

УДК 539.376

© 1992 г. Ю. Н. РАДАЕВ

## ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ЧЕТВЕРТЬПЛОСКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЛОСКОГО ШТАМПА

Рассматривается задача о вдавливании эксцентрично нагруженного плоского штампа в четвертьплоскость, частично опирающуюся на гладкую жесткую стенку. Подобные задачи возникают при расчете давления на стенки шахт, каналов и тоннелей.

Приводится жесткопластический анализ задачи в условиях плоской деформации: построено поле напряжений в зоне пластического течения и доказана возможность его продолжения в жесткую зону, определены значения вдавливающей силы, силы сопротивления жесткой стенки и реакции жесткой части четвертьплоскости. Поле напряжений получено в результате точного решения нелинейного уравнения для функции напряжений Эйри. Метод решения заключается в выходе в двумерное комплексное многообразие, разделении переменных в указанном уравнении и последующем конформном отображении зоны пластического течения на некоторую область вспомогательного листа комплексной плоскости с разрезами вдоль вещественной оси. Конформное отображение восстанавливает скрытую симметрию задачи, преобразуя функцию напряжений к полярно-симметричной форме.

**1. Постановка задачи и основные уравнения.** Рассмотрим жесткопластическую четвертьплоскость, одна сторона которой подвергается действию плоского гладкого штампа длины  $a$ , а другая сторона до глубины  $h$  опирается на гладкую жесткую стенку (фиг. 1). Штмп нагружен эксцентрично приложенной силой  $P$  ( $\Delta$  — эксцентриситет). В состоянии предельного равновесия штамп начинает двигаться в глубь четвертьплоскости, а материал выдавливается вдоль свободных участков границы четвертьплоскости. Интерес представляет предельная величина нагрузки  $P$ , а также величина силы сопротивления жесткой стенки и усилия, передаваемого штампом и стенкой на недеформируемую часть четвертьплоскости.

Подобные задачи о вдавливании штампов в жесткопластические тела исследовались [1] методом характеристик.

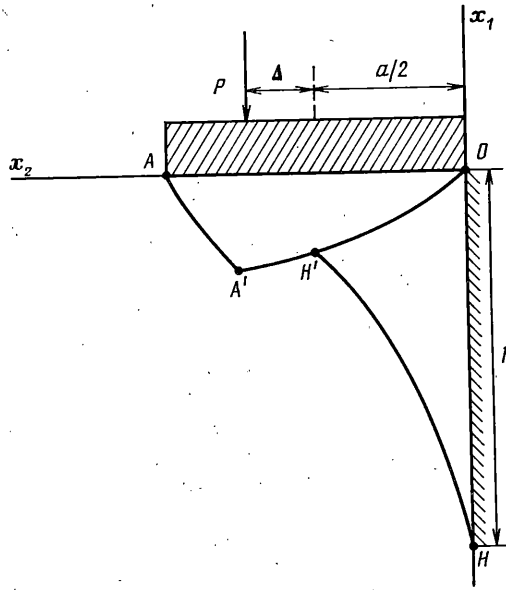
Зафиксируем декартову систему координат, как показано на фиг. 1. В зоне пластического течения для определения компонент  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{22}$  тензора напряжений имеем [2] уравнения равновесия и условие текучести ( $k$  — предел текучести при чистом сдвиге):

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0 \quad (1.1)$$

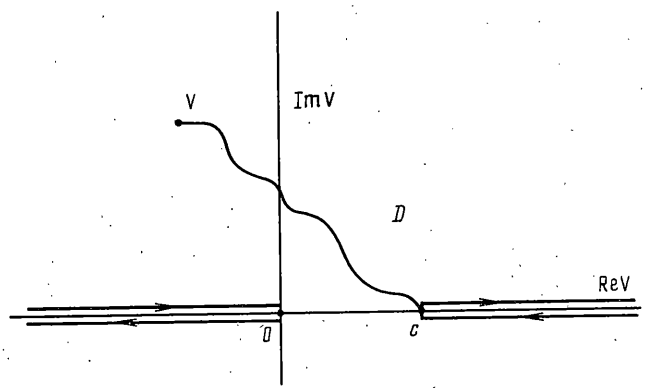
$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = 4k^2 \quad (1.2)$$

Уравнения для напряжений традиционно интегрируются с помощью подстановки Леви и последующим применением метода характеристик [2, 3]. Однако существует альтернативный подход к этой задаче, основанный на введении функции напряжений (см., например, [4]). Уравнения равновесия (1.1) удовлетворяются тождественно, если компоненты напряжений представить через функцию напряжений Эйри  $F(x_1, x_2)$ :

$$\sigma_{11} = k\partial^2 F / \partial x_2^2, \quad \sigma_{12} = -k\partial^2 F / \partial x_1 \partial x_2, \quad \sigma_{22} = k\partial^2 F / \partial x_1^2 \quad (1.3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Подставляя это представление в условие текучести (1.2), получим

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = 4 \quad (1.4)$$

Нелинейное уравнение (1.4) не нашло широкого применения в теории плоской задачи (отдельные его решения приводятся в [5]). Уравнение (1.4) может быть приведено к уравнению Монжа — Ампера и затем линеаризовано с помощью преобразования Лежандра [4].

Введем комплексные переменные  $u, v$ :

$$u = x_1 + i x_2, \quad v = x_1 - i x_2 \quad (1.5)$$

В новых переменных уравнение (1.4) приобретает следующий вид [4], удобный для дальнейшего исследования:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{1}{4} = 0 \quad (1.6)$$

**2. Разделение переменных в уравнении для функции напряжений.** Функция напряжений в пластической зоне, удовлетворяющая необходимым граничным условиям на сторонах четвертьплоскости, может быть найдена методом разделения переменных в уравнении (1.6).

Будем рассматривать  $u$  и  $v$  формально как независимые комплексные переменные и искать решение уравнения (1.6) в форме

$$F(u, v) = U(u)V(v) \quad (2.1)$$

Подставляя это разложение в уравнение (1.6), получим следующее уравнение:

$$V U_{uu}'' U V_{vv}'' + 1/4 = 0$$

Разделяя переменные в последнем уравнении, приходим к двум уравнениям ( $\omega$  — произвольная комплексная постоянная):

$$U U_{uu}'' = \omega, \quad V V_{vv}'' = -1/(4\omega) \quad (2.2)$$

Рассмотрим первое из этих уравнений. Сначала понизим его порядок с помощью замены  $U_u' = \Pi(U)$ . Для функции  $\Pi(U)$  имеем уравнение  $U \Pi \Pi_U' = \omega$ , общий интеграл которого можно представить в виде ( $c_U$  — произвольная комплексная постоянная)

$$\Pi(U) = (2\omega \ln U + c_U)^{1/2} \quad (2.3)$$

Отметим, что здесь корень и логарифм пока понимаются как многозначные аналитические функции. Однозначные ветви в соответствующих областях фиксируются ниже.

Прежде всего в области, представляющей собой экземпляр комплексной  $U$  — плоскости, разрезанный вдоль отрицательной части вещественной оси, можно выделить однозначную ветвь логарифма  $\ln U$  (главная ветвь). Предположим далее, что  $\omega$  и  $c_U$  вещественные постоянные. Тогда в области  $D_U$  (комплексная  $U$  — плоскость, разрезанная вдоль вещественной оси от точки  $U=0$  до точки  $U = \exp[-c_U/(2\omega)]$  через бесконечно удаленную точку) можно выделить две однозначные ветви функции  $\Pi(U)$ , определяемой формулой (2.3):  $\Pi(U) = \pm (2\omega \ln U + c_U)^{1/2}$ . Здесь и в дальнейшем предполагается, что одна из ветвей корня зафиксирована каким-либо условием, тогда другая отличается лишь знаком. Правило согласования знаков ветвей будет указано ниже.

Для определения функции  $U(u)$  в области  $D_U$  имеем следующее комплексное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:  $du/dU = \pm (2\omega \ln U + c_U)^{-1/2}$ , общий интеграл которого имеет вид ( $a_U$  — произвольная комплексная постоянная)

$$\int_{U_0}^U \frac{dU}{(2\omega \ln U + c_U)^{1/2}} = \pm u + a_U \quad (2.4)$$

где интегрирование производится по любой кривой, расположенной в области  $D_U$  и соединяющей некоторую точку  $U_0$  с переменной точкой  $U$ . Так как подынтегральная функция  $V$  (2.4) голоморфна всюду в области  $D_U$ , то интеграл не зависит от формы кривой, соединяющей точки  $U_0$  и  $U$ .

Оба уравнения (2.2) идентичны по виду, поэтому для функции  $V(v)$  получаем аналогичное (2.4) уравнение:

$$\int_{v_0}^v \frac{dV}{[-(2\omega)^{-1} \ln V + c_V]^{1/2}} = \pm v + a_V \quad (2.5)$$

где  $c_V$  — произвольная вещественная постоянная,  $a_V$  — произвольная комплексная постоянная; интегрирование производится по любой кривой,

расположенной в области  $D_V$  (экземпляр комплексной  $V$ -плоскости, разрезанный вдоль вещественной оси от точки  $V=0$  до точки  $V=\exp(2\omega c_V)$  через бесконечно удаленную точку) и соединяющей некоторую точку  $V_0$  с переменной точкой  $V$ .

Механический смысл имеют только вещественные решения уравнения (1.6). Выясним условия, при которых функция (2.1), где  $U(u)$  и  $V(v)$ , определены формулами (2.4), (2.5), будет принимать только вещественные значения, если конечно переменные  $u$  и  $v$  связаны соотношением  $u = -i\bar{v}$  (см. формулы (1.5)). Для этого, очевидно, достаточно, чтобы  $a_V = -a_{\bar{V}} = 0$ ,  $U_0 = \bar{V}_0$ ,  $\omega = 1/2$ ,  $c_V = -c_{\bar{V}} = \ln c$  и в формулах (2.4) и (2.5) выбраны соответственно знаки минус и плюс. Действительно, в этом случае имеем  $U(u) = V(\bar{v}) = \bar{V}(v)$  и, следовательно, функция напряжений Эйри приобретает вид ( $c$  — положительная постоянная):

$$F(v) = |V(v)|^2 \quad (2.6)$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dV}{[-\ln(V/c)]^{1/2}} = v \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) определяет конформное отображение зоны пластического течения на некоторую область на комплексной  $V$ -плоскости. В новых переменных функция напряжений, как это следует из (2.6), становится полярно-симметричной и ее значение в точке  $V$  равно квадрату расстояния от точки  $V$  до начала координат  $V$ -плоскости.

**3. Исследование конформного отображения на  $V$ -плоскости.** Рассмотрим конформное отображение  $v=v(V)$  области  $D$  комплексной  $V$ -плоскости (фиг. 2), определяемое уравнением (2.7). Для определенности положим  $V_0=c$  и введем обозначения:  $V_1 = \operatorname{Re} V$ ,  $V_2 = \operatorname{Im} V$ .

Если переменная  $V$  пробегает в положительном направлении значения, расположенные на отрезке  $0 \leq V_1 \leq c$  вещественной оси, то точка  $v$  физической плоскости также пробегает в положительном направлении значения, расположенные на отрезке  $x_1^* \leq x_1 \leq 0$  вещественной оси, где

$$x_1^* = - \int_0^c \frac{d\xi}{[-\ln(\xi/c)]^{1/2}}$$

Соответствие между точками отрезков устанавливается следующим уравнением

$$x_1 = \int_c^{V_1} \frac{d\xi}{[-\ln(\xi/c)]^{1/2}} \quad (3.1)$$

Если переменная  $V$  пробегает в положительном направлении интервал  $c < V_1 < \infty$  вещественной оси по верхнему берегу разреза, то точка  $v$  физической плоскости пробегает в положительном направлении интервал мнимой оси  $0 < x_2 < \infty$ . Соответствие между точками интервалов устанавливается следующим уравнением

$$x_2 = \int_c^{V_1} \frac{d\xi}{[\ln(\xi/c)]^{1/2}} \quad (3.2)$$

Образом отрезка  $-\infty \leq V_1 \leq 0$  вещественной оси  $V$ -плоскости будет кривая  $\gamma$  на физической плоскости, параметрическое уравнение которой имеет вид

$$v = x_1^* - \int_{V_1}^0 \frac{\cos[1/2 \operatorname{arctg}[\pi/\ln(-\xi/c)]]}{[\ln^2(-\xi/c) + \pi^2]^{1/2}} d\xi + \\ + i \int_{V_1}^0 \frac{\sin[1/2 \operatorname{arctg}[\pi/\ln(-\xi/c)]]}{[\ln^2(-\xi/c) + \pi^2]^{1/2}} d\xi$$

и, следовательно, переменная  $x_1$  меняется вдоль кривой на отрезке  $-\infty \leq x_1 \leq x_1^*$ , пробегая его в положительном направлении, если переменная  $V_1$  пробегает в положительном направлении отрезок  $-\infty \leq V_1 \leq 0$ .

Таким образом, верхняя полуплоскость  $\operatorname{Im} V > 0$  преобразуется отображением (2.7) в область  $v$ -плоскости, ограниченную лучом  $\operatorname{Re} v = 0$ ,  $\operatorname{Im} v \geq 0$ , отрезком  $\operatorname{Im} v = 0$ ,  $x_1^* \leq \operatorname{Re} v \leq 0$  и кривой  $\gamma$ .

Заметим также, что обращение интеграла (2.7) можно выразить через обратный интеграл вероятности [6]:

$$V(v) = c \exp \left\{ - \left[ \operatorname{Erf}^{-1} \left( - \frac{v}{2c} \right) \right]^2 \right\}, \quad \operatorname{Erf}(Z) \equiv \int_0^Z e^{-z^2} dz \quad (3.3)$$

**4. Построение поля напряжений в зоне пластического течения.** Рассмотрим поле напряжений, определяемое функцией напряжений по формулам (1.3), где функция  $F(v)$  определяется уравнениями (2.6), (2.7). Докажем, что граничные условия для напряжений на линиях соприкосновения четвертьплоскости со штампом и стенкой удовлетворяются.

Внешняя сила, действующая на элемент  $ds$  границы четвертьплоскости, может быть представлена компонентами  $p_1 ds$ ,  $p_2 ds$ . Имеем следующие равенства

$$p_1 = k \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right), \quad p_2 = -k \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) \quad (4.1)$$

Уточним, что  $s$  — переменная длина дуги вдоль границы четвертьплоскости, отсчитываемая от точки  $O$  (см. фиг. 1) так, что возрастанию  $s$  соответствует обход границы против хода часовой стрелки.

Учитывая формулы (2.6), (4.1), после ряда преобразований получим

$$-\frac{1}{2}(p_2 - ip_1) = k \frac{d}{ds} \left[ \bar{V} \frac{dV}{dv} \right] \quad (4.2)$$

Если точка  $v$  пробегает отрезок  $x_1^* \leq x_1 \leq 0$  вещественной оси, то формула (4.2) эквивалентна равенствам

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -2k \frac{d}{dx_1} \left[ V_1 \left( -\ln \frac{V_1}{c} \right)^{1/2} \right] \quad (0 \leq V_1 \leq c)$$

где зависимость  $V_1$  от  $x_1$  должна определяться уравнением (3.1). Выполняя дифференцирование по  $x_1$  в последнем равенстве и учитывая уравнения (3.1), (3.3), получим распределение усилий в месте соприкосновения четвертьплоскости с жесткой стенкой

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 2k \left\{ 1/2 - [\operatorname{Erf}^{-1}(-x_1/(2c))]^2 \right\} \quad (-h \leq x_1 \leq 0) \quad (4.3)$$

Решение, очевидно, будет иметь смысл только если выполняется неравенство  $h \leq 2c \operatorname{Erf}(\sqrt{1/2})$ .

На отрезке  $0 \leq x_2 \leq a$  мнимой оси формула (4.2) эквивалентна двум равенствам

$$p_1 = -2k \frac{d}{dx_2} \left[ V_1 \left( \ln \frac{V_1}{c} \right)^{1/2} \right], \quad p_2 = 0$$

где зависимость  $V_1$  от  $x_2$  должна определяться уравнением (3.2). Выполняя дифференцирование по  $x_2$  в последнем равенстве и учитывая уравнения (3.2), (3.3), получим распределение усилий под штампом через обратный интеграл вероятностей мнимого аргумента

$$p_1 = -2k \left\{ \frac{1}{2} + \left[ \operatorname{Erfi}^{-1} \left( \frac{x_2}{2c} \right) \right]^2 \right\}, \quad p_2 = 0 \quad (0 \leq x_2 \leq a)$$

$$\operatorname{Erfi}(Z) = \int_0^Z e^{z^2} dz \quad (4.4)$$

Распределения контактного давления под стенкой (4.3) и штампом (4.4) позволяют определить реакцию стенки  $Q$  и вдавливающую силу  $P$ :

$$Q = kh - 2k \int_{-h}^0 \left[ \operatorname{Erf}^{-1} \left( -\frac{x_1}{2c} \right) \right]^2 dx_1 \quad (4.5)$$

$$P = ka + 2k \int_0^a \left[ \operatorname{Erfi}^{-1} \left( \frac{x_2}{2c} \right) \right]^2 dx_2 \quad (4.6)$$

Для определения константы  $c$  приравняем момент относительно точки  $O$  распределенной нагрузки под штампом и момент относительно точки  $O$  сосредоточенной силы  $P$ . После ряда преобразований получим следующее уравнение, представленное в безразмерной форме ( $\mu = a/(2c)$ ,  $\lambda = \Delta/a$ ):

$$\lambda \mu - \int_0^\mu \left( \frac{2\omega}{\mu} - 2\lambda - 1 \right) \left[ \operatorname{Erfi}^{-1}(\omega) \right]^2 d\omega = 0 \quad (4.7)$$

Реакция  $R$  жесткой части четвертьплоскости при вдавливании штампа равна  $R = [P^2 + Q^2]^{1/2}$ .

Распределения контактного давления (4.3), (4.4) определяют поле напряжений только в областях, примыкающих к линии соприкосновения стенки и штампа с четвертьплоскостью и ограниченных характеристиками построенного выше поля напряжений, выпущенными из точек  $A, O, H$  внутрь четвертьплоскости (треугольные области  $AA'O, OH'H$  на фиг. 1).

Дифференциальные уравнения характеристик имеют вид [13]:

$$dx_2/dx_1 = \operatorname{tg}(\theta + \pi/4) \quad (4.8)$$

где  $\theta$  — угол наклона главного направления, соответствующего наибольшему главному напряжению, к оси  $x_1$ . Пользуясь известным равенством

[3]:  $\operatorname{tg} 2\theta = -2F''_{x_1x_2} / (F''_{x_2x_2} - F''_{x_1x_1})$  и подставляя в это равенство выражение (2.6) для функции напряжений, получим

$$\operatorname{tg} 2\theta = -\operatorname{Im}(V_{vv}'' \bar{V}) / \operatorname{Re}(V_{vv}'' \bar{V}) \quad (4.9)$$

Учитывая уравнение (2.7), определяющее функцию  $V(v)$ , и формулу (4.9), приходим к следующему выражению для угла  $\theta$ :  $\theta = 1/2 \arg V(v)$ . Поэтому дифференциальные уравнения характеристик (4.8) можно представить в следующем виде:

$$dx_2/dx_1 = \operatorname{tg}[1/2 \arg V(v) \pm \pi/4], \quad V(v) = c \exp\{-[\operatorname{Erf}^{-1}(-v/(2c))]^2\}$$

При необходимости дуги характеристик  $AA'$ ,  $OA'$ ,  $NN'$  могут быть определены из этих уравнений.

Дальнейшее конструирование полей скольжения должно производиться с учетом известного распределения напряжений в треугольных областях, примыкающих к свободным участкам границы четвертьплоскости и сводится к решению основных граничных задач теории плоской деформации [3]. Эти задачи могут быть эффективно решены известными методами [3].

Принципиально важным, однако, является вопрос о возможности продолжения поля напряжений из области  $OAA'H'H$  на всю оставшуюся часть четвертьплоскости так, чтобы не нарушалось равновесие всех элементов четвертьплоскости и нигде не превышался предел текучести.

**5. Продолжение поля напряжений.** Достаточно простое доказательство продолжимости поля напряжений на всю четвертьплоскость может быть дано в случае, когда  $a \leq 2c \operatorname{Erfi}(\sqrt{1/2})$ . В этом случае величина контактного давления под штампом не превосходит  $2k$  (контактное давление стенки заведомо не превосходит  $k$ ).

Предположим противное: поле напряжений, определяемое распределениями поверхностных усилий (4.3), (4.4), не допускает продолжения на всю четвертьплоскость так, чтобы не нарушалось равновесие всех элементов и нигде не превышался предел текучести.

Поскольку гидростатическое давление не влияет на границу текучести, то невозможно также построить допустимого распределения напряжений для четвертьплоскости, находящейся под действием следующих поверхностных усилий:

$$p_1' = 0 \quad (x_1 \leq 0), \quad p_2' = -k - 2k [\operatorname{Erfi}^{-1}(-x_1/(2c))]^2 \quad (-h \leq x_1 \leq 0) \\ p_2' = -2k \quad (x_1 < -h) \quad (5.1)$$

$$p_1' = k - 2k [\operatorname{Erfi}^{-1}(x_2/(2c))]^2 \quad (0 \leq x_2 \leq a) \\ p_1' = 2k \quad (x_2 > a), \quad p_2' = 0 \quad (x_2 \geq 0) \quad (5.2)$$

Заметим, что величины плотности нормальных растягивающих усилий на гранях четвертьплоскости (5.1), (5.2) не превосходят  $2k$ .

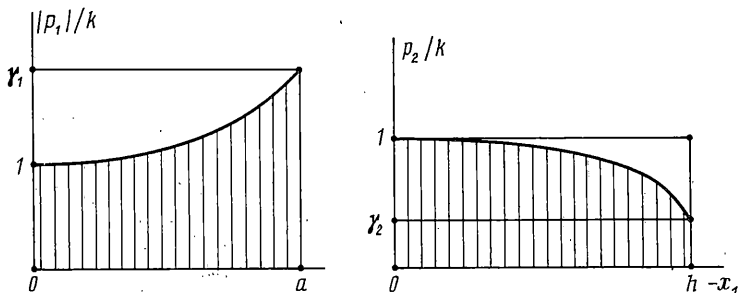
Рассмотрим теперь четвертьплоскость, нагруженную вдоль горизонтальной грани усилиями (5.2) со свободной вертикальной гранью. В этом случае тем более не может быть построено допустимое поле напряжений во всей четвертьплоскости.

Но, с другой стороны, допустимое поле напряжений может быть построено для четвертьплоскости, вертикальная грань которой свободна, а горизонтальная — растягивается нормальными усилиями, распределенными с постоянной плотностью  $2k$ , не меньшей, чем плотность нормальных растягивающих усилий (5.2) [3].

Таким образом, получено противоречие и тем самым доказано утверждение о продолжимости поля напряжений с граничными условиями (4.3), (4.4) на всю четвертьплоскость (при указанных выше условиях допустимости).

Можно привести явный вид допустимого поля напряжений  $\sigma_{ij}^{(s)}$ :

$$\sigma_{ij}^{(s)} = \sigma_{ij}^{*} + \sigma_{ij}^{**} \\ \sigma_{11}^{*} = 0, \quad \sigma_{12}^{*} = 0 \quad (x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0) \\ \sigma_{22}^{*} = 0 \quad (x_1 < -h, \quad x_2 \geq 0) \\ \sigma_{22}^{*} = -k + 2k [\operatorname{Erfi}^{-1}(-x_1/(2c))]^2 \quad (-h \leq x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0) \\ \sigma_{22}^{**} = 0, \quad \sigma_{12}^{**} = 0 \quad (x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0) \\ \sigma_{11}^{**} = -k - 2k [\operatorname{Erfi}^{-1}(x_2/(2c))]^2 \quad (x_1 \leq 0, \quad 0 \leq x_2 < a) \\ \sigma_{11}^{**} = 0 \quad (x_1 \leq 0, \quad x_2 > a)$$



Фиг. 3

Необходимо отметить, что решение не будет полным [3], пока не исследована возможность построения согласованного поля скоростей.

В заключение заметим, что величину реакции стенки  $Q$  и вдавливающей силы  $P$  (формулы (4.5), (4.6)) можно также определить равенствами:

$$Q = 2kc \operatorname{Erfi}^{-1}(h/(2c)) \exp\{-[\operatorname{Erfi}^{-1}(h/(2c))]^2\}$$

$$P = 2kc \operatorname{Erfi}^{-1}(a/(2c)) \exp\{[\operatorname{Erfi}^{-1}(a/(2c))]^2\}$$

Константа  $c$  должна быть определена из уравнения (4.7), которое после ряда простых преобразований приводится к виду:

$$(2\lambda - 1)\mu \operatorname{Erfi}^{-1}(\mu) + \operatorname{sh}\{[\operatorname{Erfi}^{-1}(\mu)]^2\} = 0$$

$$(\mu = a/(2c), \quad \lambda = \Delta/a)$$

Эпюры контактного давления под штампом и у стенки приводятся на фиг. 3 (введены следующие обозначения:  $\gamma_1 = 1 + 2[\operatorname{Erfi}^{-1}(a/(2c))]^2$ ,  $\gamma_2 = 1 - 2[\operatorname{Erfi}^{-1}(h/(2c))]^2$ ).

Автор благодарит Н. Х. Арутюняна за постоянное внимание к работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
2. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеориздат, 1956. 407 с.
3. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
4. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
5. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969. 863 с.
6. Вейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 294 с.

Самара

Поступила в редакцию  
6.II.1994