

УДК 539.3

© 1992 г. Д. В. ГРИЛИЦКИЙ, В. С. КОЛЕСОВ,  
Р. Д. КУЛЬЧИЦКИЙ-ЖИГАЙЛО

ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ  
УПРУГОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПО ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ  
ЖЕСТКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ОСНОВАНИЯ

Осесимметричная контактная задача термоупругости о сжатии двух упругих тел вращения с учетом теплообразования от действия сил трения на круговой площадке контакта исследована в [1, 2]. В указанных публикациях задача рассматривается при условии идеального теплового контакта соприкасаемости и теплоизолированности на поверхностях вне области контакта. В данной работе в предположении неидеальности теплового контакта и теплообмена между соприкасающимися поверхностями и внешней средой по закону Ньютона, изучается влияние процесса теплообразования на распределение контактного давления и температур в случае плоскопараллельного движения упругого тела вдоль плоской поверхности жесткого теплопроводного основания.

1. Рассмотрим трехмерную контактную задачу для упругого тела вращения, движущегося по некоторому закону вдоль плоской поверхности жесткого теплопроводного основания и одновременно вращающегося вокруг собственной оси  $O\xi_2$  (фиг. 1) с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Закон движения центра масс тела задан соотношениями

$$x_c = x_c(\tau), \quad y_c = y_c(\tau) \quad (1.1)$$

Предполагается, что радиус площадки контакта мал по сравнению с радиусом кривизны движущегося тела, вследствие чего оба тела моделируются полупространствами.

Механическое взаимодействие тел на площадке контакта сопровождается теплообразованием за счет действия сил трения. Тепловой контакт между телами неидеальный [3]. Вне площадки контакта между поверхностями соприкасаемых тел и внешней средой осуществляется теплообмен по закону Ньютона. В процессе взаимодействия упругое тело прижимается к жесткому основанию силой  $P$ . Требуется определить величину площадки контакта, контактное давление, поля температур и тепловых потоков.

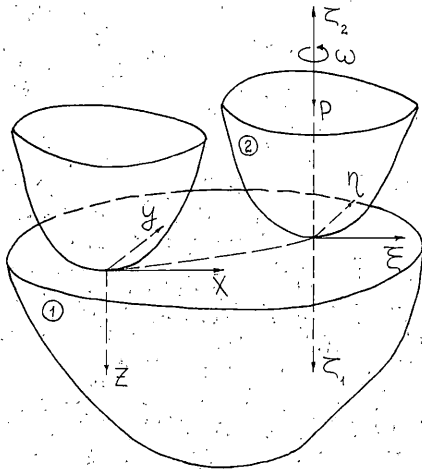
Рассматриваемые тела отнесем к подвижным безразмерным координатам  $\xi\eta\zeta_1$  и  $\xi\eta\zeta_2$ , связанным с неподвижными координатами соотношениями

$$\xi = x - x_c(\tau), \quad \eta = y - y_c(\tau), \quad \zeta_1 = -\zeta_2 = z \quad (1.2)$$

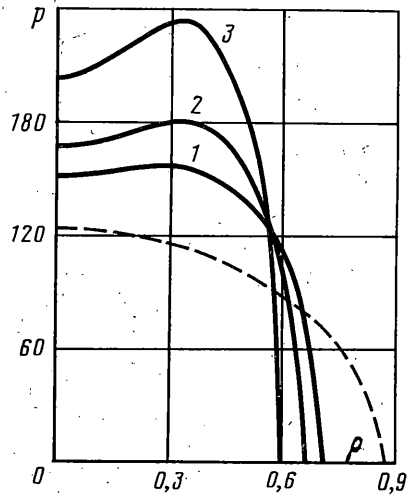
или к цилиндрическим координатам  $\rho\phi\zeta_1$  и  $\rho\phi\zeta_2$  ( $\xi = \rho \cos \phi$ ,  $\eta = \rho \sin \phi$ ). Здесь и в дальнейшем индексами 1 и 2 обозначаем величины, отнесенные соответственно к неподвижному и подвижному телу.

Температурное поле  $T_1(\xi, \eta, \zeta_1, \tau)$ , установившееся в неподвижном теле, в подвижных координатах  $\xi\eta\zeta_1$ , в силу соотношения  $D_1 T_1 = \partial_\tau T_1 - \partial_\xi T_1 \partial_\tau x_c - \partial_\eta T_1 \partial_\tau y_c$  удовлетворяет в квазистационарном приближении уравнению

$$\partial_\xi^2 T_1 + \partial_\eta^2 T_1 + \partial_{\zeta_1}^2 T_1 + 2 \text{Re}_1 \partial_\xi T_1 + 2 \text{Pe}_2 \partial_\eta T_1 = 0 \quad (1.3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь  $Re_1 = \partial_x x_c a (2\kappa)^{-1}$ ,  $Re_2 = \partial_y y_c a (2\kappa)^{-1}$  (числа Пекле),  $a$  — радиус площадки контакта,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности.

Теплофизические условия на граничной поверхности  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  имеют вид

$$k \partial_{\xi_1} T_1 - (1-k) \partial_{\xi_2} T_2 + c(T_2 - T_1) = 0, \quad \rho < 1 \quad (1.4)$$

$$2k \partial_{\xi_1} T_1 + c(T_2 - T_1) = -ag(\rho, \varphi)(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}, \quad \rho < 1 \quad (1.5)$$

$$\partial_{\xi_j} T_j - Bi^{(j)} T_j = 0, \quad \rho > 1, \quad j = 1, 2 \quad (1.6)$$

В соотношениях (1.4)–(1.6) введены обозначения  $k = \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}$ ,  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$  — коэффициенты теплопроводности,  $c = ha(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}$ ,  $h$  — термическая проводимость контактной площадки,  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения,  $Bi^{(j)} = \alpha_j a \lambda_j^{-1}$ ,  $j = 1, 2$  (критерий Био),  $\alpha_j$  — коэффициенты теплообмена,  $g(\rho, \varphi) = v \sigma$ ,  $v^2 = \omega^2 a^2 (\rho^2 + \varepsilon^2 - 2\rho\varepsilon \sin(\varphi - \delta))$  (скорость точки с координатами  $(\rho, \varphi)$ ),  $\varepsilon = [(\partial_x x_c)^2 + (\partial_y y_c)^2]^{1/2}$ ;  $(\omega a)^{-1} \delta = \text{arctg}(\partial_y y_c / \partial_x x_c)$ ,  $\sigma_r = k_0 p(\rho, \varphi)$  (касательные напряжения, определяемые согласно закону Амонтона),  $k_0$  — коэффициент трения,  $p(\rho, \varphi)$  — контактное давление. При определении скорости  $v$  мы предполагаем, что линейные скорости точек, принадлежащих площадке контакта, мало отличаются от скорости центра масс.

Из соотношения (1.4) следует, что подвижное тело в процессе взаимодействия вращается в некотором неосесимметричном поле теплового потока, вследствие чего распределение температур в этом теле будет, вообще говоря, неосесимметричным. Однако, как следует из анализа нестационарной задачи теплопроводности для тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью в неосесимметричном поле теплового потока, для достаточно больших значений  $\omega$  ( $\omega_0 = a^2 \omega / \kappa_2 > 50$ ,  $\kappa_2$  — коэффициент теплопроводности подвижного тела) поле температур мало отличается от осесимметричного распределения, полученного в результате усреднения теплового потока по угловой координате  $\varphi$ . Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что температура  $T_2$  в подвижном теле удовлетворяет осесимметричному уравнению теплопроводности

$$\partial_\rho^2 T_2 + \rho^{-1} \partial_\rho T_2 + \partial_{\xi_1}^2 T_2 = 0 \quad (1.7)$$

а граничное условие 1.4 заменим условием, усредненным по угловой координате

$$k \partial_{\xi_1} T_1^* - (1-k) \partial_{\xi_2} T_2 + c(T_2 - T_1^*) = 0, \quad \xi_1 = \xi_2 = 0, \quad \rho < 1$$

$$T_1^*(\rho, \xi_1) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} T_1(\rho, \varphi, \xi_1) d\varphi \quad (1.8)$$

Прежде чем перейти к уравнениям термоупругости, исследуем распределение касательных напряжений на площадке контакта. Для этого разложим вектор касательных напряжений  $\sigma_\tau$  на составляющие в цилиндрических координатах

$$\sigma_\rho = - \frac{\varepsilon k_0 \rho (\rho, \varphi) \cos(\varphi - \delta)}{\sqrt{\rho^2 + \varepsilon^2 - 2\rho\varepsilon \sin(\varphi - \delta)}}^{-1/2} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi = & -k_0 \rho (\rho, \varphi) + \\ & + \frac{k_0 \varepsilon^2 \cos^2(\varphi - \delta) \rho (\rho, \varphi)}{(\rho^2 + \varepsilon^2 - 2\rho\varepsilon \sin(\varphi - \delta))^{1/2} (\rho - \varepsilon \sin(\varphi - \delta) + (\rho^2 + \varepsilon^2 - 2\rho\varepsilon \sin(\varphi - \delta))^{1/2})} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Из соотношений (1.9), (1.10) следует, что для малых значений  $\varepsilon$  касательные напряжения  $\sigma_\rho$  и второе слагаемое в выражении для  $\sigma_\varphi$  на площадке контакта за исключением круга малого радиуса (порядка  $5 \div 6\varepsilon$ ) более чем в пять раз меньше величины  $k_0 \rho (\rho, \varphi)$ . Вследствие этого влияние данных составляющих касательных напряжений на перераспределение контактного давления незначительно и в дальнейшем будем им пренебрегать.

В результате принятых предложений исходная задача свелась к определению компонент вектора упругого перемещения  $u = a^{-1} u_\rho(\rho, \xi_2)$ ,  $w = a^{-1} u_{\xi_2}(\rho, \xi_2)$ , поля температур  $T_2(\rho, \xi_2)$ , контактного давления  $p(\rho)$  и трехмерного распределения температурного поля  $T_1(\rho, \varphi, \xi_1)$ . Указанные величины удовлетворяют при этом выражениям (1.3), (1.5)–(1.8), а также уравнениям термоупругости

$$\partial_\rho^2 u + \rho^{-1} \partial_\rho u - \rho^{-2} u + \partial_{\xi_2}^2 u + (1-2\nu)^{-1} \partial_\rho \Theta - \frac{2(1+\nu)\alpha}{1-2\nu} \partial_\rho T_2 = 0 \quad (1.11)$$

$$\partial_\rho^2 w + \rho^{-1} \partial_\rho w + \partial_{\xi_2}^2 w + (1-2\nu)^{-1} \partial_{\xi_2} \Theta - \frac{2(1+\nu)\alpha}{1-2\nu} \partial_{\xi_2} T_2 = 0 \quad (1.12)$$

и граничным условиям

$$\sigma_{\xi_2 \xi_2} = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \rho > 1; \quad \sigma_\rho = 0, \quad \xi_2 = 0 \quad (1.13)$$

$$w = \Delta - A a \rho^2, \quad \xi_2 = 0, \quad \rho < 1 \quad (1.14)$$

$$2\rho a^2 \int_0^1 \rho p(\rho) d\rho = P \quad (1.15)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\Delta$  – сближение тел,  $\Theta$  – дивергенция вектора упругого перемещения.

2. Используя интегральное преобразование Ханкеля и конечное преобразование Фурье, для температурных полей  $T_1$  и  $T_2$  построим интегральные представления

$$\begin{aligned} T_1(\rho, \varphi, \xi_1) = & \exp(-\text{Pe}_1 \rho \cos \varphi - \text{Pe}_2 \rho \sin \varphi) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{s}{\sqrt{s^2 + \text{Pe}^2 + \text{Bi}^{(1)}}} \times \right. \\ & \times \int_0^1 x f_n^{(1)}(x) J_n(xs) dx e^{-\xi_1 \sqrt{\text{Pe}^2 + s^2}} J_n(s\rho) ds \cos(n\varphi) + \left. \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{s}{\sqrt{s^2 + \text{Pe}^2 + \text{Bi}^{(1)}}} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \left. \int_0^1 x t_n^{(1)}(x) J_n(xs) dx e^{-\tau_1 \sqrt{Pe_1^2 + s^2}} J_n(s\rho) ds \sin(n\varphi) \right\} \quad (2.1)$$

$$T_2(\rho, \xi_2) = \int_0^\infty \frac{se^{-\tau_2 s}}{s + Bi^{(2)}} \int_0^1 x f_0^{(2)}(x) J_0(xs) dx J_0(s\rho) ds \quad (2.2)$$

$$Pe^2 = Pe_1^2 + Pe_2^2$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(1)}(\rho) \cos(n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} t_n^{(1)}(\rho) \sin(n\varphi) = \\ & = -\exp(Pe_1 \rho \cos \varphi + Pe_2 \rho \sin \varphi) (\partial_{\tau_1} T_1 - Bi^{(1)} T_1) |_{\xi_1=0} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$f_0^{(2)}(\rho) = -(\partial_{\tau_2} T_2 - Bi^{(2)} T_2) |_{\xi_2=0} \quad (2.4)$$

Соотношения (2.1), (2.2) удовлетворяют при этом уравнения (1.3), (1.7) и граничное условие (1.6).

Задача термоупругости для подвижного тела (1.11)–(1.14) с помощью интегрального преобразования Ханкеля сводится к системе парных интегральных уравнений

$$\int_0^\infty \overline{p(s)} J_0(s\rho) ds = F(\rho), \quad \rho < 1; \quad \int_0^\infty s \overline{p(s)} J_0(s\rho) ds = 0, \quad \rho > 1 \quad (2.5)$$

$$F(\rho) = \frac{\Delta - Aa\rho^2}{2(1-\nu^2)} E - \frac{\alpha E}{2(1-\nu)} \int_0^\infty \overline{T_2(s, 0)} J_0(s\rho) ds \quad (2.6)$$

где  $E$  — модуль Юнга. Представив функцию  $\overline{p(s)}$  в виде

$$\overline{p(s)} = \int_0^1 t \psi(t) \cos(ts) dt \quad (2.7)$$

преобразуем систему парных интегральных уравнений (2.5) в интегральное уравнение Абеля

$$\int_0^\rho t \psi(t) \frac{dt}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} = F(\rho), \quad \rho < 1$$

для которого известно решение в замкнутом виде.

Вследствие этого, трансформанта по Ханкелю от контактного давления может быть представлена согласно формулы

$$\overline{p(s)} = 2\pi^{-1} \int_0^1 \cos(ts) \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x F(x) dx}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt$$

Учитывая соотношения (2.2), (2.6), после ряда преобразований, получим интегральное представление для контактного давления

$$p(\rho) = \frac{4AaE\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(1-\nu^2)} + \frac{\alpha E}{\pi(1-\nu)} \int_0^1 x f_0^{(2)}(x) R(x, \rho) dx \quad (2.8)$$

$$xR(x, \rho) = -\text{Bi}^{(2)} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \int_0^\infty \frac{\sin(\eta t) J_0(\eta x) d\eta}{\eta + \text{Bi}^{(2)}} +$$

$$+ \begin{cases} x\rho^{-1} F\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1-x^2}}, x\rho^{-1}\right), & x < \rho \\ F\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\rho^2}}, \rho x^{-1}\right), & \rho < x \end{cases} \quad (2.9)$$

Здесь  $F(\beta, y)$  — эллиптический интеграл первого рода.

Подставляя выражения (2.1), (2.2), (2.9) в теплофизические условия (1.5), (1.8), приходим к системе сингулярных интегральных уравнений на функции  $f_n^{(1)}(\rho)$ ,  $n=0, 1, \dots$ ;  $t_n^{(1)}(\rho)$ ,  $n=1, 2, \dots$ ;  $f_0^{(2)}(\rho)$ :

$$(1-k)f_0^{(2)}(\rho) - k \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho) f_n^{(1)}(\rho) - k \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\rho) t_n^{(1)}(\rho) +$$

$$+ (c - (1-k)\text{Bi}^{(2)}) \int_0^1 x f_0^{(2)}(x) K_0^{(2)}(x, \rho) dx - (c - k \text{Bi}^{(1)}) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho) \int_0^1 x f_n^{(1)}(x) \times$$

$$(2.10)$$

$$\times K_n^{(1)}(x, \rho) dx - (c - k \text{Bi}^{(1)}) \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\rho) \int_0^1 x t_n^{(1)}(x) K_n^{(1)}(x, \rho) dx = 0$$

$$2k \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(1)}(\rho) \cos(n\varphi) + 2k \sum_{n=1}^{\infty} t_n^{(1)}(\rho) \sin(n\varphi) + (c - 2k \text{Bi}^{(1)}) \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\varphi) \times$$

$$\times \int_0^1 x f_n^{(1)}(x) K_n^{(1)}(x, \rho) dx + (c - 2k \text{Bi}^{(1)}) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\varphi) \int_0^1 x t_n^{(1)}(x) K_n^{(1)}(x, \rho) dx -$$

$$- c \exp(\text{Pe}_1 \rho \cos \varphi + \text{Pe}_2 \rho \sin \varphi) \int_0^1 x f_0^{(2)}(x) K_0^{(2)}(x, \rho) dx = c \exp(\text{Pe}_1 \rho \cos \varphi +$$

$$+ \text{Pe}_2 \rho \sin \varphi) k_0 \omega a^2 \quad (2.11)$$

$$\sqrt{\rho^2 + \varepsilon^2 - 2\rho\varepsilon \sin(\varphi - \delta)} \left\{ \frac{4AaE\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(1-\nu^2)} + \frac{\alpha E}{\pi(1-\nu)} \int_0^1 x f_0^{(2)}(x) R(x, \rho) dx \right\}$$

В соотношениях (2.10), (2.11) введены обозначения

$$a_n(\rho) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-\text{Pe}_1 \rho \cos \varphi - \text{Pe}_2 \rho \sin \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad n=0, 1, \dots$$

$$b_n(\rho) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-\text{Pe}_1 \rho \cos \varphi - \text{Pe}_2 \rho \sin \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi, \quad n=1, 2, \dots$$

$$K_n^{(1)}(x, \rho) = \int_0^\infty \frac{s}{\sqrt{s^2 + \text{Pe}^2 + \text{Bi}^{(1)}}} J_n(s\rho) J_n(xs) ds, \quad n=0, 1, \dots$$

$$K_0^{(2)}(x, \rho) = \int_0^{\infty} \frac{s}{s + \text{Bi}^{(2)}} J_0(s\rho) J_0(xs) ds$$

Исследовав функции  $R(x, \rho)$ ,  $K_n^{(1)}(x, \rho)$ ,  $K_0^{(2)}(x, \rho)$ , можно показать, что они имеют особенность логарифмического типа на линии  $x = \rho$ .

Разложив в уравнении (2.11) функции  $\exp(\text{Pe}_1 \rho \cos \varphi + \text{Pe}_2 \rho \sin \varphi) \times \exp(\text{Pe}_1 \rho \cos \varphi + \text{Pe}_2 \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2 + \varepsilon^2 - 2\rho\varepsilon \sin(\varphi - \delta)}$  в ряды Фурье с коэффициентами

$$c_n(\rho) = \delta_n \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(\text{Pe}_1 \rho \cos \varphi + \text{Pe}_2 \rho \sin \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad n=0, 1, \dots$$

$$d_n(\rho) = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(\text{Pe}_1 \rho \cos \varphi + \text{Pe}_2 \rho \sin \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi, \quad n=1, 2, \dots$$

$$e_n(\rho) = \delta_n \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(\text{Pe}_1 \rho \cos \varphi + \text{Pe}_2 \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2 + \varepsilon^2 - 2\rho\varepsilon \sin(\varphi - \delta)} \times \cos(n\varphi) d\varphi, \quad n=0, 1, \dots$$

$$g_n(\rho) = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(\text{Pe}_1 \rho \cos \varphi + \text{Pe}_2 \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2 + \varepsilon^2 - 2\rho\varepsilon \sin(\varphi - \delta)} \times \sin(n\varphi) d\varphi, \quad n=1, 2, \dots$$

где  $\delta_n = 0,5$  при  $n=0$  и  $\delta_n = 1$  при  $n > 0$ , приравняем в нем выражения при одинаковых гармониках. В результате получим бесконечную последовательность интегральных уравнений

$$2kf_n^{(1)}(\rho) + (c - 2k \text{Bi}^{(1)}) \int_0^1 x f_n^{(1)}(x) K_n^{(1)}(x, \rho) dx - cc_n(\rho) \int_0^1 x f_0^{(2)}(x) \times$$

$$\times K_0^{(2)}(x, \rho) dx = k_0 \omega a^2 e_n(\rho) \left\{ \frac{4AaE\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(1-\nu^2)} + \frac{\alpha E}{\pi(1-\nu)} \int_0^1 x f_0^{(2)}(x) R(x, \rho) dx \right\},$$

$n=0, 1, \dots$

$$2kt_n^{(1)}(\rho) + (c - 2k \text{Bi}^{(1)}) \int_0^1 x t_n^{(1)}(x) K_n^{(1)}(x, \rho) dx - cd_n(\rho) \int_0^1 x f_0^{(2)}(x) \times$$

$$\times K_0^{(2)}(x, \rho) dx = k_0 \omega a^2 g_n(\rho) \left\{ \frac{4AaE\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(1-\nu^2)} + \frac{\alpha E}{\pi(1-\nu)} \int_0^1 x f_0^{(2)}(x) R(x, \rho) dx \right\},$$

$n=1, 2, \dots$

которая совместно с уравнением (2.10) образует исходную систему уравнений. Определив ее решение на основании соотношений (2.1)–(2.4), (2.8), (2.9), можно исследовать все искомые величины.

3. Пусть упругое тело вращается с угловой скоростью  $\omega$  и движется вдоль плоской поверхности жесткого теплопроводного основания по прямой линии с постоянной малой скоростью  $v$  ( $\varepsilon = 0 \div 0,02$ ). В этом случае закон

движения центра масс задается соотношениями:  $x_c = x_c(\tau) = v\tau$ ;  $y_c = y_c(\tau) = 0$ . Вследствие этого

$$Pe = Pe_1 = va(2\kappa)^{-1}, \quad Pe_2 = 0, \quad \varepsilon = v(\omega a)^{-1}, \quad \delta = 0$$

$$a_n^0(\rho) = (-1)^n I_n(Pe \rho), \quad c_n^0(\rho) = 2\delta_n I_n(Pe \rho), \quad b_n(\rho) = d_n(\rho) = 0 \quad (3.1)$$

$$e_n^0(\rho) = \delta_n \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{Pe \rho \cos \varphi} \sqrt{\rho^2 + \varepsilon^2 - 2\rho\varepsilon \sin \varphi \cos(n\varphi)} d\varphi \quad (3.2)$$

$$g_n^0(\rho) = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{Pe \rho \cos \varphi} \sqrt{\rho^2 + \varepsilon^2 - 2\rho\varepsilon \sin \varphi \sin(n\varphi)} d\varphi \quad (3.3)$$

С учетом соотношений (3.1)–(3.3) система интегральных уравнений (2.10), (2.12), (2.13) преобразуется к виду:

$$(1-k)f_0^{(2)}(\rho) - k \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0(\rho) f_n^{(1)}(\rho) + (c - (1-k)Bi^{(2)}) \int_0^1 x f_0^{(2)}(x) K_0^{(2)}(x, \rho) dx -$$

$$- (c - k Bi^{(1)}) \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0(\rho) \int_0^1 x f_n^{(1)}(x) K_n^{(1)}(x, \rho) dx = 0 \quad (3.4)$$

$$2kf_n^{(1)}(\rho) + (c - 2k Bi^{(1)}) \int_0^1 x f_n^{(1)}(x) K_n(x, \rho) dx - cc_n^0(\rho) \int_0^1 x f_n^{(2)}(x) \times$$

$$\times K_0^{(2)}(x, \rho) dx = k_0 \omega a^2 e_n^0(\rho) \left\{ \frac{4AaE\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(1-\nu^2)} + \frac{\alpha E}{\pi(1-\nu)} \int_0^1 x f_0^{(2)}(x) R(x, \rho) dx \right\} \quad (3.5)$$

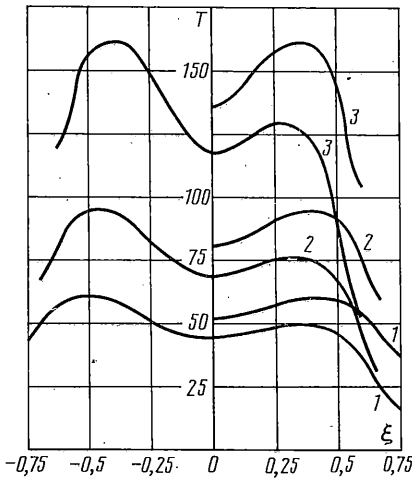
$$2kt_n^{(1)}(\rho) + (c - 2k Bi^{(1)}) \int_0^1 x t_n^{(1)}(x) K_n(x, \rho) dx = k_0 \omega a^2 g_n^0(\rho) \times$$

$$\times \left\{ \frac{4AaE\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(1-\nu^2)} + \frac{\alpha E}{\pi(1-\nu)} \int_0^1 x f_0^{(2)}(x) R(x, \rho) dx \right\} \quad (3.6)$$

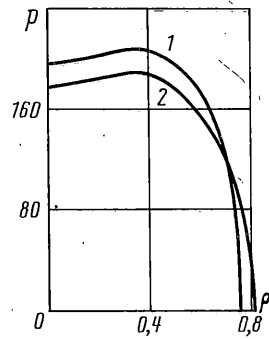
Как следует из соотношений (3.4)–(3.6) система функций  $t_n^{(1)}(\rho)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  не влияет на распределение контактного давления и поля температур в подвижном теле. Функции  $f_n^{(1)}(\rho)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $f_0^{(2)}(\rho)$  полностью определяются выражениями (3.4), (3.5).

Решение системы интегральных уравнений (3.4)–(3.5) определяем численным методом, путем замены интегралов конечными суммами по квадратурной формуле парабол согласно методике, предложенной в [4, с. 63–64] и сведения задачи к решению системы линейных уравнений. Вычисления производились при таких значениях основных параметров:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $\nu = 0,3$ ;  $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}$  град $^{-1}$ ;  $\kappa_1 = \kappa_2 = 12,5$  мм $^2$ /с;  $\lambda_1 = \lambda_2 = 45,4$  Вт/м $^{\circ}$ К;  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1000$  Вт/м $^2 \cdot ^{\circ}$ К;  $h = 20$  кВт/м $^2 \cdot ^{\circ}$ К;  $A = 0,05$  м;  $k_0 = 0,1$ .

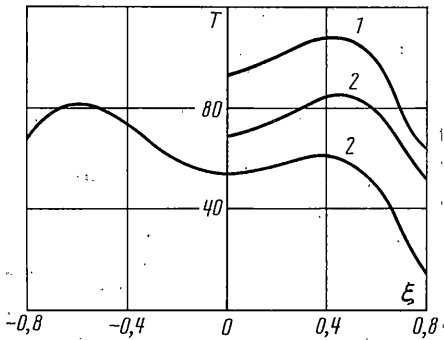
На фиг. 2, 3 даны графики функций контактного давления и температурных полей в телах в зависимости от изменения угловой скорости  $\omega$ . Кривые 1, 2, 3 построены для значений  $P = 20$  кН  $v = 0,5$  см/с и значений  $\omega$ , равных 20, 30, 50 рад/с соответственно. Пунктирная кривая на фиг. 2 задает распределение контактного давления чисто упругой задачи. Графики показывают, что величина контактного давления и температур существенно зависит от интенсивности теплообразования, пропорциональной величине угловой скорости  $\omega$ .



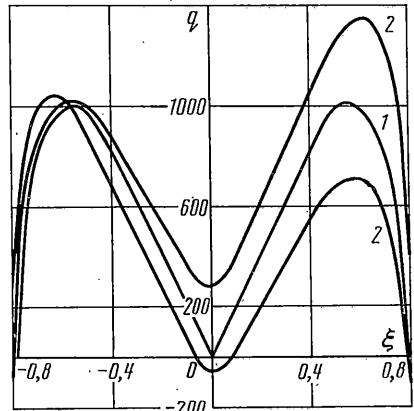
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 4, 5, 6 приведены графики функций контактного давления, температурных полей и полей тепловых потоков для двух значений линейной скорости  $v$ .

Кривые 1, 2 соответствуют значениям параметров  $P=30$  кН;  $\omega=20$  рад/с;  $v=0$  и 1 см/с соответственно. Исследования показали, что в случае отсутствия поступательного движения при одинаковых физико-тепловых характеристиках тел поля температур и тепловых потоков в них совпадают. Наличие поступательного движения, как это следует из фиг. 6, приводит к существенному перераспределению потоков тепла, что находит свое отражение в распределениях контактного давления и температур. На фигурах  $\xi$ ,  $p$  измеряется в см,  $p$  — в МПа,  $T$  — в  $^{\circ}\text{C}$ ,  $q$  — в  $\text{кВт/м}^2$ .

Рассмотрена также задача о движении центра масс упругого тела по некоторой окружности радиуса  $R$  ( $R \gg a$ ). Показано, что определение решения этой задачи сводится к исследованию системы сингулярных интегральных уравнений, совпадающих по своей структуре с уравнениями (3.4)–(3.6).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Генералов М. Б., Кудрявцев Б. А., Паргон В. З. Контактная задача термоупругости для вращающихся тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 46–52.
2. Коровичинский М. В. Осесимметричный термоупругий контакт при тепловыделении от трения // Задачи нестационарного трения в машинах, приборах и аппаратах. М. Наука, 1978. С. 54–83.
3. Грилицкий Д. В., Баран В. П. О постановке контактных задач термоупругости с учетом теплообразования при неидеальном тепловом контакте тел // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. 1987. Вып. 27. С. 10–18.
4. Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов: Вища шк., 1981. 136 с.

Львов

Поступила в редакцию  
26.IV.1990