{1R}^{*(e)} = P_{1R}^{(e)} / N_e, \quad 2N_e = \omega \pi^3 (e_{31} + e_{15})^2 V_0^2 |Q_R(\nu_R)|^2 / (c_{11}^E \lambda_R)$$

Аналогичные вычисления потока электрической энергии, для которого получены соотношения

$$P_{1R}^{*(E)} = -\text{Re} \{\Phi_R d_{11}^*\}, \quad P_{3R}^{(E)} = 0 \quad (2.10)$$

$$P_{1R}^{*(E)} = P_{1R}^{(E)} / N_E, \quad 2N_E = \pi^3 \varepsilon_{11}^S V_0^2 |Q_R(\nu_R)|^2 / (2\lambda_R)$$

Суммарный поток механической и электрической энергии, переносимой волной Релея, определяется соотношением

$$P_{1R}^{(eE)} = N_E \left[ 2 \frac{(e_{15} + e_{31})^2}{c_{11}^E \varepsilon_{11}^S} P_{1R}^{*(e)} + P_{1R}^{*(E)} \right] \quad (2.11)$$

Если проинтегрировать (2.9) — (2.11) по переменной  $x_3$  от  $x_3 = 0$  до  $x_3 = \infty$ , то для суммарного потока получим

$$Q_{1R}^{(eE)} = \lambda_R N_E \left[ 2 \frac{(e_{15} + e_{31})^2}{c_{11}^E \varepsilon_{11}^S} Q_{1R}^{*(e)} + Q_{1R}^{*(E)} \right] \quad (2.12)$$

$$Q_{1R}^{*(e)} = \int_0^{\infty} P_{1R}^{(e)}(x_3/\lambda_R) d(x_3/\lambda_R), \quad Q_{1R}^{*(E)} = \int_0^{\infty} P_{1R}^{(E)}(x_3/\lambda_R) d(x_3/\lambda_R)$$

Заметим, что  $P_{1R}^{(e)}$ ,  $P_{1R}^{(E)}$  не зависят от решения системы (1.14), а определяются только распределением электромеханических полей по переменной  $(x_3/\lambda_R)$ . Как следует из (2.12), поток механической энергии пропорционален безразмерному комплексу, связанному с коэффициентами электромеханической связи.

Не останавливаясь на вычислениях, приведем формулы для потока электрической энергии в вакууме. Имеем

$$P_{1R}^{*(vE)} = \varepsilon_b | \Phi_R |^2 / \varepsilon_{11}^S, \quad P_{3R} = 0, \quad P_{1R}^{*(vE)} = P_{1R}^{(vE)} / N_E \quad (2.13)$$

В технических приложениях для построения электрических схем замещения необходимо знание таких параметров как емкость электрода и ток. Для вычисления

этих параметров заметим, что для плотности зарядов под электродом верна формула

$$q(x_1) = \frac{\epsilon_{33}^s V_0}{[(b-x_1)(x_1-a)]^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n \left( 2 \frac{x_1-a}{b-a} - 1 \right), \quad a < x_1 < b \quad (2.14)$$

так что суммарный заряд на электроде будет

$$S_q(t) = \pi \epsilon_{33}^s V_0 e^{-\omega t} a_0$$

Тогда для емкости  $C$  и тока верны формулы

$$C = \pi \epsilon_{33}^s a_0, \quad I(t) = -i\omega \pi \epsilon_{33}^s a_0 V_0 e^{-\omega t} = YV(t) \quad (2.15)$$

где  $Y = -i\omega C$  — комплексное сопротивление,  $V(t) = V_0 e^{-\omega t}$ .

Заметим, что соотношение (2.15) позволяет анализировать возбуждение волн Релея генератором тока, при этом в (2.15)  $V(t)$  считается неизвестным, а  $I(t)$  — известный ток.

Как следует из (2.14), скачок плотности электрических зарядов на электроде имеет корневые особенности при  $x_1 \rightarrow a + 0$  и  $x_1 \rightarrow b - 0$ .

Определяя коэффициент интенсивности плотности электрических зарядов [10], получим

$$K_q^0(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad K_q^0(b) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad K_q^0(\cdot) = \sqrt{\frac{b-a}{2\pi}} \frac{K_q(\cdot)}{\epsilon_{33}^s V_0} \quad (2.16)$$

Можно показать, что особенность корневого типа характеризует распределение компоненты вектора электрической индукции  $D_3(x_1, x_3)$  и приводит к следующим выражениям для коэффициентов интенсивности индукции при  $x_1 \rightarrow a$  и  $x_1 \rightarrow b$ ,  $x_3 = 0$ :

$$K_D^0(\cdot) = \frac{R_2^\infty}{R_2^\infty + \epsilon_0 R_1^\infty} K_q^0(\cdot), \quad R_k^\infty = \lim_{p \rightarrow 0} R_k(p) \quad (k = 1, 2) \quad (2.17)$$

Так как в пьезоэлектриках электрические и механические поля связаны уравнениями состояния, то корневые особенности у краев электрода присутствуют и у механических напряжений. В данном случае нагружения пьезоэлектрика можно показать, что механическое напряжение  $\sigma_{11}$  имеет у краев электрода особенности, коэффициент интенсивности которых пропорционален  $K_q^0$ . Опуская громоздкие преобразования, приведем окончательное выражение для коэффициента интенсивности напряжений

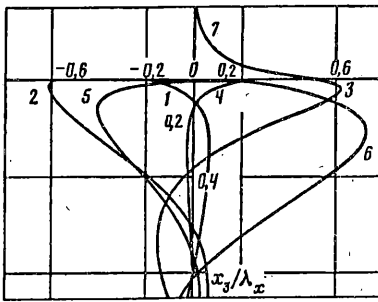
$$K_\sigma^0(\cdot) = \frac{R_3^\infty}{R_2^\infty + \epsilon_0 R_1^\infty} K_q^0(\cdot), \quad R_3^\infty = \lim_{p \rightarrow 0} R_3(p) \quad (2.18)$$

$$R_3(p) = \sum_{j=1}^3 t_j \Delta_j, \quad K_\sigma^0(\cdot) = \left( \frac{b-a}{2\pi} \right)^{1/2} \frac{K_\sigma(\cdot)}{(e_{15} + e_{31}) V_0}$$

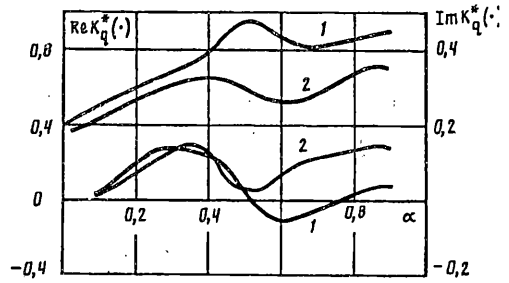
Соотношения (2.16) — (2.18) могут быть использованы для анализа процессов электромеханического разрушения пьезоэлектрика [4].

3. Полученные выше результаты использовались для численного анализа полей в пьезоэлектрике и вакууме по специально созданной программе EERW. Программа позволяет проводить следующие расчеты: определяет корни характеристического уравнения в заданном диапазоне изменения параметра  $\nu$ , производит поиск полюсной точки и определяет скорость волны Релея, вычисляет несобственные интегралы в смысле главного значения и определяет решение системы (1.14), определяет распределение смещений, потенциала, напряжений

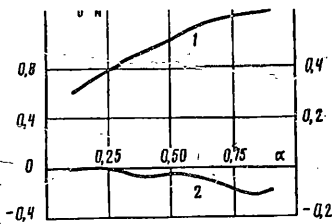




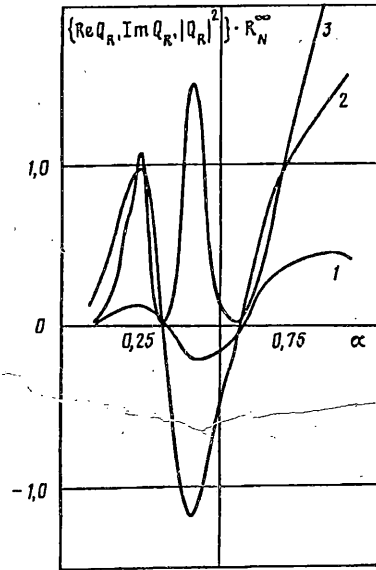
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

и других величин, связанных с волной Релея, включая и ее энергетические характеристики. Кроме этого, предусмотрен блок, позволяющий рассчитывать изменения показателей преломления, обусловленные пьезооптическими и электрооптическими эффектами, что весьма важно при анализе акустооптических модуляторов [11].

Ниже приводятся некоторые результаты, полученные по этой программе для ZnO. На фиг. 4 кривыми 1—7 представлены графики мнимых частей функций  $U_R$ ,  $W_R$ ,  $10\Phi_R$ ,  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{13}$ ,  $10\Sigma_{33}$ ,  $10h_V = \sum_{j=1}^3 \gamma_j \Delta_j \exp(p_R z)$  соответственно. Для данного кристалла при  $\nu = \nu_R$  действительные части этих функций нулевые.

На фиг. 5 представлено распределение коэффициентов интенсивности плотности зарядов  $K_q^*(a)$  (кривая 1) и  $K_q^*(b)$  (кривая 2), причем верхняя пара кривых относится к  $\text{Re} K_q^*(\cdot)$ , а нижняя — к  $\text{Im} K_q^*(\cdot)$ ,  $K_q^* = K_q^0 R_N^\infty$ ,  $R_N^\infty = (R_2^2 + \epsilon_0 R_1^2) / R_1^\infty$ .

На фиг. 6 представлено изменение действительной (кривая 1) и мнимой (кривая 2) частей коэффициента  $a_0 R_N^\infty$ , через который выражаются суммарный ток и другие параметры задачи, от параметра  $\alpha = (b - a) / (b + a)$ .

На фиг. 7 представлено изменение функций  $\text{Re} Q_R(\nu_R) R_N^\infty$ ,  $\text{Im} Q_R(\nu_R) R_N^\infty$ ,

$|Q_R(\nu_R)|^2 R_N^2$  (кривые 1—3), характеризующие энергию, переносимую волной Релея, от параметра  $\alpha$ .

Представленные расчеты проведены для случая, когда  $\lambda_x = 1$  мм при этом  $\lambda_R = 0,409\lambda_x$ ,  $\nu_R = 2492$  м/с, предполагалось, что  $b-a = \lambda_x/4$ , а в системе (1.14) удерживалось до пяти уравнений и дальнейшее увеличение порядка системы не приводило к заметному уточнению результатов.

Автор признателен проф. В. З. Партону и проф. Б. А. Кудрявцеву за внимание и поддержку работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Joshiu S. G., White R. M.* Excitation and detection of surface elastic waves in piezoelectric crystals//J. Acoust. Soc. Amér. 1969. V. 46. № 1. Pt I. P. 17—27.
2. *Финкельштейн А. Б.* Волны в электроупругой полугораниченной среде с периодической системой электродов//Изв. Сев.-кавказ. науч. центра высш. шк. Естеств. науки. 1986. № 1. С. 59—62.
3. *Балакирев М. К., Гилинский И. А.* Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 239 с.
4. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 с.
5. *Улитко А. Ф.* О некоторых особенностях постановки граничных задач электроупругости//Современные проблемы механики и авиации. М.: 1982. С. 290—300.
6. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах: Применение для обработки сигналов. М.: Наука, 1982. 424 с.
7. *Кучеров И. Я., Федорченко А. М.* Влияние пьезоэффекта на упругие волны в ограниченных кристаллах//Укр. физ. ж. 1971. Т. 16. № 9. С. 1567—1569.
8. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
9. *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
10. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А., Сеник Н. А.* Об одном критерии электрического разрушения диэлектриков в сильно неоднородных полях//Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 3. С. 611—615.
11. *Бондаренко В. С., Зоренко В. П., Чкалова В. В.* Акустооптические модуляторы света. М.: Радио и связь, 1988. 134 с.

Москва

Поступила в редакцию  
26.IV.1990