

УДК 539.3:534.1

©1992 г. И. П. ГЕТМАН, А. Н. РУМЯНЦЕВ, Ю. А. УСТИНОВ

О ДИНАМИЧЕСКОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ
НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОМ СЛОЕ,
ОСЛАБЛЕННОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Рассматривается задача о возбуждении колебаний однородного и неоднородного частот для получения точности удовлетворения граничных условий не превышены изменяющиеся во времени по гармоническому закону усилия. Предлагается новый прием сведения краевой задачи к бесконечной системе алгебраических уравнений, основанный на использовании условий обобщенной ортогональности [1].

Представлены результаты численных расчетов для симметричных колебаний однородного и кусочно-однородного слоев с отверстиями. Установлена существенная концентрация напряжений у края отверстия на частоте, при которой в значительной степени возбуждаются неоднородные волны. Эта частота по аналогии с задачей для долулопосы [2] определяет частоту краевого резонанса в слое с круговым отверстием.

1. Рассмотрим упругий слой, занимающий объем $V = \{(x, y, z) | x, y \in \mathbb{R}^2, |z| \leq h\}$, ослабленный круговым цилиндрическим отверстием радиуса a . Материал слоя в общем случае неоднороден по толщине и является изотропным.

Полагаем, что лицевые поверхности слоя $z = \pm h$ свободны от напряжений, а к боковой поверхности отверстия приложена нагрузка, изменяющаяся по гармоническому закону

$$\begin{aligned} (\sigma, e_z) &= \sigma_z |_{z=\pm h} = 0 \\ (\sigma, e_r) &= \sigma_r |_{r=a} = \sigma_0 e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где e_r, e_z — базисные орты в цилиндрической системе координат, σ — тензор напряжений.

Предположим, что вектор σ_0 не зависит от угловой координаты φ , что позволит рассмотреть задачу в осесимметричной постановке.

Уравнения установившихся осесимметричных колебаний слоя в цилиндрической безразмерной системе координат относительно безразмерных амплитудных характеристик могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} [\mu(a' + u_\zeta)]' + \lambda u_\zeta'' + \varepsilon^2 \kappa \Delta a + \rho \Omega^2 a &= 0 \\ [\mu u_\zeta' + \varepsilon^2 \lambda \Delta a]' + \mu \varepsilon^2 \Delta (a' + u_\zeta) + \rho \Omega^2 u_\zeta &= 0 \\ u_\zeta &= h^{-1} u_z; \quad u_\rho = h^{-1} u_r = \varepsilon \partial_\rho a; \quad \zeta = h^{-1} z; \\ G_0 &= \max_z [\mu(z)]; \quad \rho_0 = \max_z [\rho(z)] \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\rho = \rho a^{-1}; \quad \varepsilon = h a^{-1}; \quad \kappa = \lambda + 2\mu; \quad \Omega = \omega h \sqrt{\rho_0 (\sqrt{G_0})^{-1}}; \quad \Delta = \partial^2 / \partial \rho^2 + \rho^{-1} \partial_\rho$$

Здесь a — потенциал, $\lambda(\zeta), \mu(\zeta), \rho(\zeta)$ — кусочно-непрерывные функции поперечной координаты, отнесенные соответственно к G_0 и ρ_0 ; Ω — безразмерная частота колебаний; штрихом обозначается производная по поперечной координате ζ .

Общее решение уравнений (1.2) с однородными граничными условиями (1.1) можно представить в виде

$$a(\rho, \xi) = \sum_k u_k(\xi) m_k(\rho), \quad u_\zeta(\rho, \xi) = i \sum_k w_k(\xi) \gamma_k m(\rho) \quad (1.3)$$

Здесь функция $m_k(\rho) = m(\gamma_k, \rho)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\varepsilon^2 \Delta m_k + \gamma_k^2 m_k = 0 \quad (1.4)$$

Пусть $X_k = (u_k, w_k)$ — собственные векторы-функции, а γ_k — собственные значения спектральной задачи

$$\begin{aligned} L(\gamma, \Omega)X &= (A_0 X)' + i\gamma[(A_1 X)' + A_1^T X'] - \gamma^2 A_2 X + \rho \Omega^2 X = 0 \\ N(\gamma)X(\pm 1) &= A_0 X' + i\gamma A_1 X|_{\zeta=\pm 1} = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$A_0 = \begin{vmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \kappa \end{vmatrix}, \quad A_1 = \begin{vmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \mu \end{vmatrix}$$

Спектр γ_k задачи (1.5) дискретен при любом конечном Ω и имеет конечное число вещественных и счетное множество комплексных собственных значений. Ниже будут использованы некоторые свойства, которыми обладают множества собственных значений γ_k , собственных вектор-функций X_k , а также четырехмерных вектор-функций V_k с компонентами $V_{1k} = u_k$, $V_{2k} = w_k$, $V_{3k} = \sigma_k$, $V_{4k} = \tau_k$, где $\sigma_k = i\gamma_k \kappa u_k + \lambda w_k'$, $\tau_k = \mu(u_k' + i\gamma_k w_k)$ — амплитудные характеристики напряжений σ_{11} и σ_{13} в декартовой системе координат.

Свойство 1. Если $\gamma = \gamma_k$ является собственным значением, то $-\gamma_k$, $\pm \bar{\gamma}_k$ также являются собственными значениями. Черта над символом здесь и далее обозначает комплексное сопряжение.

Свойство 2. Собственному значению $\gamma_n = \pm \bar{\gamma}_k$ соответствуют собственные векторы-функции $X_n = (\bar{u}_k, \mp \bar{w}_k)$, $V_n = (\bar{u}_k, \mp \bar{w}_k, \mp \sigma_k, \bar{\tau}_k)$.

Свойство 3. Собственные функции удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int_{-1}^{+1} (u_k \bar{\sigma}_n - \bar{w}_n \tau_k) d\xi = \begin{cases} 0 & (\gamma_n \neq \bar{\gamma}_k) \\ p_k & (\gamma_n = \bar{\gamma}_k) \end{cases}, \quad p_k = \int_{-1}^{+1} (-u_k \sigma_k + w_k \tau_k) d\xi \quad (1.6)$$

Свойства 1 и 2 легко устанавливаются из структуры оператора L , свойство 3 установлено, например, в [3].

Введем в рассмотрение четырехмерную вектор-функцию $W(\rho, \xi) = (u_\rho, u_\zeta, \sigma_{\rho\rho}, \sigma_{\rho\xi})$. Выражая компоненты этого вектора на основе представлений (1.3), получим

$$W(\rho, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k W_k(\rho, \xi) \quad (1.7)$$

где C_k — произвольные постоянные, а элементарные однородные решения W_k представляют собой вектор-функцию с компонентами

$$\begin{aligned} W_{k1} &= \varepsilon u_k \partial_\rho m_k, \quad W_{k2} = i\gamma_k w_k m_k \\ W_{k3} &= i\gamma_k \sigma_k m_k - 2\mu \varepsilon^2 u_k \partial_\rho m_k / \rho, \quad W_{k4} = \varepsilon \tau_k \partial_\rho m_k \end{aligned} \quad (1.8)$$

Функции $m_k(\rho)$ в соответствии с условиями ограниченности решения на бесконечности и условиями излучения энергии выберем в следующем виде ($H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода):

$$m_k(\rho) = H_0^{(1)}(\gamma_k \varepsilon / \rho) / H_0^{(1)}(\gamma_k \varepsilon) \quad (1.9)$$

С помощью условий обобщенной ортогональности (1.6) и свойства 2 можно установить условия обобщенной ортогональности системы элементарных однородных решений W_k :

$$[W_k, W_n] = (JW_k, W_n) = \begin{cases} 0, & (\gamma_n \neq \bar{\gamma}_k) \\ d_k(\rho), & (\gamma_n = \bar{\gamma}_k) \end{cases} \quad (1.10)$$

$$J = i \begin{vmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{vmatrix}, \quad I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(f, g) = \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^4 f_k \bar{g}_k d\zeta, \quad d_k(\rho) = \varepsilon p_k \gamma_k [\bar{m}(\bar{\gamma}_k, \rho) \partial_\rho m(\gamma_k, \rho) - m(\gamma_k, \rho) \partial_\rho \bar{m}(\bar{\gamma}_k, \rho)]$$

Условия (1.10) оказываются весьма полезными для сведения функциональных уравнений, возникающих при удовлетворении различных типов граничных условий на цилиндрической части поверхности, к системе алгебраических уравнений.

2. Решение, описываемое вектором W , удовлетворяет уравнениям движения (1.2) и однородным граничным условиям на лицевых поверхностях слоя (1.1). Граничные условия (1.1) на боковой поверхности представим в следующем виде

$$\sum_k C_k W_k(1, \zeta) = \begin{vmatrix} \sum_k C_k W_{k1}(1, \zeta) \\ \sum_k C_k W_{k2}(1, \zeta) \\ \sigma_0(\zeta) \\ \tau_0(\zeta) \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

где $\sigma_0(\zeta)$, $\tau_0(\zeta)$ — заданные на цилиндрической части границы амплитудные значения напряжений $\sigma_{\rho\rho}$, $\sigma_{\rho\tau}$. При этом первые два равенства системы (2.1) являются тождествами.

Суммирование в формулах (2.1) проводится по всем γ_k , для которых $\text{Im } \gamma_k \geq 0$; $d\Omega/d\gamma_k > 0$ ($\text{Im } \gamma_k = 0$). При этом вещественным γ_k соответствуют однородные волны, комплексным — неоднородные волны, локализованные вблизи цилиндрической границы $\rho=1$ и затухающие при удалении от нее.

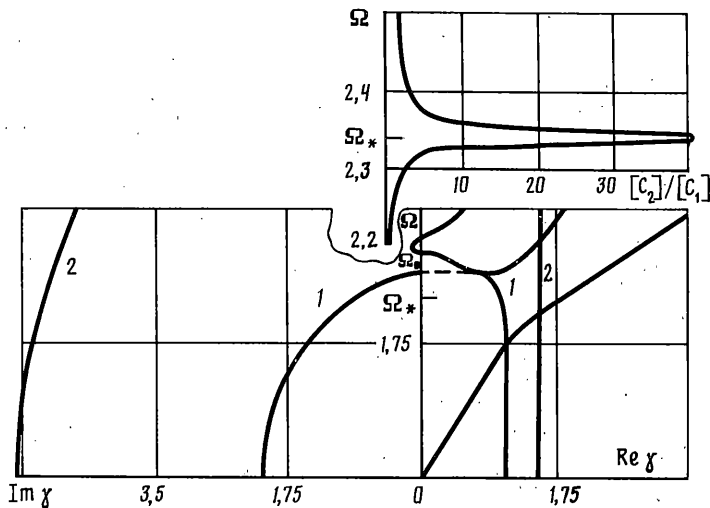
Для сведения функциональных уравнений (2.1) к алгебраическим воспользуемся условием обобщенной ортогональности (1.10). В результате придем к бесконечной системе алгебраических уравнений относительно неизвестных C_h вида (δ_{nh} — символ Кронекера):

$$\sum_{h=1}^{+\infty} (a_{nh} - p_{nh}) C_h + b_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

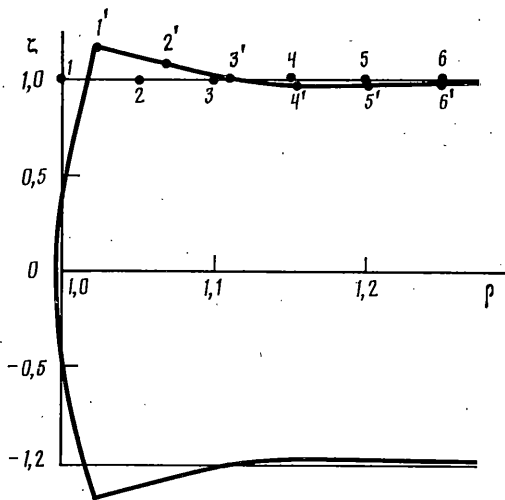
$$a_{nh} = i \int_{-1}^1 (W_{h1} \bar{W}_{n3} + W_{h2} \bar{W}_{n4}) d\zeta, \quad b_n = -i \int_{-1}^1 (\sigma_0 \bar{W}_{n1} + \tau_0 \bar{W}_{n2}) d\zeta$$

$$p_{nh} = \begin{cases} d_h(1) \delta_{nh} & (\text{Im } \gamma_h = 0) \\ 0 & (\text{Im } \gamma_h \neq 0) \end{cases}$$

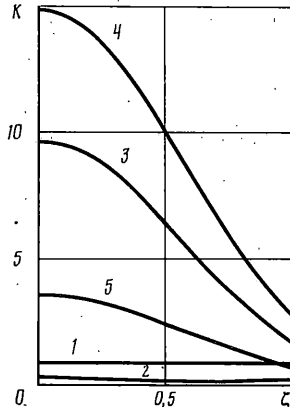
Используя свойство 3, нетрудно показать, что коэффициенты матрицы удовлетворяют равенству $\bar{a}_{nh} = -a_{nh}$, $n \neq h$.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Для решения системы (2.2) использовался метод редукции, при этом критерием достоверности решения являлась степень выполнения граничных условий (2.1).

3. Проиллюстрируем вначале приложение предложенного метода к решению задачи о динамической концентрации напряжений в однородном изотропном слое с круговым отверстием, граница которого загружена нормальным давлением $\sigma_0(\zeta) = \text{const}$, а $\tau_0(\zeta) = 0$. Указанный характер нагрузки приводит к задаче о колебаниях растяжения - сжатия, симметричных относительно срединной плоскости $\zeta = 0$. Отметим, что при удовлетворении граничных условий в рассмотренном ниже интервале частот для получения точности удовлетворения граничных условий не превышающей 5% по отношению к σ_0 достаточно было удерживать до шести пар комплексных собственных значений γ_k . При этом собственные значения и собственные функции u_k, w_k спектральной задачи (1.5) строятся численно с помощью метода ортогональной прогонки [4].

На фиг. 1 представлены дисперсионные кривые симметричных колебаний слоя (коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$) и зависимость от частоты отношения $|C_2|/|C_1|$ модулей амплитуд первой неоднородной и однородной волн. При приближении к частоте Ω_* , которая составляет примерно 0,86 от величины Ω_0 (частоты, на которой групповая скорость обращается в нуль) наблюдается резкое возрастание амплитуды первой неоднородной волны, которая достигает своего максимального значения при

$\Omega = \Omega_*$. При $\epsilon = 0,1$ частота Ω_* практически точно совпадает с частотой краевого резонанса для полуполосы.

Для поведения решения на частоте Ω_* характерно возникновение интенсивных колебаний, локализованных в окрестности цилиндрической границы $\rho = 1$. На фиг. 2 представлена рассчитанная форма колебаний слоя в осевом сечении в окрестности границы на частоте Ω_* , которую по аналогии с задачей для полуполосы назовем частотой краевого резонанса.

Полученные результаты позволяют провести анализ поля напряжений вблизи боковой поверхности отверстия. На фиг. 3 приведены графики зависимости при $\rho = 1$ отношения $K = |\sigma_{\varphi\varphi}/\sigma_{\rho\rho}|$ от координаты ξ при различных значениях частоты: кривая с номером 1 соответствует частоте $\Omega = 0,2$; 2 — частоте $\Omega = 2,0$; 3 — частоте $\Omega = 2,3$; 4 — частоте $\Omega_* = 2,34$; 5 — частоте $\Omega = 2,4$.

Анализ приведенных кривых позволяет сделать вывод о том, что коэффициент концентрации K принимает свое максимальное значение в рассмотренном диапазоне частот на частоте краевого резонанса Ω_* и достигает при $\xi = 0$ величины $K = 14,8$.

Аналогичные результаты получены для кусочно-однородного слоя, составленного из трех слоев, которые характеризуются следующими безразмерными параметрами: $\nu_1 = 0,42$; $\rho_1 = 1$; $\mu_1 = 0,209$; $\alpha_1 = 0,0033$; $\nu_2 = 0,08$; $\rho_2 = 0,095$; $\mu_2 = 1$; $\alpha_2 = 1,7471$; $\nu_3 = 0,35$; $\rho_3 = 0,4624$; $\mu_3 = 0,344$; $\alpha_3 = 0,2496$ ($\nu_1, \rho_1, \mu_1, \alpha_1$ — коэффициенты Пуассона, нормированные плотности, модули сдвига и толщины слоев; нумерация слоев снизу вверх). При этом $\Omega_* = 5,125$, а $K = 2,4$. Выполнение граничных условий на боковой поверхности отверстия удовлетворительно всюду, кроме малых окрестностей граничных точек стыка слоев.

Рассмотренная задача указывает на необходимость исследования при проведении прочностных расчетов на динамические воздействия упругих тел с полостями вопросов концентрации напряжений, связанных с резонансными явлениями, возникающими в окрестности отверстий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гетман И. П., Устинов Ю. А. О распространении волн в упругом продольно-неоднородном цилиндре // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 103.
2. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. К.: Наук. думка, 1981. 283 с.
3. Зильбергейт А. С., Нуллер Б. М. Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 2. С. 333–335.
4. Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мязенков В. П., Фролов А. И. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 375 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
11.VI.1990