МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1992

УДК 531.55:521.2

© 1992 г. А. И. ТКАЧЕНКО

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ РОДРИГА — ГАМИЛЬТОНА

Излагается методика вывода формул численного интегрирования кинематических уравнений, которым удовлетворяют параметры Родрига – Гамильтона, характеризующие ориентацию подвижного объекта [1, 2]. Методика содержит построение элементов точного решения, задание выражений, аппроксимирущих указанные элементы с помощью приращений интегралов от составляющих угловой скорости объекта, запись уравнений относительно коэффициентов аппроксимирующих выражений и выбор решения этих уравнений. Получена структура класса алгоритмов численного интегрирования, приведены примеры построения конкретных формул вычисления параметров Родрига – Гамильтона, оценены ошибки этих формул и исследованы возможности повышения точности и экономичности вычислений.

1. Постановка задачи. В системах навигации подвижных объектов возникает необходимость вычисления параметров Родрига — Гамильтона λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 [1, 2], характеризующих ориентацию связанного с объектом ортонормированного базиса E относительно ортонормированного инерциального базиса I. Эти параметры находятся путем интегрирования кинематических уравнений

$$\Lambda^{\cdot}={}^1/_2\Phi(\omega)\Lambda, \quad \Lambda(t_0)=\Lambda_0 \tag{1.1}$$

где $\Lambda=[\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3]^T$ (индекс Т — символ транспонирования); $\omega=\omega_E$ — вектор абсолютной угловой скорости базиса E, заданный своими координатами в этом базисе (нижний индекс в виде прописной буквы указывает базис, в котором представлен вектор); $\Phi(\mathbf{r})$ — кососимметрическая (4×4)-матрица, которая ставится в соответствие трехмерному вектору $\mathbf{r}=[r_1r_2r_3]^T$:

$$\Phi(\mathbf{r})=\begin{bmatrix} 0 & -r_1 & -r_2 & -r_3 \\ r_1 & 0 & r_3 & -r_2 \\ r_2 & -r_3 & 0 & r_1 \\ r_3 & r_2 & -r_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Произведение двух матриц вида $\Phi(\mathbf{r})$ можно представить

$$\Phi(\mathbf{r}_1)\Phi(\mathbf{r}_2)=\Phi(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_1)-\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2E_4 \tag{1.2}$$

где E_4 — единичная (4×4)-матрица. Произведение любого числа матриц вида $\Phi(\mathbf{r})$ приводится к сумме матрицы вида $\Phi(\mathbf{r})$ и матрицы E_4, умноженной на скаляр. Первому интегралу уравнений (1.1) надлежащим заданием начальных условий дается вид условия нормировки

$$\Lambda^T\Lambda=\lambda_0^2+\|\lambda\|^2=1 \tag{1.3}$$

где $\lambda=[\lambda_1\lambda_2\lambda_3]^T$; $\|\mathbf{r}\|$ — евклидова норма вектора $\mathbf{r}$. Если условие (1.3) выполняется, то преобразование координат произвольного трехмерного вектора $\mathbf{r}$ из базиса E в базис I можно выполнить по формуле

$$\mathbf{r}_I=\mathbf{r}_E+2\lambda_0\boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{r}_E+2\boldsymbol{\lambda}\times(\boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{r}_E) \tag{1.4}$$

Информация для интегрирования уравнений (1.1) имеет вид трехмерных векторов $\boldsymbol{\theta}_{i+1}$:

$$\boldsymbol{\theta}_{i+1}=\int_{t_i}^{t_{i+1}}\boldsymbol{\omega}\,dt,\qquad t_{i+1}=t_i+h \tag{1.5}$$

где $h\ll 1$ – интервал поступления информации (такт съема). Далее всюду, где не оговорено иное, считаем $h=\text{const}$. Компромисс между требованиями точности и экономичности при интегрировании уравнений (1.1) обеспечивают эффективные формулы высокого порядка, реализуемые с большим шагом. Вывод таких формул с использованием промежуточных параметров, характеризующих изменение ориентации объекта в течение шага интегрирования, содержится в [3, 4]. Ниже рассматривается вывод формул интегрирования уравнений (1.1) с шагом $H=2sh$ ($s=1, 2, \ldots$) без использования промежуточных параметров ориентации.

2. Представление матриканта. Приняв начало очередного шага интегрирования уравнений (1.1) в качестве начального момента t_0, представим $\Lambda(t)$ при $t_0\leqslant t\leqslant t_0+H$ в виде $\Lambda(t)=F(t, t_0)\Lambda_0$, где ($4\times4$)-матрица $F(t, t_0)$ – матрицант уравнения (1.1) [5]: $F^{\cdot}(t, t_0)={}^1\!/_2\Phi(\boldsymbol{\omega})F(t, t_0)$, $F(t_0, t_0)=E_4$.

На основании известного представления независимых решений уравнений (1.1) [6, 7] введем запись

$$F(t_0+H,\ t_0)=f_0E_4+\Phi(\mathbf{f}),\quad f_0^2+\|\mathbf{f}\|^2=1 \tag{2.1}$$

где $\mathbf{f}$ – трехмерный вектор, $\mathbf{f}(t_0)=0$. Выражение $F(t_0+H,\ t_0)\Lambda_0$ имеет структуру произведения кватернионов [2] и может быть реализовано с использованием приемов, сокращающих число арифметических операций [8].

Примем, что $\boldsymbol{\omega}(t)$ допускает разложение в ряд Тейлора при $t_0\leqslant t\leqslant t_0+H$, и используем введенный в [3] методический прием, состоящий в выборе середины шага – точки $t_*=t_0+sh$ – в качестве центра разложения:

$$\boldsymbol{\omega}(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\boldsymbol{\omega}_*^{(m)}(t-t_*)^m/m!,\qquad \boldsymbol{\omega}_*^{(m)}=\boldsymbol{\omega}^{(m)}(t_*) \tag{2.2}$$

Запишем матрицант (2.1) в виде ряда [5]:

$$F(t_0+H, t_0)=F_4+\sum_{k=1}^{\infty}F_k(t_*+sh)$$

$$F_1(t)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\Phi(\boldsymbol{\omega}(\tau))\,d\tau,\qquad F_{k+1}(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi(\boldsymbol{\omega}(\tau))F_k(\tau)\,d\tau \tag{2.3}$$

Из (2.3) следует

$$F_1(t_*+sh)={}^1\!/_2\Phi(\mathbf{f}_1),\qquad \mathbf{f}_1=\int_{t_*-sh}^{t_*+sh}\boldsymbol{\omega}\,dt \tag{2.4}$$

Каждую из (4×4)-матриц F_N в (2.3) представим в виде

$$F_N=F_1^N/N!+\Psi_N\ (N=2, 3, \ldots)$$

$$\Psi_N=\frac{1}{2^N}\sum_{m,\dots,n=0}^{\infty}\frac{\varkappa_{m\dots n}h^{m+\dots+n+N}}{(m+1)!\dots(n+1)!}\Phi(\omega_*^{(m)})\dots\Phi(\omega_*^{(n)})\tag{2.5}$$

Суммирование в (2.5) выполняется по N индексам $m,\dots,n$. Коэффициенты $\varkappa_{m\dots n}$ с нечетными и четными суммами индексов обозначим соответственно $\varkappa'_{m\dots n}$ и $\varkappa''_{m\dots n}$. Подставив (2.2) в (2.3) и выполнив квадратуры, находим

$$\varkappa'_{mn}=\left[\frac{m-n}{m+n+2}+(-1)^n\right]s^{m+n+2},\qquad \varkappa''_{mn}=0$$

$$\varkappa''_{mqn}=\left\{\frac{(q+1)[m(m+q+3)+n(n+q+3)+2q+4]}{(m+q+2)(q+n+2)(m+q+n+3)}+\right.$$

$$\left.+(-1)^m\frac{2n-q+1}{3(n+q+2)}+(-1)^n\frac{2m-q+1}{3(m+q+2)}-{}^1/_3[1+(-1)^q]\right\}s^{m+q+n+3}\dots$$

Имеют место свойства симметрии относительно индексов

$$\varkappa'_{mn}=-\varkappa'_{nm},\qquad \varkappa'_{mqn}=-\varkappa'_{nqm},\qquad \varkappa''_{mqn}=\varkappa''_{nqm}$$

$$\varkappa'_{mqrn}=-\varkappa'_{nrqm},\qquad \varkappa''_{mqrn}=\varkappa''_{nrqm}\dots\tag{2.6}$$

3. **Элементы точного решения.** Используя (1.2), находим по аналогии с [9] $\Psi_N=f_{0N}E_4+\Phi(\mathfrak{f}_N)$, где f_{0N} – скаляр, $\mathfrak{f}_N$ – трехмерный вектор. Отсюда и из (2.3)–(2.5) получаются представления f_0 и $\mathfrak{f}$ в виде степенных рядов относительно h. С помощью (2.6) можно показать, что выражения, связывающие $\mathfrak{f}_N$ с $\omega_*^{(m)}$, содержат только нечетные степени h, начиная с $(N+1)$-й при N четном или $(N+2)$-й – при N нечетном. Общее представление $\mathfrak{f}$ с учетом (1.2) имеет вид

$$\mathfrak{f}=\mathfrak{f}_1\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1}\frac{\|\mathfrak{f}_1\|^{2(j-1)}}{(2j-1)!}+\sum_{k=2}^{\infty}\mathfrak{f}_k\tag{3.1}$$

где $\mathfrak{f}_k$ – векторная сумма членов k-й степени относительно $\omega_*^{(m)}$. В частности

$$\mathfrak{f}_2=-\frac{1}{4}\sum_{m+n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{\varkappa'_{mn}h^{m+n+2}}{(m+1)!\,(n+1)!}\omega_*^{(m)}\times\omega_*^{(n)}\tag{3.2}$$

$$\mathfrak{f}_3=\frac{1}{12}\sum_{m+q+n=2,4,\dots}^{\infty}\frac{(\varkappa''_{mqn}-\varkappa''_{mnq})h^{m+q+n+3}}{(m+1)!\,(q+1)!\,(n+1)!}\omega_*^{(m)}\times(\omega_*^{(q)}\times\omega_*^{(n)})\tag{3.3}$$

$$\mathfrak{f}_4=\frac{1}{16}\sum_{m+\dots+n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{\varkappa'_{mqrn}h^{m+q+r+n+4}}{(m+1)!\dots(n+1)!}[(\omega_*^{(n)}\times\omega_*^{(r)})\times$$

$$\times(\omega_*^{(q)}\times\omega_*^{(m)})+2\omega_*^{(m)}\cdot\omega_*^{(q)}(\omega_*^{(r)}\times\omega_*^{(n)})]\tag{3.4}$$

Из (2.1) следует

$$f_0=1-{}^1/_2\|\mathfrak{f}\|^2-{}^1/_8\|\mathfrak{f}\|^4-{}^1/_{16}\|\mathfrak{f}\|^6-\dots\tag{3.5}$$

4. **Аппроксимирующие выражения.** Формула интегрирования уравнения (1.1), приближенно выражающая $F(t_0+H, t_0)$ через информацию (1.5), имеет порядок p, если ошибка аппроксимирующего выражения есть величина $(p+1)$-й степени относительно h. Так как, в соответствии с (2.4), (2.5), $F_N=O(h^N)$, то формула порядка p имеет вид суммы независимых выражений, аппроксимирующих $F_1, \ldots, F_p$ с ошибками порядка не ниже h^{p+1}. Поскольку (3.1) содержит лишь нечетные степени h, целесообразно строить формулы интегрирования четного порядка p, аппроксимируя $\mathbf{f}$ в (2.1) выражением

$$\mathbf{f}^*=\mathbf{f}_1^*\sum_{j=1}^{p/2}(-1)^{j+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1}\frac{\|\mathbf{f}_1^*\|^{2(j-1)}}{(2j-1)!}+\sum_{k=2}^{p-2}\mathbf{f}_k^* \qquad (4.1)$$

где $\mathbf{f}_k^*=\mathbf{f}_k+O(h^{p+1})$, и вычисляя $f_0^*=f_0+O(h^{p+2})$ на основании (3.5).

Подставим (2.2) в (1.5), приняв $t_i=t_*+ih$:

$$\theta_{i+1}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\omega_*^{(m)}}{(m+1)!}\xi_i(m)h^{m+1}, \qquad \xi_i(m)=(i+1)^{m+1}-i^{m+1} \qquad (4.2)$$

Из (2.4) следует $\mathbf{f}_1^*=\mathbf{f}_1=\theta_{-s+1}+\ldots+\theta_s$. Оценку f_2 ищем с помощью метода неопределенных коэффициентов по аналогии с [10]:

$$\mathbf{f}_2^*=\sum_{i,j=-s}^{s-1}\beta_{ij}\theta_{i+1}\times\theta_{j+1} \qquad (4.3)$$

где β_{ij} — коэффициенты, подлежащие определению. Уравнения, которым они удовлетворяют, найдем, подставив (4.2) в (4.3) и приравняв группы членов с одинаковыми степенями h до p-й включительно в полученном выражении и в (3.2):

$$\sum_{i,j=0}^{s-1}\varphi_{ij}(m,n)\,[\beta_{ij}+(-1)^m\beta_{-i-1,j}+(-1)^n\beta_{i,-j-1}+$$
$$+(-1)^{m+n}\beta_{-i-1,-j-1}]=\begin{cases}0 & (m+n=2,4,\ldots)\\ -{}^1/_4\varkappa_{mn}' & (m+n=1,3,\ldots)\end{cases}$$
$$\varphi_{ij}(m,n)=\xi_i(m)\xi_j(n),\ 1\leqslant m+n\leqslant p-2 \qquad (4.4)$$

Наибольшее значение p, при котором система (4.4) совместна, определяет максимальный порядок формулы (4.1) при данном s. Подчиним β_{ij} ограничениям

$$\beta_{-i-1,-j-1}=-\beta_{ij}\ \ (i, j=-s, \ldots, s-1) \qquad (4.5)$$
$$\beta_{ji}=-\beta_{ij},\ \ \beta_{-j-1,i}=\beta_{-i-1,j}\ \ (i, j=0, \ldots s-1)$$

Тогда уравнения (4.4) выполняются при всех четных значениях $(m+n)$ (поэтому в дальнейшем p считается четным), а при нечетных $(m+n)$ приводятся к виду

$$\sum_{i=0}^{s-2}\sum_{j=i+1}^{s-1}\{[\varphi_{ij}(m,n)-\varphi_{ij}(n,m)]\beta_{ij}+(-1)^m[\varphi_{ij}(m,n)+\varphi_{ij}(n,m)]\beta_{-i-1,j}\}+$$
$$+(-1)^m\sum_{i=0}^{s-1}\varphi_{ii}(m,n)\beta_{-i-1,i}=-{}^1/_8\varkappa_{mn}' \qquad (0\leqslant m<n,\ m+n=1,3,\ldots,p-3)$$
$$(4.6)$$

На основании (3.3) аппроксимируем $\mathbf{f}_3$ выражением

$$\mathbf{f}_s^* = \sum_{i,j,k=-s}^{s-1} \beta_{ijk}\theta_{i+1}\times(\theta_{j+1}\times\theta_{k+1})$$

Подчинив коэффициенты β_{ijk} условиям

$$\beta_{-i-1,\,-j-1,\,-k-1}=\beta_{ijk},\qquad \beta_{ikj}=-\beta_{ijk}\qquad (i,\ j,\ k=-s,\ldots,\ s-1) \tag{4.7}$$

получим для их определения систему уравнений

$$\sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=0}^{s-2}\sum_{k=j+1}^{s-1}\{[\chi_{ijk}(m,q,n)-\chi_{ijk}(m,n,q)][\beta_{ijk}+(-1)^m\beta_{-i-1,jk}]+$$
$$+[(-1)^q\chi_{ijk}(m,q,n)-(-1)^n\chi_{ijk}(m,n,q)]\beta_{i,-j-1,k}+$$
$$+[(-1)^n\chi_{ijk}(m,q,n)-(-1)^q\chi_{ijk}(m,n,q)]\beta_{ij,-k-1}\}+$$
$$+\sum_{i,j=0}^{s-1}\chi_{ijj}(m,q,n)[(-1)^q-(-1)^n]\beta_{i,-j-1,j}={}^1/_{24}(\varkappa''_{mqn}-\varkappa''_{mnq})$$

$$\chi_{ijk}(m,\ q,\ n)=\xi_i(m)\xi_j(q)\xi_k(n)\qquad (q<n,\ m+q+n=2,\ 4,\ldots,\ p-4) \tag{4.8}$$

Так как в (3.4) члены с $(\omega^{(n)}\times\omega^{(r)})\times(\omega^{(q)}\times\omega^{(m)})$ содержат h в степени не ниже седьмой, то при $p\leqslant 6$ достаточно аппроксимировать $\mathbf{f}_4$ выражением

$$\mathbf{f}_4^* = \sum_{i,j,k,l=-s}^{s-1} \beta_{ijkl}\theta_{i+1}\cdot\theta_{j+1}(\theta_{k+1}\times\theta_{l+1}) \tag{4.9}$$

5. **Примеры формул (4.1).** При $s=1$ $(H=2h)$ максимальное значение p равно 4. Из единственного в этом случае уравнения (4.6) следует $\beta_{-1,0}={}^1/_6$. Формула (4.1) порядка 4 при $s=1$ получается в виде

$$\mathbf{f}^*=({}^1/_2-{}^1/_{48}\|\mathbf{f}_1\|^2)\mathbf{f}_1+{}^1/_3\theta_0\times\theta_1,\qquad \mathbf{f}_1=\theta_0+\theta_1 \tag{5.1}$$

При $s=2$ максимальное значение p равно 6. Система (4.6) при $s=2$, $p=6$ содержит три уравнения и имеет однопараметрическое семейство решений $\beta_{-2,1}=\mu$, $\beta_{01}={}^1/_{18}+\mu$, $\beta_{-1,1}={}^{11}/_{30}-2\mu$, $\beta_{-1,0}=-{}^{11}/_{45}+3\mu$.

Учитывая (4.5) сформируем выражение (4.3) при $\mu={}^{11}/_{90}$:

$$\mathbf{f}_2^*={}^{11}/_{45}(\theta_{-1}+\theta_0)\times(\theta_1+\theta_2)+{}^{16}/_{45}(\theta_{-1}\times\theta_0+\theta_1\times\theta_2)$$

Это аналог формулы (24) из [4]. Система (4.8) при $s=2$, $p=6$ имеет вид

$$2(\beta_{-1,01}-\beta_{001})+6(\beta_{-2,01}-\beta_{101})-4\beta_{0,\,-1,1}-12\beta_{1,\,-1,1}+$$
$$+4\beta_{00,\,-2}+12\beta_{10,\,-2}-6\beta_{0,\,-2,1}-18\beta_{1,\,-2,1}-\beta_{0,\,-1,0}-$$
$$-6\beta_{1,\,-1,0}={}^{32}/_{15}$$
$$6(\beta_{001}+\beta_{-1,01}+\beta_{101}+\beta_{-2,01}+\beta_{0,\,-1,1}+\beta_{1,\,-1,1}+$$
$$+\beta_{00,\,-2}+\beta_{10,\,-2})={}^{16}/_{15}$$

Используем решение, все элементы которого равны нулю, за исключением $\beta_{10,\,-2}={}^8/_{45}$; остальные ненулевые коэффициенты β_{ijk} находятся из (4.7). Коэффициенты варажения (4.9) при $s=2$, $p=6$ находим из уравнений

$$\sum_{i,j,k,l=-2}^{1}\beta_{ijkl}[\xi_l(1)-\xi_k(1)]=-{}^{32}/_{15}$$

$$\sum_{i,j,k,l=-2}^{1} \beta_{ijkl}[\xi_l(2)-\xi_k(2)] = \sum_{i,j,k,l=-2}^{1} \beta_{ijkl}[\xi_i(1)+\xi_j(1)]=0$$

Первое из этих уравнений соответствует членам с h^5 в (3.4); два других указывают на отсутствие в (3.4) членов, содержащих h^6. Примем $\beta_{ij,-2,0}=\beta_{ij,-2,1}=\beta_{ij,-1,0}=\beta_{ij,-1,1}=-{}^1/_{120}$ ($i, j=-2, -1, 0, 1$); остальные коэффициенты в (4.9) равны нулю. Полученная формула порядка 6 в компактной записи имеет вид

$$\begin{gathered}\mathbf{f}^*=({}^1/_2-{}^1/_{48}\|\mathbf{f}_1\|^2+{}^1/_{3840}\|\mathbf{f}_1\|^4)\mathbf{f}_1+\\+({}^{11}/_{45}-{}^1/_{120}\|\mathbf{f}_1\|^2)(\theta_{-1}+\theta_0)\times(\theta_1+\theta_2)+\\+{}^{16}/_{45}[\theta_{-1}\times(\theta_0+\theta_0\times\theta_2)-\theta_2\times(\theta_1+\theta_{-1}\times\theta_1)]\\\mathbf{f}_1=\theta_{-1}+\theta_0+\theta_1+\theta_2\end{gathered} \tag{5.2}$$

При $s=3$ максимальное значение p равно восьми. Коэффициенты β_{ij} при $s=3$, $p=8$ образуют трехпараметрическое семейство. Ограничимся примером выражения (4.3) с коэффициентами из упомянутого семейства

$$\begin{gathered}\mathbf{f}_2^*=\frac{8717}{42000}[\theta_{-2}\times(\theta_1+\theta_2)+(\theta_{-1}+\theta_0)\times\theta_3]+\\+\frac{691}{2100}(\theta_{-1}+\theta_0)\times(\theta_1+\theta_2)+\frac{27}{560}(\theta_{-1}\times\theta_0+\theta_1\times\theta_2)-\\-\frac{1161}{3500}[\theta_3\times(\theta_1+\theta_2)+(\theta_{-1}+\theta_0)\times\theta_{-2}]+\frac{722}{2625}\theta_{-2}\times\theta_3\end{gathered} \tag{5.3}$$

6. Ошибки на шаге интегрирования. Обозначим $\Delta\mathbf{f}=\mathbf{f}^*-\mathbf{f}=O(h^{p+1})$, $\Delta f_0=f_0^*-f_0$. Если f_0^* находится из (3.5), то для формулы интегрирования порядка p имеем

$$\Delta f_0\approx-\mathbf{f}\cdot\Delta\mathbf{f}+q_p\|\mathbf{f}\|^{p+2},\qquad q_p=\frac{3\cdot5\ldots\cdot(p-1)}{2^{p/2+1}(p/2+1)!}$$

Очевидно, $|\Delta f_0|\ll\|\Delta\mathbf{f}\|$. Оценим старшие члены ошибки $\Delta\mathbf{f}$, пропорциональные h^{p+1}, выражением

$$\Delta\mathbf{f}=\Delta\mathbf{f}'+\sum_{k=2}^{p-2}\Delta\mathbf{f}_k-\mathbf{f}_{p-1}-\mathbf{f}_p \tag{6.1}$$

$$\Delta\mathbf{f}'=(-1)^{p/2+1}\frac{\|\omega\|^p h^{p+1}}{2^{p+1}(p+1)!}\omega,\qquad \Delta\mathbf{f}_k=\mathbf{f}_k^*-\mathbf{f}_k$$

Из (3.2), (4.3) с учетом (4.2) следует

$$\begin{gathered}\Delta\mathbf{f}_2=h^{p+1}\sum_{m=0}^{p/2-1}\Big\{4\sum_{i=0}^{s-2}\sum_{j=i+1}^{s-1}[(\varphi_{ij}(m,p-m-1)-\\-\varphi_{ij}(p-m-1,m))\beta_{ij}+(-1)^m(\varphi_{ij}(m,p-m-1)+\\+\varphi_{ij}(p-m-1,m))\beta_{-i-1,j}]+(-1)^m\sum_{i=0}^{s-1}\varphi_{ii}(m,p-m-1)\beta_{-i-1,i}+\\+\frac{1}{2}\varkappa'_{m,p-m-1}\Big\}\frac{\omega^{(m)}\times\omega^{(p-m-1)}}{(m+1)!\,(p-m)!}\end{gathered}$$

Остальные слагаемые в (6.1) оцениваются более сложными выражениями. Так, для формулы (5.1), с учетом (3.3), (3.4)

$$\begin{gathered}\Delta\mathbf{f}_2={}^1/_{180}h^5(\boldsymbol{\omega}^{\cdots}\times\boldsymbol{\omega}+4\boldsymbol{\omega}^{\cdot\cdot}\times\boldsymbol{\omega}^{\cdot})\\ \mathbf{f}_3={}^1/_{45}h^5[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}^{\cdot\cdot})-3\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}^{\cdot})]\\ \mathbf{f}_4={}^1/_{30}h^5\|\boldsymbol{\omega}\|^2\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\boldsymbol{\omega},\\ \Delta\mathbf{f}'=-h^5\|\boldsymbol{\omega}\|^4\boldsymbol{\omega}/3840\end{gathered}\tag{6.2}$$

Для формулы (5.2):

$$\begin{gathered}\Delta\mathbf{f}_2={}^4/_{945}h^7(\boldsymbol{\omega}^{(5)}\times\boldsymbol{\omega}+6\boldsymbol{\omega}^{(4)}\times\boldsymbol{\omega}^{\cdot}+8\boldsymbol{\omega}^{\cdots}\times\boldsymbol{\omega}^{\cdot\cdot})\\ \Delta\mathbf{f}_3={}^8/_{945}h^7[3\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}^{(4)}\times\boldsymbol{\omega})-36\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\boldsymbol{\omega}^{\cdots})-\\ -3\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}^{\cdots})+58\boldsymbol{\omega}^{\cdot\cdot}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}^{\cdot\cdot})+33\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times(\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\boldsymbol{\omega}^{\cdot\cdot})]\\ \Delta\mathbf{f}_4={}^4/_{315}h^7[48(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}^{\cdot\cdot})\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}^{\cdot})+\\ +80(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}^{\cdot})(\boldsymbol{\omega}^{\cdot\cdot}\times\boldsymbol{\omega})+16(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}^{\cdot\cdot})(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}^{\cdot})+\\ +\|\boldsymbol{\omega}\|^2(64\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\boldsymbol{\omega}^{\cdot\cdot}+12\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}^{\cdots})+96\|\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\|^2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}^{\cdot}]\\ \mathbf{f}_5={}^{64}/_{315}h^7[4\|\boldsymbol{\omega}\|^2\|\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\|^2\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}^{\cdot})^2\boldsymbol{\omega}-\\ -3\|\boldsymbol{\omega}\|^2(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}^{\cdot})\boldsymbol{\omega}^{\cdot}+\|\boldsymbol{\omega}\|^2\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}^{\cdot\cdot}\times\boldsymbol{\omega})]\\ \mathbf{f}_6={}^{16}/_{105}h^7\|\boldsymbol{\omega}\|^4\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}^{\cdot},\\ \Delta\mathbf{f}'=h^7\|\boldsymbol{\omega}\|^6\boldsymbol{\omega}/645\,120\end{gathered}\tag{6.3}$$

7. Характеристики накопленных ошибок. Можно считать, что вычисленные значения величин λ_0 и $\boldsymbol{\lambda}$ — соответственно λ_0^* и $\boldsymbol{\lambda}^*$ — задают ориентацию базиса E относительно близкого к I ортогонального базиса K. Накопленную ошибку интегрирования уравнений (1.1) охарактеризуем скаляром χ_0 и трехмерным вектором $\boldsymbol{\chi}$:

$$\chi_0=2(\lambda_0\lambda_0^*+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}^*-1),\quad \boldsymbol{\chi}=2(\lambda_0^*\boldsymbol{\lambda}-\lambda_0\boldsymbol{\lambda}^*+\boldsymbol{\lambda}^*\times\boldsymbol{\lambda})\tag{7.1}$$

Если λ_0^*, $\boldsymbol{\lambda}^*$ используются вместо λ_0, $\boldsymbol{\lambda}$ в (1.4), то вместо $\mathbf{r}_I$ находится вектор $\mathbf{r}_K$. В первом приближении

$$\mathbf{r}_K=\mathbf{r}_I+\boldsymbol{\chi}\times\mathbf{r}_I+\chi_0\mathbf{r}_I-\chi_0\mathbf{r}_E\tag{7.2}$$

Кроме того, $\lambda_0^{*2}+\|\boldsymbol{\lambda}^*\|^2\approx1+\chi_0$. Очевидно, $\boldsymbol{\chi}$ характеризует отклонение базиса K от I, а χ_0 — изменение длины векторов базиса K по сравнению с длиной ортов базиса I. Член $-\chi_0\mathbf{r}_E$ в (7.2) есть методическая ошибка преобразования (1.4), вызванная нарушением условия (1.3). Используя методику [11], находим оценки

$$\chi_0=-\frac{2}{H}\int_{t^0}^{t}\Delta f_0\,dt,\qquad \boldsymbol{\chi}=-\frac{2}{H}\int_{t^0}^{t}\Delta\mathbf{f}_I\,dt\tag{7.3}$$

Здесь $\Delta\mathbf{f}_I$ — результат преобразования координат вектора (6.1) из базиса E в базис I; t^0 — момент начала интегрирования уравнений (1.1).

8. Результаты моделирования. Моделирование алгоритмов интегрирования уравнений (1.1) выполнено при условиях

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\omega}=[\alpha\sin\nu t,\quad \alpha\cos\nu t,\quad c]^T,\quad t^0=0\\ \alpha=0{,}5c^{-1},\quad \nu=30c^{-1},\quad c=0{,}01c^{-1}\end{gathered}\tag{8.1}$$

Значение $\boldsymbol{\chi}$ вычислялось по формуле (7.1) с использованием аналитического решения уравнений (1.1) при движении (8.1). В табл. 1 представлены значения $t^{-1}\|\boldsymbol{\chi}\|(c^{-1})$, характеризующие скорость роста ошибки интегрирования (дрейф) при различных значениях h; столбцы I и II соответствуют формулам (5.1) и (5.2). В одноименных столбцах табл. 2 приведены количества умножений и сложений в секунду, не-

Таблица 1

h, с	I	II	III	IV	V
0,005	$7{,}0\cdot10^{-8}$	$5{,}2\cdot10^{-10}$	$5{,}1\cdot10^{-10}$	$7{,}2\cdot10^{-10}$	
0,01	$1{,}1\cdot10^{-6}$	$3{,}66\cdot10^{-8}$	$3{,}61\cdot10^{-8}$	$4{,}3\cdot10^{-8}$	$4{,}0\cdot10^{-10}$
0,02	$1{,}7\cdot10^{-5}$	$2{,}19\cdot10^{-6}$	$2{,}16\cdot10^{-6}$	$2{,}4\cdot10^{-6}$	$6{,}6\cdot10^{-8}$

Таблица 2

	I	II	III	IV	V
Умножений	1 700	1 700	1 900	1 350	2 150
Сложений	1 400	1 750	1 750	1 400	2 150

обходимые для вычисления Λ, при h=0,01 с. При всех значениях h в данном примере выполнялось соотношение $|\chi_0|\ll\|\chi\|$.

9. Сравнительная эффективность алгоритмов. Из двух формул интегрирования уравнений (1.1) более эффективной считаем ту, которая обеспечивает более высокую точность при одинаковых объемах вычислений либо требует меньшего числа операций в секунду для достижения одинаковой точности. Количественные соотношения зависят от характера движений объекта и диапазона значений h. Из табл. 1 и 2 видно, что при заданных условиях моделирования формула (5.2) эффективнее, чем (5.1).

Конкретные формулы рассмотренного выше типа имеют близкие по структуре и точностным характеристикам аналоги среди алгоритмов интегрирования уравнений (1.1) с использованием промежуточных кинематических параметров — координат вектора ориентации [3, 4]. В целом ни один из этих двух классов алгоритмов, по-видимому, не имеет преимуществ перед другим. Однако возможен поиск более совершенных и более эффективных модификаций алгоритмов в пределах обоих классов. В столбцах III табл. 1 и 2 приведены характеристики алгоритма вычисления Λ, основанного на формулах (15), (16), (24) из [4].

Структура выражений (6.3) показывает, а анализ оценок, полученных с помощью (7.3) в случае (8.1), подтверждает, что при сферических колебаниях объекта с частотами, численно намного превышающими значения угловой скорости, составляющие ошибки формулы (5.2), соответствующие $\Delta\mathbf{f}_3$, $\Delta\mathbf{f}_4$, могут накапливаться гораздо медленнее, чем составляющая, связанная с $\Delta\mathbf{f}_2$. Если при этом ошибки, определяемые выражениями $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_4$ в (6.2), накапливаются не быстрее, чем ошибка $\Delta\mathbf{f}_2$ в (6.3), то допустимо упрощение формулы (5.2) путем отбрасывания ее элементов, аппроксимирующих $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_4$, с целью повышения эффективности этой формулы. В столбцах IV табл. 1 и 2 представлены характеристики точности и вычислительных затрат при реализации такого упрощенного алгоритма в условиях (8.1).

Применение формул (4.1) порядка выше 6 сталкивается с ростом сложности аппроксимирующих выражений типа (5.3) и ухудшением их сходимости с увеличением H. При высокочастотных сферических движениях объекта упомянутого выше характера улучшение эффективности формул вида (5.2) может быть достигнуто вводом корректирующих поправок, повышающих порядок только выражения для $\mathbf{f}$. Пример поправки, вводимой на каждом четном шаге алгоритма (5.2) для компенсации ошибки $\Delta\mathbf{f}_2$ из (6.3):

$$\theta_{-1}\times({}^{44}/_{945}\theta_2-{}^{4}/_{135}\theta_{-3}-{}^{76}/_{945}\theta_1+{}^{92}/_{945}\theta_{-2}+{}^{16}/_{315}\theta_0)+$$
$$+\theta_0\times[{}^{20}/_{189}(\theta_1-\theta_2)+{}^{4}/_{189}\theta_{-3}-{}^{52}/_{945}\theta_{-2}]-{}^{64}/_{945}\theta_2\times\theta_1.$$

Характеристики такого уточненного алгоритма при движении (8.1) приведены в столбцах V табл. 1 и 2.

Можно показать, что если формула порядка p рассмотренного типа используется без изменений для интегрирования уравнений (1.1) при переменном такте съема вида $h_{i+1}=h_i+\varepsilon$, причем $\varepsilon=O(h_i^2)$ и в пределах шага $\varepsilon=\mathrm{const}$, то ошибка интегрирования на шаге остается величиной фактического порядка h_i^{p+1}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
2. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
3. *Панов А. П.* Синтез методов вычислений координат вектора ориентации // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наук. думка, 1979. Вып. 43. С. 122–130.
4. *Панов А. П.* Методы шестого порядка точности для вычислений координат вектора ориентации по квазикоординатам // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наук. думка, 1986. Вып. 69. С. 47–52.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
6. *Ткаченко А. И.* О применении параметров Родрига – Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объекта // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наук. думка, 1970. Вып. 5. С. 20–22.
7. *Челноков Ю. Н.* Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига – Гамильтона по его угловой скорости // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 3. С. 11–20.
8. *Dvornychenko V. N.* The number of multiplications required to chain coordinate transformations // J. Guidance, Control and Dynamics. 1985. V. 8. N 1. P. 157–159.
9. *Хардинг К. Ф.* Решение задачи эйлеровой гиродинамики. Ч. 1 // Труды Американского общества инженеров-механиков. Сер. Е (Прикладная механика). 1964. Т. 31. № 2. С. 189–192.
10. *Бесараб П. Н.* Определение параметров пространственной ориентации движущихся объектов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 1. С. 240–246.
11. *Боданский Е. Д., Фурман В. Д.* О погрешностях численного интегрирования кинематических уравнений Пуассона // Космич. исслед. 1970. Т. 8. № 6. С. 944–948.

Киев

Поступила в редакцию 12.VII.1989