МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1992

УДК 539.3

© 1992 г. А. В. БЕЛОКОНЬ

# К ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗМЕРОВ

Контактные задачи теории упругости подразделяются на два типа [1]. Первый тип (задачи контактного типа), когда в области контакта граничные функции полностью определены, изучен в [2]. Второй тип (контактные задачи), когда в области контакта перемещения определены с точностью до движения штампа как жесткого целого, а произвол в граничном задании перемещений ликвидируется при помощи интегральных соотношений, заданных на границе, изучался в [1, 3], где рассмотрены статические контактные задачи теории упругости. Отметим, что наличие интегральных соотношений в постановке задачи существенно отличает контактную задачу от классических задач математической физики. В предлагаемой работе исследуются динамические контактные задачи. Метод исследования отличается от используемого в [1, 3] и основан на введении в рассмотрение специальных функциональных пространств. Установлены дискретность спектра контактной задачи и полнота системы собственных функций. Сформулированы определения обобщенных решений контактных задач с учетом и без учета массы штампа, что предоставляет возможность численного исследования рассматриваемых задач [4].

1. Рассмотрим упругую анизотропную среду, занимающую область $V$, звездную относительно некоторого шара $V^0$ [2]. Границу области $V$ обозначим через $S$ и будем считать, что $S$ содержит по крайней мере одну плоскую область $S_1$, с которой свяжем систему координат $x$, направив ось $x_3$ по нормали к $S_1$. Пусть на части $S_{10}\subset S_1$ упругая среда взаимодействует с жестким штампом, имеющим плоское основание. На штамп действует сила $P$, направленная по нормали к $S_1$, и момент, проекция которого на ось $x_3$ равна нулю. Будем также предполагать, что часть границы $S_2$ жестко защемлена, а оставшаяся часть $S_3$ свободна от напряжений, причем разбиение границы $S$ таково, что $S=S_{10}\cup S_2\cup S_3$.

Рассматривая установившиеся колебания, приходим к математической формулировке контактной задачи: в области $V$ требуется найти решение системы дифференциальных уравнений

$$[C^{hlmp}\varepsilon_{hl}(\mathbf{v})]_{,m}+\rho\omega^2\mathbf{v}_p=0,\quad x\in V \tag{1.1}$$

при следующих граничных условиях

$$\mathbf{v}=0,\quad x\in S_2 \tag{1.2}$$

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}=0,\quad x\in S_3 \tag{1.3}$$

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}-(\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}=0,\quad x\in S_{10} \tag{1.4}$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=\alpha-\beta x_1-\gamma x_2,\quad x\in S_{10} \tag{1.5}$$

Здесь $\mathbf{T}$ — тензор напряжений с составляющими $C^{hlmp}\varepsilon_{hl}(\mathbf{v})$; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — неизвестные величины, подлежащие определению из интегральных соотношений

$$R_0(\mathbf{v})=P,\quad R_1(\mathbf{v})=M_2,\quad R_2(\mathbf{v})=M_1 \tag{1.6}$$

$$R_k(\mathbf{v})=\int\limits_{S_{10}} x_k \mathbf{T}\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\, dS, \qquad x_0=1 \tag{1.7}$$

выражающих условие движения штампа как жесткого целого без учета его массы. Для простоты принято, что граничные условия (1.2)–(1.4) однородны.

2. Дадим определение необходимых для дальнейшего пространств $H_k$.

*а*) На множестве непрерывных вместе со своей производной вектор-функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условию

$$\varphi=0, \quad x\in S_2 \tag{2.1}$$

введем скалярное произведение

$$\int\limits_V C^{klmp}\varepsilon_{kl}(\varphi_1)\varepsilon_{mp}(\varphi_2)\,dV=(\varphi_1, \varphi_2)_{H_1} \tag{2.2}$$

Замыкание $C_{1V}$ в норме, порожденной скалярным произведением (2.2) назовем $H_1$.

*б*) Пусть $\varphi\in H_1$ и удовлетворяет условию

$$\varphi\cdot\mathbf{n}=0, \quad x\in S_{10} \tag{2.3}$$

тогда будем говорить, что $\varphi\in H_2$.

*в*) Пусть $\varphi\in H_1$ и удовлетворяет условию

$$\varphi\cdot\mathbf{n}=\alpha-\beta x_1-\gamma x_2 \tag{2.4}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — произвольны, тогда $\varphi\in H_3$.

*Свойство 1.* Пространства $H_k$ эквивалентны пространству $W_{2V}^{01}$ на соответствующих множествах функций [1], т. е. имеет место

$$m_{1k}\|\varphi\|_{W_{2V}^{01}} \leqslant \|\varphi\|_{H_k} \leqslant m_{2k}\|\varphi\|_{W_{2V}^{01}} \tag{2.5}$$

где $m_{1k}$, $m_{2k}$ — положительные постоянные. Левое неравенство в (2.5) называется неравенством Корна [2].

*Свойство 2.* Из компактности вложения $W_{2V}^{01}$ в $L_{2V}$ [4] вытекает, что и пространства $H_k$ компактно вложены в $L_{2V}$.

Дадим обобщенную постановку контактной задачи (1.1)–(1.7).

*Определение 1.* Обобщенным решением контактной задачи (1.1)–(1.7) назовем вектор-функцию $\mathbf{v}\in H_3$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(\mathbf{v}, \psi)_{H_3}-\rho\omega^2(\mathbf{v}, \psi)_{L_{2V}}=\alpha_1 P-\beta_1 M_2-\gamma_1 M_1 \tag{2.6}$$

при любых $\psi\in H_3$ и таких, что $\psi\cdot\mathbf{n}=\alpha_1-\beta_1 x_1-\gamma_1 x_2$, где $\alpha_1$, $\beta_1$ и $\gamma_1$ — произвольны.

Из тождества (2.6) вытекают уравнения (1.1), граничные условия (1.3), (1.4), а также интегральные соотношения (1.6), (1.7).

Введем в $H_3$ функционалы ($k=0, 1, 2$):

$$J_k(\psi)=T_k^{-1}\int\limits_{S_{10}}(\psi\cdot\mathbf{n})x_k\, dS, \qquad T_k=\int\limits_{S_{10}} x_k^2\, dS, \qquad x_0=1 \tag{2.7}$$

и, не нарушая общности, примем, что оси $x_1$ и $x_2$ для области $S_{10}$ главные центральные. В этом случае $\alpha_1=J_0(\psi)$, $\beta_1=-J_1(\psi)$, $\gamma_1=-J_2(\psi)$ и поскольку $\psi\in H_3$, то, на основании теорем вложения Соболева, функцио-

[1] $\varphi\in W_{2V}^{01}$, если $\varphi\in W_{2V}^{1}$ и $\varphi=0$, $x\in S_2$.

налы (2.7) ограничены в $H_3$

$$|J_k(\psi)|\leqslant m_k\|\psi\|_{H_3},\quad m_k>0 \tag{2.8}$$

Кроме того очевидно, что

$$|(\mathbf{v},\ \psi)_{L_2V}|\leqslant c\|\mathbf{v}\|_{L_2V}\|\psi\|_{H_3},\quad c>0 \tag{2.9}$$

и теперь из (2.8), (2.9) и свойства 2 вытекает

*Лемма 1.* Тождество (2.6) эквивалентно операторному уравнению

$$\mathbf{v}-\rho\omega^2K\mathbf{v}=P\mathbf{V}_0(x)+M_2\mathbf{V}_1(x)+M_1\mathbf{V}_2(x) \tag{2.10}$$

где $K$ — вполне непрерывный оператор в $H_3$, а $\mathbf{V}_k(x)$ определены при помощи равенств $(\psi,\ \mathbf{V}_k)_{H_3}=J_k(\psi)$.

Из леммы 1 и теоремы 3 [4, с. 216] вытекает

*Теорема 1.* 1) Контактная задача (1.1)—(1.7) имеет дискретный спектр Г:

$$\omega_1^2\leqslant\omega_2^2\leqslant\ldots\leqslant\omega_k^2\leqslant\ldots,\quad \omega_k^2\to\infty\quad (k\to\infty)$$

2) Система собственных функций контактной задачи $\mathbf{v}_k(x)$ полна как в $L_{2V}$, так и в $H_3$.

3. Изучим теперь более подробно спектр контактной задачи Г и структуру собственных функций. Прежде всего отметим, что краевая задача (1.1)—(1.5) при фиксированных $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ может быть рассмотрена как самостоятельная.

*Определение 2.* Обобщенным решением краевой задачи (1.1)—(1.5) назовем вектор-функцию $\mathbf{v}\in H_1$, принимающую на $S_{10}$ значение (1.5) при фиксированных $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ и удовлетворяющую при любых $\varphi\in H_2$ интегральному тождеству

$$(\mathbf{v},\ \varphi)_{H_1}-\rho\omega^2(\mathbf{v},\ \varphi)_{L_2V}=0 \tag{3.1}$$

Из тождества (3.1) вытекает, что почти всюду удовлетворяются (1.1) и граничные условия (1.3), (1.4).

Введем функцию

$$\mathbf{w}=\mathbf{v}-\mathbf{v}_0 \tag{3.2}$$

где $\mathbf{v}_0\in H_3$. Представление (3.2) возможно, на основании теорем о продолжении функций с границы $S_{10}$ внутрь области $V$ в предположении, что контур $L$, ограничивающий область $S_{10}$ является звездным относительно некоторого круга. Подставим (3.2) в (3.1) получим тождество

$$(\mathbf{w},\ \varphi)_{H_2}-\rho\omega^2(\mathbf{w},\ \varphi)_{L_2V}=\rho\omega^2(\mathbf{v}_0,\ \varphi)_{L_2V}-(\mathbf{v}_0,\ \varphi)_{H_1} \tag{3.3}$$

Поскольку имеет место неравенство вида (2.9) и свойство 2, то легко показать по аналогии с предыдущим, что краевая задача (1.1)—(1.5) имеет дискретный спектр

$$\omega_{11}^2\leqslant\omega_{12}^2\leqslant\ldots\leqslant\omega_{1k}^2\leqslant\ldots,\quad \omega_{1k}^2\to\infty\quad (k\to\infty)$$

а соответствующие собственные элементы образуют систему полную, как в $H_2$, так и в $L_{2V}$.

Из сказанного выше вытекает, что при $\omega\notin\Gamma_1$ краевая задача (1.1)—(1.5) однозначно разрешима при любых заданиях $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$.

4. Рассмотрим случай $\omega\in\Gamma_1$. Пусть $\omega=\omega_{1l}$ и кратность $\omega_{1l}$ равна $m$. Будем искать решение задачи (3.3) в виде

$$\mathbf{w}=\sum_{p=1}^{\infty}B_p\varphi_p(x) \tag{4.1}$$

где $B_p$ — постоянные, а $\varphi_p$ — ортонормированные в $L_{2V}$ собственные функции однородной краевой задачи (1.1)—(1.5). Подставляя (4.1) в (3.3), найдем

$$B_p = \frac{\rho\omega_{1l}^2(\mathbf{v}_0, \varphi_p)_{L_{2V}} - (\mathbf{v}_0, \varphi_p)_{H_1}}{\rho(\omega_{1p}^2 - \omega_{1l}^2)}, \quad p \neq l, l+1, \ldots, l+m-1 \quad (4.2)$$

При этом неоднородная краевая задача разрешима при выполнении условий

$$(\mathbf{v}_0, \varphi_p)_{H_1} - \rho\omega_{1l}^2(\mathbf{v}_0, \varphi_p)_{L_{2V}} = 0, \; p = l, l+1, \ldots, l+m-1 \quad (4.3)$$

налагающих определенные ограничения на $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Выясним к чему приводят эти ограничения в зависимости от кратности собственного значения. Учитывая (4.1), (4.2), решение представим в виде

$$\mathbf{w} = \sum_{p=1}^{\infty}{}' B_p\varphi_p(x) + \sum_{p=l}^{l+m-1} B_p\varphi_p(x) \quad (4.4)$$

где штрих у суммы означает, что коэффициенты $B_p$ определены по (4.2). В конечной сумме $B_p$ — произвольны.

Таким образом, решение контактной задачи содержит $m$ произвольных постоянных $B_p$ и 3 произвольных $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Для их определения имеем условия (4.3), а также (1.6). Однако, чтобы воспользоваться (1.6), необходимо показать, что интегралы (1.7) существуют.

*Лемма 2.* Пусть $\varphi_l(x)$, $\omega_{1l}$ соответственно собственные функция и частота однородной краевой задачи (1.1)—(1.5), тогда интегралы

$$R_k(\varphi_l) = \int_{S_{10}} x_k \mathbf{T}(\varphi_l)\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\, dS \quad (k=0,1,2,\; x_0=1) \quad (4.5)$$

имеют смысл.

Действительно, подставив $\varphi_l(x)$ в (1.1) и скалярно умножив полученное на произвольную функцию $\mathbf{f} \in H_1$, $\mathbf{f}|_{S_{10}} = 1$ получим тождество

$$(\varphi_l, \mathbf{f})_{H_1} - \rho\omega_{1l}^2(\varphi_l, \mathbf{f})_{L_{2V}} = \int_{S_{10}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}(\varphi_l)\cdot\mathbf{n}\, dS = R_0(\varphi_l) \quad (4.6)$$

Поскольку $\varphi_l(x)$, $\mathbf{f}(x) \in H_1$, то в левой части тождества стоит ограниченная величина, но тогда интеграл $R_0(\varphi_l)$ ограничен, а следовательно ограничены и $R_k(\varphi_l)$ $(k=1, 2)$.

*Лемма 3.* Пусть $\mathbf{v} \in H_1$ решение (не обязательно единственное) краевой задачи (1.1)—(1.5) при произвольных $\omega$, тогда интегралы $R_k(\mathbf{v})$ ограничены.

Доказательство леммы 3 аналогично предыдущему. Следует лишь заметить, что $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ в (1.5) произвольны и при необходимости их можно положить равными нулю.

Переходим к определению постоянных. Полагая

$$\mathbf{v}_0(x) = \alpha\mathbf{v}_{00}(x) - \gamma\mathbf{v}_{02}(x) - \beta\mathbf{v}_{01}(x) \quad (4.7)$$

условиям (1.6), (4.3) можно придать вид

$$\alpha R_0(\varphi_p) - \beta R_1(\varphi_p) - \gamma R_2(\varphi_p) = 0, \; p = l, l+1, \ldots, l+m-1$$

$$\alpha R_0(\eta_0) - \beta R_1(\eta_1) - \gamma R_2(\eta_2) + \sum_{p=l}^{l+m-1} B_p R_k(\varphi_p) = P\delta_{0k} + M_2\delta_{1k} + M_1\delta_{2k}, \; k=0,1,2 \quad (4.8)$$

где $\delta_{ij}=0$, $i\neq j$; $\delta_{ij}=1$, $i=j$ и кроме того $\eta_j=w_j+v_{0j}$

$$\sum_{p=1}^{\infty}{}' \frac{\rho\omega_{1l}^2 (\mathbf{v}_{0j}, \varphi_p)_{L_2V} - (\mathbf{v}_{0j}, \varphi_p)_{H_1}}{\rho(\omega_{1p}^2 - \omega_{1l}^2)} \varphi_p(x) = \mathbf{w}_j \tag{4.9}$$

Как следует из предыдущего, все коэффициенты в (4.8) имеют смысл и вопрос о разрешимости контактной задачи при $\omega\in\Gamma_1$ сводится к возможности определения $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $B_p$ из (4.8). Из вида системы (4.8) вытекает

*Теорема 2.* Пусть кратность $\omega_{1l}\in\Gamma_1$ равна $m$ и пусть $\varphi_l, \varphi_{l+1}, \ldots, \varphi_{l+m-1}$ собственные функции соответствующие $\omega_{1l}$, тогда

1) При $m\leqslant 3$ неоднородная контактная задача (1.1)–(1.6) имеет единственное решение, если определитель $\Delta_1$ системы (4.8) отличен от нуля;

2) При $m\leqslant 3$ и $\Delta_1=0$ однородная контактная задача ($P=M_1=M_2=0$) имеет нетривиальное решение, и частота $\omega_{1l}$ является собственной и для контактной задачи. Неоднородная контактная задача имеет в этом случае неединственное решение, если ранг матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы. В противном случае неоднородная контактная задача неразрешима;

3) При $m>3$ частота $\omega_{1l}$ является собственной частотой контактной задачи;

4) Спектр контактной задачи $\Gamma_2\subset\Gamma_1$ конечен либо счетен, причем $\Gamma_2=\{\omega_{2k}\}$, где

$$0\leqslant\omega_{21}^2\leqslant\omega_{22}^2\leqslant\ldots$$

и кратность частоты $\omega_{2p}\in\Gamma_2$ не больше числа $m+3$.

5. Пусть теперь $\omega\bar{\in}\Gamma_1$. Построим решение задачи контактного типа (1.1)–(1.5), разыскивая его в форме (3.2), где $\mathbf{v}_0\in H_1$, а вид $\mathbf{w}$ определяется формулой (4.1). При $\omega\bar{\in}\Gamma_1$ постоянные в (4.1) определены формулой (4.2) при всех $p$ и, учитывая (4.6), (4.7), формуле (4.2) можно придать вид

$$B_p=-(\mathbf{v}_0, \varphi_p)_{L_2V}+B_p^* \tag{5.1}$$

$$B_p^*=\rho^{-1}(\omega^2-\omega_p^2)^{-1}[\alpha R_0(\varphi_p)-\beta R_1(\varphi_p)-\gamma R_2(\varphi_p)] \tag{5.2}$$

Теперь видно, что с учетом (3.2), (5.1) решение задачи контактного типа определяется формулой (суммирование по $p=1,\ldots,\infty$)

$$\mathbf{v}=\sum B_p^*\varphi_p(x) \tag{5.3}$$

и для того, чтобы построить решение контактной задачи, т. е. определить $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, следует воспользоваться условиями (1.6), которые, как следует из леммы 3, имеют смысл.

Подставляя (5.3) в (1.6), (1.7) для определения $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ получим систему

$$\alpha b_{k0}-\beta b_{k1}-\gamma b_{k2}=P\delta_{k0}+M_2\delta_{k1}+M_1\delta_{k2} \tag{5.4}$$

$$b_{kl}(\omega)=R_k\left(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{R_l(\varphi_p)}{\rho(\omega^2-\omega_p^2)}\varphi_p(x)\right) \tag{5.5}$$

Таким образом, разрешимость контактной задачи (1.1)–(1.7) связана с разрешимостью системы (5.4).

Обратим внимание на то, что операции $R_k$, определяемые формулами (1.6)–(1.7) и суммирования в формуле (5.5) не перестановочны.

Из анализа системы (5.4) вытекает

*Теорема 3.* Пусть $\omega=\omega_{3k}\in\Gamma_1$ является нулем определителя системы (5.4), тогда ранг $r_c$ собственной функции $\mathbf{v}_k(x)$ не более трех. Причем если

1) $r_c=1$, то $\mathbf{v}_k(x)$ имеют вид

$$\mathbf{v}_k(x)=\alpha^{(k)}\mathbf{v}_{k0}-\beta^{(k)}\mathbf{v}_{k1}-\gamma^{(k)}\mathbf{v}_{k2},\quad \mathbf{v}_{kj}\cdot n|_{S_{10}}=x_j,\quad x_0=1$$

где $\alpha^{(k)}$, $\beta^{(k)}$, $\gamma^{(k)}$ однозначно определяются из системы (5.4) и условия $(\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_k)_{L_2\mathbf{v}}=1$. При этом для существования решения неоднородной контактной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\alpha^{(k)}P-\beta^{(k)}M_2-\gamma^{(k)}M_1=0$.

2) $r_c=2$, то данной собственной частоте $\omega_{3k}$ отвечают две собственные функции

$$\mathbf{v}_k^{(1)}(x)=\frac{b_{01}}{b_{00}}\mathbf{v}_{k0}-\mathbf{v}_{k1},\qquad \mathbf{v}_k^{(2)}(x)=\frac{b_{02}}{b_{00}}\mathbf{v}_{k0}-\mathbf{v}_{k2}$$

причем неоднородная контактная задача разрешима лишь при выполнении условий $b_{01}P-b_{00}M_2=0$, $b_{02}P-b_{00}M_1=0$. Предполагается, что $b_{00}(\omega_{3k})\neq0$.

3) $r_c=3$. Необходимым и достаточным условием для этого является обращение в нуль функций $b_{pl}(\omega)$; $p$, $l=0$, 1, 2 при $\omega=\omega_{3k}$.

Обозначим множество нулей определителя системы (5.4) через $\Gamma_3$.

*Теорема 4.* Пусть $\omega\in\Gamma_2\cup\Gamma_3$, тогда контактная задача (1.1)–(1.6) однозначно разрешима в $H_3$.

6. Рассмотрим теперь взаимодействие массивного штампа с упругой средой. В этом случае в формулировке контактной задачи изменятся лишь условия (1.7), которые в рассматриваемом случае заменяются на соотношения

$$R_0(\mathbf{v})=P+\alpha m\omega^2$$
$$R_1(\mathbf{v})=M_2-\omega^2\beta J_{22},\quad R_2(\mathbf{v})=M_1-\omega^2\gamma J_{11} \tag{6.1}$$

где $J_{pp}$ — моменты инерции штампа относительно осей $x_p$, а $m$ его масса.

*Определение 3.* Обобщенным решением контактной задачи (1.1)–(1.6), (6.1) назовем вектор-функцию $\mathbf{v}\in H_3$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(\mathbf{v},\boldsymbol{\psi})_{H_3}-\rho\omega^2(\mathbf{v},\boldsymbol{\psi})_{L_2\mathbf{v}}=\alpha_1P-\beta_1M_2-\gamma_1M_1+$$
$$+\alpha\alpha_1m\omega^2+\beta\beta_1\omega^2J_{22}+\gamma\gamma_1\omega^2J_{11}$$

при любых $\boldsymbol{\psi}\in H_3$ и таких, что $\boldsymbol{\psi}\cdot n|_{S_{10}}=\alpha_1-\beta_1x_1-\gamma_1x_2$, где $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ — произвольны.

Введем на вещественном множестве непрерывных функций, удовлетворяющих условию (1.5), скалярное произведение

$$(\mathbf{v},\boldsymbol{\psi})_H=\rho(\mathbf{v},\boldsymbol{\psi})_{L_2\mathbf{v}}+\alpha\alpha_1m+\beta\beta_1J_{22}+\gamma\gamma_1J_{11} \tag{6.2}$$

Замыкание $C_\mathbf{v}$ в норме, порожденной скалярным произведением (6.2) назовем пространством $H$.

Определим теперь операторы $A$ и $B$ при помощи соотношений $(A\mathbf{v},\boldsymbol{\psi})_{L_2\mathbf{v}}=(\mathbf{v},\boldsymbol{\psi}]_{H_3}$, $(B\mathbf{v},\boldsymbol{\psi})_{L_2\mathbf{v}}=(\mathbf{v},\boldsymbol{\psi})_H$.

Из предыдущего ясно, что оператор $A$ — положительно определен в $L_{2\mathbf{v}}$. Очевидно также, что и оператор $B$ — положительно определен в $L_{2\mathbf{v}}$, а всякое множество ограниченное в $H_3$ компактно в $H$. В таком случае спектральную задачу для рассматриваемой контактной задачи можно записать в виде

$$A\mathbf{v}-\omega^2B\mathbf{v}=0 \tag{6.3}$$

и для нее, как следует из [4, с. 235], справедлива

*Теорема 5.* а) Уравнение (6.3) имеет бесконечное множество вещественных собственных чисел $0<\omega_1^2\leqslant\omega_2^2\leqslant\ldots\leqslant\omega_n^2\leqslant\ldots$, причем $\omega_n^2\to\infty$ при

$n \to \infty$; б) Соответствующие собственные элементы образуют систему ортонормированную в $H$, ортогональную в $H_3$ и полную в обоих пространствах.

Докажем теперь, что имеет место

*Теорема 6.* Первая собственная частота $\omega_1$ контактной задачи с учетом массы штампа не превышает первой собственной частоты контактной задачи (1.1)–(1.7).

Действительно первые собственные частоты контактных задач с учетом массы штампа и без учета определяются точной нижней границей соответствующих функционалов $\Phi_1(\mathbf{v})=\|\mathbf{v}\|_{H_3}^2/\|\mathbf{v}\|_H^2$, $\Phi_2(\mathbf{v})=\|\mathbf{v}\|_{H_3}^2/\|\mathbf{v}\|_{L_{2V}}^2\rho$. Очевидно $\Phi_2(\mathbf{v})\geqslant\Phi_1(\mathbf{v})$ для любых $\mathbf{v}\in H_3$ откуда и вытекает утверждение теоремы.

Анализ спектра задачи (1.1)–(1.6), (6.1) проведем на примере двумерной задачи, предполагая, что упругие постоянные, конфигурации упругого тела и штампа, а также граничные условия таковы, что допускают решение в виде

$$\mathbf{v}(x)=\alpha\sum_{p=1}^{\infty}\frac{R_0(\varphi_{p0})\varphi_{p0}(x)}{(\omega^2-\omega_{p0}^2)\rho}-\beta\sum_{p=1}^{\infty}\frac{R_1(\varphi_{p1})\varphi_{p1}(x)}{(\omega^2-\omega_{p1}^2)\rho} \tag{6.4}$$

причем $R_k(\varphi_{pl})=0$, $k\neq l$. Т. е. предполагается, что поступательное движение и поворот штампа могут быть разделены, а $\omega_{n0}$, $\omega_{n1}\in\Gamma_1$.

Из (6.3), (6.4) и (1.6) получим систему

$$\alpha(\omega)\left[-R_0\left(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{R_0(\varphi_{p0})\varphi_{p0}(x)}{\rho\omega_{p0}^2}\right)+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\omega^2R_0^2(\varphi_{p0})}{\rho\omega_{p0}^2(\omega^2-\omega_{p0}^2)}-m\omega^2\right]=P \tag{6.5}$$

$$\beta(\omega)\left[-R_1\left(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{R_1(\varphi_{p1})\varphi_{p1}(x)}{\rho\omega_{p1}^2}\right)+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\omega^2R_1^2(\varphi_{p0})}{\rho\omega_{p1}^2(\omega^2-\omega_{p1}^2)}-\omega^2J_{22}\right]=-M_2 \tag{6.6}$$

Обратим внимание, что в первых членах формул (6.5), (6.6) операции $R_0$ и $R_1$ и суммирование не перестановочны, также как и в формуле (6.5).

Рассмотрим вначале построение решения на спектре задачи контактного типа (1.1)–(1.5). Пусть $\omega_{n0}\in\Gamma_1$ и кратность собственного значения равна $r$. Тогда, можно показать, что система вида (4.8) для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\sum_{p=n}^{n+r-1}B_pR_0(\varphi_{p0})=P,\qquad \alpha=0 \tag{6.7}$$

Из (6.7) следует, что если ранг собственной функции $r=1$, то $B_p$ однозначно определяется при $R_0(\varphi_{n0})\neq0$. Если же $r>1$, то коэффициенты $B_p$ не определяются однозначно и частота $\omega_{n0}$ является собственной. Однако, в рассматриваемом случае может возникнуть и ситуация, при которой, например, множитель при $\beta$ в (6.6) обратится в нуль при $\omega=\omega_{n0}$. В этом случае даже при $r=1$ неоднородная контактная задача (1.1)–(1.6), (6.1) разрешима лишь при $M_2=0$, а параметр $\beta$ не определен, т. е. частота $\omega_{n0}$ является собственной для контактной задачи (1.1)–(1.6), (6.1).

Последний случай интересен тем, что если ставить задачу об управлении процессом движения штампа, например, рассматривать условия, при которых штамп совершает только поступательное движение без поворота, то на частоте $\omega_{n0}$ такая задача неразрешима.

Наконец, рассмотрим случай, когда $r=1$, а функция такова, что $R_0(\varphi_{n0})=0$. В этом случае уравнение (6.5) на частоте $\omega=\omega_{n0}$ примет вид

$$\alpha(\omega_{n0})\left[-R_0\left(\sum_{\substack{p=1\\p\neq n}}^{\infty}{}' \frac{R_0(\varphi_{p0})}{(\omega_{n0}^2-\omega_{p0}^2)\rho}\varphi_{p0}(x)\right)-m\omega^2\right]=P$$

и $\alpha$ — определяется однозначно, если множитель при $\alpha$ отличен от нуля. Однако, в этом случае решение (6.4) будет определено с точностью до слагаемого $B_n\varphi_{n0}(x)$ и частота $\omega=\omega_{n0}$ также будет собственной для рассматриваемой контактной задачи.

Дальнейший анализ спектра контактной задачи (1.1)—(1.6), (6.1) в основном повторяет предыдущие рассуждения и легко может быть проведен.

Заканчивая изучение контактных задач, сделаем два замечания:

*Замечание 1.* Существование решения статической контактной задачи ($\omega=0$) вытекает из леммы 1. Решение задачи статики имеет вид

$$\mathbf{v}_s=P\mathbf{V}_0(x)+M_2\mathbf{V}_1(x)+M_1\mathbf{V}_2(x) \tag{6.8}$$

Однако в (6.8) сила и моменты не могут задаваться произвольно, поскольку может произойти отрыв штампа и область контакта станет неизвестной. Этого можно избежать если потребовать, чтобы внутри области контакта $\mathbf{T}(\mathbf{v}_s)\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\leqslant 0$. Последнее налагает ограничение на заданные силу и момент.

*Замечание 2.* При изучении динамических задач под действием, например, силы $P=P_1\cos\omega t+P_2$ и момента $M_1=M_2=0$ искомый вектор решения представляется в виде $\mathbf{v}=P_1\mathbf{v}_1(x)\cos\omega t+P_2\mathbf{v}_2(x)$ и при постановке задачи необходимо требовать выполнения условия $\mathbf{T}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\leqslant 0$ при любых $t$, что приводит к определенным ограничениям на $P_1$ и $P_2$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Ворович И. И.* Математические функциональные методы в смешанных задачах теории упругости // Развитие теории контактных задач в СССР/Под ред. Галина Л. А. М.: Наука, 1976. С. 87—95.
2. *Эйдус Д. М.* Контактная задача теории упругости // Мат. сб. 1954. Т. 34. № 3. С. 429—440.
3. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
4. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.


Ростов н/Д


Поступила в редакцию
7.VI.1990