МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1992

УДК 539.3

 С. В. КРЫСОВ

УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАНИЯ В ГРАНИЧНЫХ ТОЧКАХ ДИНАМИЧЕСКОГО КОНТАКТА ОДНОМЕРНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Динамическое взаимодействие твердых тел с упругими системами, по сравнению со статическим, несет в себе специфику формирования сложной, меняющейся со временем, пространственной структуры контактной области, обусловленной проявлением волновых свойств деформаций. Для исследования волновых процессов при контактных взаимодействиях необходимо знать условия для отыскания заранее неизвестных граничных точек контакта, которые математически должны быть сформулированы в виде условий согласования на подвижных границах в соответствующей начально-краевой задаче математической физики.

Вывод таких условий может быть проведен из вариационных принципов механики, поскольку они позволяют для заданного числа переменных задачи без привлечения феноменологических предположений получить ее внутренне непротиворечивую постановку. Ранее аналогичные условия из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского были получены в задаче согласованного взаимодействия одномерной упругой системы с материальной точкой или движущейся сосредоточенной нагрузкой [1, 2].

В настоящей статье также из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского найдены условия согласования в граничных точках взаимодействия одномерной упругой системы с абсолютно-твердым телом, выступающим для последней в роли идеальной геометрической связи на координаты ее перемещений. Приводятся примеры условий согласования для различных моделей струны и балки, взаимодействующих с твердым телом или материальной точкой.

1. Рассмотрим в плоском случае взаимодействие абсолютнотвердого тела, движение которого описывается вектор-функцией $\mathbf{y}(t)$ с координатами $y_i(t)$, $i=1, 2, 3$, с одномерной упругой системой (струна или стержень), описываемой вектор-функцией $\mathbf{u}(x, t)$ с компонентами $u_j(x, t)$, $j=1, 2, 3$. Предположим, что контактирование тела и упругой системы происходит по части лагранжевых координат x, для которых выполнена идеальная неудерживающая геометрическая связь:

$$\Phi(x, y_i(t), u_j(x, t)) \geqslant 0 \tag{1}$$

причем, область значений X ее действия как равенства, представляющая собой область контакта, считается заранее неизвестной и подлежит определению.

Учитывая, что при взаимодействии возможно формирование сложной структуры области X, содержащей как непрерывные участки, так и дискретные точки, введем функции $l_k(t)$, выделяющие те значения $x=l_k(t)$, которые выступают как предельные точки контактирования упругой системы с телом и свободные от взаимодействия с ним. Очевидно, что при подходе слева $x\to l_k(t)-0$ и справа $x\to l_k(t)+0$ к этим точкам связь (1) выступает либо в роли равенства, либо – строгого неравенства.

Структура области X в конкретной задаче может содержать множество точек $x=l_k(t)$. Однако, для определения вида условий отыскания неизвестных функций $l_k(t)$ достаточно ограничиться случаями существования какого-либо непрерывного участка $l_1(t)\leqslant x\leqslant l_2(t)$ и некоторой дискретной точки $x=l_3(t)$ поскольку все остальные случаи будут однотипными. Таким образом, $X=\{l_1(t)\leqslant x\leqslant l_2(t),\ x=l_3(t)\}$.

Введем условную область $D=\{a\leqslant x\leqslant b,\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$ определения функций $u_j(x,\ t)$, $y_i(t)$, $l_k(t)$, $(k=1,\ 2,\ 3)$, где $a<l_1(t)$, $b>l_3(t)$, и применим для определения вида условий их отыскания вариационный принцип Гамильтона — Остроградского, в соответствии с которым действительным движением системы в целом (тело+упругая система) является то, для которого

$$\delta S+\iint\limits_D \mathbf{f}\delta\mathbf{u}\,dx\,dt+\int\limits_\alpha^\beta \mathbf{Q}\delta\mathbf{y}\,dt=0 \tag{2}$$

при условии выполнения (1) как равенства в области контакта X.

$$S=\iint\limits_D \lambda\,dx\,dt+\int\limits_\alpha^\beta L\,dt;\qquad \lambda=\lambda(x,t,u_j(x,t),u_{j,x}(x,t),u_{j,t}(x,t))$$

Здесь D плотность функции Лагранжа упругой системы; $L=L(t,y_i,\dot y_i)$ — функция Лагранжа тела; $\mathbf{f}(x,\ t,\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}_t):\{f_i,\ i=1,\ 2,\ 3\}$ — вектор внешних сил, действующих на одномерную систему (включая диссипативные), $\mathbf{Q}(t,\ \mathbf{y},\ \mathbf{y}_i^{\boldsymbol\cdot}):\{Q_i,\ i=1,\ 2,\ 3\}$ — вектор внешних сил, приложенных к телу. При этом предлагается, что значения функций $y_i(t)$, $u_j(x,\ t)$, $l_k(t)$ фиксированы на границе области D, т. е. вариации $\delta u_j=0$, $\delta y_i=0$, $\delta l_k=0$ при $t=\alpha,\beta$; $x=a,b$. Относительно функций $y_i(t)$, $l_k(t)$, $L(t,\ y_i(t),\ y_i^{\boldsymbol\cdot}(t))$, $\lambda(x,\ t,\ u_j(x,\ t),\ u_{j,x}(x,\ t),\ u_{j,t}(x,\ t))$ будем предполагать их дважды непрерывную дифференцируемость, для функции $\Phi(x,\ y_i,\ u_j)$ — гладкость, а для $u_j(x,\ t)$ также дважды непрерывную дифференцируемость за исключением точек $x=l_k(t)$, где будем считать их непрерывными и равными $u_j^0(t)$:

$$u_j(x=l_k-0,\ t)=u_j(x=l_k+0,\ t)=u_j^0(t) \tag{3}$$

Для вычисления δS введем через параметр $0<\varepsilon<1$ функции сравнения

$$u_j^\vee(x,\ t,\ \varepsilon)=u_j(x,\ t)+\varepsilon\delta u_j(x,\ t)$$
$$l_k^\vee(t,\ \varepsilon)=l_k(t)+\varepsilon\delta l_k(t)$$
$$y_i^\vee(t,\ \varepsilon)=y_i(t)+\varepsilon\delta y_i(t),\ u_j^{0\vee}(t,\ \varepsilon)=u_j^0(t)+\varepsilon\delta u_j^0(t)$$

Тогда

$$\delta S=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}(S^\vee(\varepsilon)-S)$$

$$S^\vee(\varepsilon)=\int\limits_\alpha^\beta\left\{\int\limits_0^{l_1^\vee}\lambda(\varepsilon)\,dx+\int\limits_{l_1^\vee}^{l_2^\vee}\lambda(\varepsilon)\,dx+\int\limits_{l_2^\vee}^{l_3^\vee}\lambda(\varepsilon)\,dx+\int\limits_{l_3^\vee}^{b}\lambda(\varepsilon)\,dx+L(\varepsilon)\right\}dt$$

$$\lambda(\varepsilon)=\lambda(x,\ t,\ u_j^\vee(x,\ t,\ \varepsilon),\ u_{j,t}^\vee(x,\ t,\ \varepsilon),\ u_{j,x}^\vee(x,\ t,\ \varepsilon))$$
$$L(\varepsilon)=L(t,\ y_i(t,\ \varepsilon),\ y_i^{\boldsymbol\cdot}(t,\ \varepsilon)) \tag{4}$$

причем, вариации δu_j, δu_j^0, δy_i и δl_k в силу (1) в точках $x\in X$ и в силу (3) в точках $x=l_k(t)$ окажутся связанными:

$$(\delta u_j+u_{j,x}\delta l_k)\,|_{x=l_k-0}=(\delta u_j+u_{j,x}\delta l_k)\,|_{x=l_k+0}=\delta u_j^0(t)$$

$$\sum_{j=1}^3\Phi_{u_j}\delta u_j+\sum_{i=1}^3\Phi_{y_i}\delta y_i=0,\qquad l_1(t)<x<l_2(t) \tag{5}$$

$$\Phi_x \delta l_k + \sum_{j=1}^{3} \Phi_{u_j} \delta u_j^0 + \sum_{i=1}^{3} \Phi_{y_i} \delta y_i = 0, \qquad x = l_k(t)$$

Вычисляя $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1}(S^{\sim}(\varepsilon) - S)$, учитывая (4) и производя несложные, стандартные в вариационном исчислении [3] при решении задач с подвижными границами преобразования, с использованием формулы Грина и первого из условий (5) получим:

$$\delta S = \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{k=1}^{3} ([T - l_k^{\cdot} p] |_{x=l_k(t)} \delta l_k + \sum_{j=1}^{3} [q_j - l_k^{\cdot} p_j] |_{x=l_k(t)} \delta u_j^0 \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{3} L^0(y_i) \delta y_i) dt + \iint_D \sum_{j=1}^{3} L(u_j) \delta u_j \, dx \, dt \right\}$$

$$T = \lambda + \sum_{j=1}^{3} u_{j,x} q_j, \qquad p = -\sum_{j=1}^{3} u_{j,x} p_j, \qquad q_j = \frac{\partial \lambda}{\partial u_{j,x}}$$

$$p_j = \frac{\partial \lambda}{\partial u_{j,t}}, \qquad L^0(y_i) = \frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}, \qquad L(u_j) = \frac{\partial \lambda}{\partial u_j} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial u_{j,x}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \lambda}{\partial u_{j,t}}$$

а слагаемые, заключенные в квадратные скобки, необходимо понимать как разность выражений в них вычисляемых слева и справа от $x = l_k(t)$: $[\psi] |_{x=l_k(t)} = \psi |_{x=l_k-0} - \psi_{x=l_k+0}$. Применяя далее метод неопределенных множителей Лагранжа введением для последующих двух связей вариаций (5) множителей $R(x, t)$ и $R_k^0(t)$ соответственно и собирая слагаемые в (2) при вариациях $\delta u_j(x, t)$, $\delta u_j^0(t)$, δy_i и δl_k из основной леммы вариационного исчисления получим соотношения, определяющие совместно с (1) замкнутую систему уравнений, как необходимых условий выполнения (2), для определения неизвестных функций $u_j(x, t)$, $y_i(t)$, $u_j^0(t)$, $l_k(t)$, $R(x, t)$, и $R_k^0(t)$:

$$L(u_j) + f_j = 0, \quad a \leqslant x \leqslant l_1(t), \; l_2(t) \leqslant x \leqslant b \tag{6}$$

$$L(u_j) + f_j + R\Phi_{u_j} = 0, \qquad l_1(t) \leqslant x \leqslant l_2(t)$$

$$L^0(y_i) + Q_i + \int_{l_1}^{l_2} R\Phi_{y_i} dx + \sum_{k=1}^{3} R_k^0 \Phi_{y_i} |_{x=l_k(t)} = 0 \tag{7}$$

$$R_k^0 \Phi_{u_j} |_{x=l_k(t)} + [q_j - l_k^{\cdot} p_j] |_{x=l_k(t)} = 0 \tag{8}$$

$$R_k^0 \Phi_x |_{x=l_k(t)} + [T - l_k^{\cdot} p] |_{x=l_k(t)} = 0 \tag{9}$$

Уравнения (6) определяют через функции $u_j(x, t)$, связанные естественными условиями согласования (8) движения упругой системы вне и внутри области контакта соответственно. Уравнения (7) описывают движение твердого тела. Условия же (9) служат для отыскания законов движения граничных точек $x = l_k(t)$.

Условия согласования (8), исключив из (9) множитель $R_k^0(t)$, можно записать в виде

$$\frac{1}{\Phi_x}[T-l_k^{\cdot}p]\,|_{x=l_k(t)}=\frac{1}{\Phi_{u_j}}[q_j-l_k^{\cdot}p_j]\,|_{x=l_k(t)} \tag{10}$$

Разность $[T-l_k^{\cdot}p]\,|_{x=l_k(t)}$ представляет собой «скачок» силы волнового давления [2], вычисленного в точках $x=l_k(t)$ с поправкой на величину потока волнового импульса, учитывающей их подвижность. Разности же $[q_j-l_k^{\cdot}p_j]\,|_{x=l_k(t)}$ являются скачками упругих сил в проекции на направление обобщенных координат $u_j(x,\ t)$, вычисленных в точках $x=l_k(t)$ также с учетом поправки на поток импульса. Поэтому условия согласования (10) устанавливают равенство между собой этих скачков, отнесенных к соответствующему направляющему косинусу нормали к поверхности Φ. В случае равенства нулю какой-либо производной Φ_x или Φ_{u_j} соответствующая разность величин в квадратных скобках (10) становится нулевой.

Заметим, что функции $R(x,\ t)$ и $R_k^0(t)$ по смыслу определяют силы реакции на тело в области прилегания $l_1(t)<x<l_2(t)$ и точках $x=l_k(t)$ со стороны упругой системы. Поэтому их значения должны быть неотрицательными. Если же при рассмотрении конкретной задачи условия $R(x,\ t)\geqslant 0$ и $R_k^0(t)\geqslant 0$ окажутся невыполненными, то выбранная структура области контакта не реализуется.

2. Рассмотрим некоторые примеры вида условий согласования (10) и следствия из них для задач взаимодействия.

Взаимодействие твердого тела со струной. Выберем в качестве одномерной упругой системы струну, совершающую связанные продольно-поперечные колебания $u_1(x,\ t)$, $u_2(x,\ t)$. Пусть с ней находится во взаимодействии однородный жесткий диск радиуса r с координатами центра масс $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Тогда

$$\Phi=(y_2-u_2)^2+(x-u_1-y_1)^2-r^2 \tag{11}$$

$$\lambda={}^1/_2F\rho\,(u_{1,t}^2+u_{2,t}^2-c_p^2\Delta^2-2c_0\Delta)$$

где ρF — погонная плотность струны, $c_p=\sqrt{E/\rho}$, $c_0=\sqrt{N/\rho F}$ — скорости распространения продольных и поперечных волн, $\Delta=((1+u_{1,x})^2+u_{2,x}^2)^{1/2}-1$ — удельная деформация струны, E — модуль Юнга, N — натяжение струны, F — площадь ее поперечного сечения.

Тогда условия согласования (10) запишутся в виде:

$$\frac{1}{\Phi_{u_1}}\left[\left((c_p^2-l_k^{\cdot 2})+\frac{c_0^2-c_p^2}{1+\Delta}\right)(1+u_{1,x})\right]\Big|_{x=l_k(t)}=$$

$$=\frac{1}{\Phi_{u_2}}\left[\left((c_p^2-l_k^{\cdot 2})+\frac{c_0^2-c_p^2}{1+\Delta}\right)u_{2,x}\right]\Big|_{x=l_k(t)}=$$

$$=\frac{1}{\Phi_x}\left[-\frac{1}{2}(c_p^2-l_k^{\cdot 2})(u_{1,x}^2+u_{2,x}^2)+\left(\frac{c_0^2-c_p^2}{1+\Delta}\right)(1+u_{1,x})\right]\Big|_{x=l_k(t)}$$

Здесь использовано очевидное условие: $[u_{j,t}]=-l_k^{\cdot}[u_{j,x}]$ при $x=l_k(t)$. Поскольку в нашем примере $\Phi_{u_1}=\Phi_x$, то приравнивая первое и последнее выражения, получим:

$${}^1/_2(c_p^2-l_k^{\cdot 2})\,[(1+u_{1,x})^2+u_{2,x}^2]\,|_{x=l_k(t)}=0 \tag{12}$$

Из первого равенства

$$(c_p^2-l_k^{\cdot 2})\left(\frac{1}{\Phi_{u_1}}[u_{1,x}]-\frac{1}{\Phi_{u_2}}[u_{2,x}]\right)\Bigg|_{x=l_k(t)}=$$

$$=(c_0^2-c_p^2)\left(-\frac{1}{\Phi_{u_1}}\left[\frac{1+u_{1,x}}{1+\Delta}\right]+\frac{1}{\Phi_{u_2}}\left[\frac{u_{2,x}}{1+\Delta}\right]\right)\Bigg|_{x=l_k(t)} \qquad (13)$$

Условие (12) означает, что граничная точка движется либо в соответствии с непрерывностью квадрата длины элемента струны слева и справа от $x=l_k(t)$, либо со скоростью c_p. В первом случае возможно как плавное, при непрерывных $u_{j,x}$, облегание струной диска, так и контактирование при разрывных $u_{j,x}$, причем, величины скачков $[u_{1,x}]$ и $[u_{2,x}]$ связаны условием (13). Во втором же случае скачок производных обязан удовлетворить условию

$$\frac{1}{\Phi_{u_1}}\left[\frac{1+u_{1,x}}{1+\Delta}\right]=\frac{1}{\Phi_{u_2}}\left[\frac{u_{2,x}}{1+\Delta}\right]$$

Для случая малых поперечных колебаний струны $u_2(x,\ t)$ $(u_1(x,\ t)=0,\ u_{2,x}\ll 1)$, когда

$$\lambda={}^1/_2\rho F(u_{2,t}^2-c_0^2u_{2,x}^2) \qquad (14)$$

условие (10) определяется одним равенством, сводящимся к виду

$$(c_0^2-l_k^{\cdot 2})\left([u_{1,x}^2]+2\frac{\Phi_x}{\Phi_{u_2}}[u_{2,x}]\right)=0, \qquad x=l(t)$$

Для граничных точек облегания $x=l_1(t)$, $x=l_2(t)$, когда

$$\frac{\Phi_x}{\Phi_{u_2}}\Bigg|_{x=l_1(t)}=-u_{2,x}\big|_{x=l_1(t)+0}; \qquad \frac{\Phi_x}{\Phi_{u_2}}\Bigg|_{x=l_2(t)}=-u_{2,x}\big|_{x=l_2(t)-0}$$

оно преобразуется к условию

$$(c_0^2-l^{\cdot 2})\,[u_{2,x}]^2=0,\ x=l_{1,2}(t)$$

означающему либо плавное прилегание при непрерывных $u_{2,x}$, либо при разрывных значениях $u_{2,x}$, но движущихся со скоростью c_0. В точках же дискретного контактирования $x=l_3(t)$ разрыв производной возможен и при

$$\Phi_x/\Phi_{u_2}=-{}^1/_2(u_{2,x}|_{x=l_3(t)-0}+u_{2,x}|_{x=l_3(t)+0}) \qquad (15)$$

что геометрически соответствует закону нормального отражения. Вычисляя в последнем случае $R_3^0(t)=(c_0^2-l_3^{\cdot 2})\Phi_{u_2}^{-1}[u_x]|_{x=l_3(t)}$ и учитывая, что $\Phi_{u_2}=-(y_2-u_2)<0$, получаем, что для выполнения условия $R_3^0\geqslant 0$ необходимо, чтобы точка контакта двигалась со скоростью $|l_3^{\cdot}|\geqslant c_0$. Заметим, что условие (15) применительно к задачам ударного взаимодействия тела со струной соответствует решениям с отходом струны от тела внутри области контакта, как это имеет место, например, при ударе клина по струне [4]. Оно также может быть полезным в задачах динамики струны, взаимодействующей с ограничителями [5, 6].

При вырождении рассмотренной задачи на случай взаимодействия со струной материальной точки $l_k(t)=l(t)$ и уравнение связи (11) при $r=0$ разделяется на два:

$$\begin{aligned}\Phi_1&=l(t)-y_1+u_1(l(t),\ t)=0\\ \Phi_2&=y_2-u_2(l(t),\ t)=0\end{aligned} \qquad (16)$$

Следовательно, для получения уравнений движения из (2) методом неопределенных множителей Лагранжа необходимо введение двух функций $R^{0,1}(t)$ и $R^{0,2}(t)$, определяющих соответственно реакцию струны в точке контакта $x=l(t)$ в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Не останавливаясь подробно на выводе уравнений движения и условий согласования здесь, поскольку он аналогичен предыдущему, запишем результат:

$$[T-l^{\cdot}p]\,|_{x=l(t)}+R^{0,1}=0,\quad L^0(y_1)+Q_1-R^{0,1}=0$$
$$[q_1-l^{\cdot}p_1]\,|_{x=l(t)}+R^{0,1}=0,\quad L^0(y_2)+Q_2+R^{0,2}=0$$
$$[q_2-l^{\cdot}p_2]\,|_{x=l(t)}-R^{0,2}=0 \tag{17}$$

Исключая множители $R^{0,1}$ и $R^{0,2}$ и учитывая, что $L^0(y_1)=-my_1^{\cdot\cdot}$, $L^0(y_2)=-my_2^{\cdot\cdot}$, получим:

$$my_1^{\cdot\cdot}=Q_1+[q_1-l^{\cdot}p_1]\,|_{x=l(t)},\quad my_2^{\cdot\cdot}=Q_2+[q_2-l^{\cdot}p_2]\,|_{x=l(t)}$$
$$[T-l^{\cdot}p]\,|_{x=l(t)}=[q_1-l^{\cdot}p_1]\,|_{x=l(t)} \tag{18}$$

В системе (18) первые два уравнения определяют движение материальной точки в продольном и поперечном направлениях. Последнее же условие служит для определения неизвестной функции $l(t)$. Оно показывает также, что скачок сил волнового давления совпадает со скачком величины проекции упругих сил в струне на направление $u_1(x,t)$.

Вычисляя через вид (11) плотности функции Лагранжа величины T, p, p_1, p_2, q_1 и q_2, может записать

$$my_1^{\cdot\cdot}=\rho F(c_p^2-l^{\cdot 2})[u_{1,x}]\,|_{x=l(t)}+\rho F(c_0^2-c_p^2)\left[\frac{1+u_{1,x}}{1+\Delta}\right]\Bigg|_{x=l(t)}+Q_1$$

$$my_2^{\cdot\cdot}=\rho F(c_p^2-l^{\cdot 2})[u_{2,x}]\,|_{x=l(t)}+\rho F(c_0^2-c_p^2)\left[\frac{u_{2,x}}{1+\Delta}\right]\Bigg|_{x=l(t)}+Q_2$$

$$\frac{1}{2}(c_p^2-l^{\cdot 2})[(1+u_{1,x})^2+u_{2,x}^2]\,|_{x=l(t)}=0$$

В случаях малых поперечных колебаний струны, когда $u_1=0$, $u_{2,x}\ll 1$, $\Phi_1=l(t)-y_1$, $\Phi_2=y_2-u_2(l(t),t)$, уравнения движения материальной точки запишутся в виде:

$$my_1^{\cdot\cdot}=-\frac{1}{2}(c_0^2-y_1^{\cdot 2})[u_{2,x}^2]\,|_{x=l(t)}+Q_1$$

$$my_2^{\cdot\cdot}=-(c_0^2-y_1^{\cdot 2})[u_{2,x}]\,|_{x=l(t)}+Q_2 \tag{19}$$

из которого следует, что реакции $R^{0,1}(t)={}^1/_2(c_0^2-y_1^{\cdot 2})[u_x^2]\,|_{x=l(t)}$, $R^{0,2}=-(c_0^2-y_1^{\cdot 2})[u_{2,x}]\,|_{x=l(t)}$ восстанавливают направление по нормали полной реакции $R^0(t)$ в соответствии с законом нормального отражения, как и в случае тела (см. (15)):

$$R^{0,1}={}^1/_2R^{0,2}(u_x|_{x=l(t)-0}+u_x|_{x=l(t)+0})$$

Уравнения движения (19) были получены ранее [1, 2] при постановке задач динамики одномерных упругих систем с движущимися закреплениями и нагрузками.

Взаимодействие твердого тела с балкой. Рассмотрим вначале случай взаимодействия с балкой толщины $2h$ жесткого кругового диска радиуса r массы m. Если для балки принять модель Тимошенко, для которой

$$\lambda={}^1/_2(\rho Fu_t^2+\rho J\beta_t^2-EJ\beta_x^2-\varkappa GF(u_x-\beta)^2) \tag{20}$$

где $u(x,t)$ — функция поперечных отклонений срединной линии балки, $\beta(x,t)$ — угол поворота ее сечений, ρ — плотность, F, J — площадь и момент инерции поперечного сечения, E — модуль Юнга, G — модуль сдвига, $\varkappa$ — коэффициент Тимошенко, то условия ее согласованного взаимодействия с диском в предположении сосредоточенного контакта запишутся как:

$$my_1^{\cdot\cdot}=R^0\Phi_{y_1}+Q_1,\quad my_2^{\cdot\cdot}=R^0\Phi_{y_2}+Q_2 \qquad (21)$$

$$R^0(t)=-\frac{1}{\Phi_x}[T-l^{\cdot}p]\,|_{x=l(t)}=-\frac{1}{\Phi_\beta}[q_1-l^{\cdot}p_1]\,|_{x=l(t)}=-\frac{1}{\Phi_u}[q_2-l^{\cdot}p_2]\,|_{x=l(t)}$$

$$\Phi=(y_2-u(x,\ t)-h)^2-(x-y_1-h\beta(x,\ t))^2-r^2=0,\quad x=l(t) \qquad (22)$$

$$T=\lambda-u_xq_2-\beta_xq_1,\quad p=-u_xp_2-\beta_xp_1,\quad q_1=\lambda_{\beta_x},\quad q_2=\lambda_{u_x}$$

$$p_1=\lambda_{\beta_t},\qquad p_2=\lambda_{u_t}$$

Вычисляя последние величины с учетом (20) и соотношений $[u_t]_{x=l(t)}=-l^{\cdot}[u_x]\,|_{x=l(t)}$, $[\beta_t]\,|_{x=l(t)}=-l^{\cdot}[\beta_x]\,|_{x=l(t)}$, $c_s=\sqrt{\varkappa G/\rho}$, $c_p=\sqrt{E/\rho}$, получим что:

$$R^0(t)=-\frac{1}{\Phi_x}\left(\frac{1}{2}\rho F(c_s^2-l^{\cdot 2})[u_x^2]+\frac{1}{2}\rho J(c_p^2-l^{\cdot 2})[\beta_x^2]\right)=$$

$$=\frac{\rho F}{\Phi_u}(c_s^2-l^{\cdot 2})[u_x]=\frac{\rho J}{\Phi_\beta}(c_p^2-l^{\cdot 2})[\beta_x],\qquad x=l(t)$$

Последнее равенство определяет направление по нормали к поверхности диска реакции $R^0(t)$ связи (22), а предыдущее служит для отыскания неизвестной точки $x=l(t)$.

При вырождении задачи в случай взаимодействия с материальной точкой, когда $r=0$, связь (22), как и в предыдущем примере, разделяется на две

$$\Phi_1=l(t)-y_1-h\beta(l(t),\ t)=0,\quad \Phi_2=y_2-u(l(t),\ t)-h-0 \qquad (23)$$

Уравнения движения материальной точки в этом случае и условия согласования в общем виде запишутся аналогично (17) или (18). Вычисляя же производные, получим

$$my_1^{\cdot\cdot}={}^1/_2\rho F(c_s^2-l^{\cdot 2})[u_x^2]\,|_{x=l(t)}+{}^1/_2\rho J(c_p^2-l^{\cdot 2})[\beta_x^2]\,|_{x=l(t)}$$

$$my_2^{\cdot\cdot}=-\rho F(c_s^2-l^{\cdot 2})[u_x]\,|_{x=l(t)} \qquad (24)$$

$$h({}^1/_2\rho F(c_s^2-l^{\cdot 2})[u_x^2]\,|_{x=l(t)}+{}^1/_2\rho J(c_p^2-l^{\cdot 2})[\beta_x^2]\,|_{x=l(t)})=$$

$$=-\rho J(c_p^2-l^{\cdot 2})[\beta_x]\,|_{x=l(t)}$$

Если материальная точка находится на срединной линии балки, то $\Phi_1=l(t)-y_1(t)=0$, $\Phi_{1,\beta}=0$ и система (24) перепишутся в виде:

$$my_1^{\cdot\cdot}={}^1/_2\rho F(c_s^2-l^{\cdot 2})[u_x^2]\,|_{x=l(t)},\quad my_2^{\cdot\cdot}=-\rho F(c_s^2-l^{\cdot 2})[u_x]\,|_{x=l(t)}$$

$$\rho J(c_p^2-l^{\cdot 2})[\beta_x]\,|_{x=l(t)}=0 \qquad (25)$$

Уравнения (25) также записаны ранее в [1, 2] и соответствуют случаю контактирования точки с балкой по срединной линии. Если же точка находится на поверхности балки, то для описания ее движения должна быть принята система (24).

Для балки Релея или Бернулли — Эйлера рассмотренная постановка может быть распространена, если на перемещения $u(x,\ t)$ и угол поворота $\beta(x,\ t)$ наложена связь

$$u_x-\beta=0 \qquad (26)$$

При этом условия согласования и уравнения движения сохранятся в общем виде, если вместо плотности функции Лагранжа (20) взять ее модифицированный в соответствии с методом неопределенных множителей вид $\lambda^*=\lambda+\mu(x,\ t)(u_x-\beta)$, где $\mu(x,\ t)$ — множитель Лагранжа соответствующей реакции связи (26). Уравнения движения балки, свободной от взаимодействия, при этом запишутся как

$$\begin{cases} \rho F u_{tt} - \varkappa G u_{xx} - \mu_x + \varkappa G F \beta_x = 0 \\ \rho J \beta_{tt} - EJ\beta_{xx} + \mu = 0 \\ u_x - \beta = 0 \end{cases}$$

или, исключая β:

$$\rho F u_{tt} - \rho J u_{xxtt} + EJ u_{xxxx} = 0$$

$$\mu = -\rho J u_{xtt} + EJ u_{xxx} \tag{27}$$

При условии (26) уравнение связи (22) сводится к виду

$$\Phi = (y_2 - u)^2 + (x - y_1)^2 - (r + h)^2 = 0$$

не зависящему от β. Поэтому условия согласования (21) при взаимодействии балки с диском записываются как

$$R^0(t) = \frac{1}{\Phi_u}(\rho F(c_S^2 - l^{\cdot 2})[u_x]|_{x=l(t)} - [\mu]|_{x=l(t)}) =$$

$$-\frac{1}{\Phi_x}\left(\frac{1}{2}\rho F(c_S^2 - l^{\cdot 2})[u_x^2]|_{x=l(t)} + \frac{1}{2}\rho J(c_p^2 - l^{\cdot 2})[\beta_x^2]|_{x=l(t)} - [\mu\beta]|_{x=l(t)}\right)$$

$$\rho J(c_p^2 - l^{\cdot 2})[\beta_x] = 0$$

Используя далее связь (26) и исключая с помощью (27) множитель μ, видим, что

$$R^0(t) = -\frac{\rho J}{\Phi_u}(c_p^2 - l^{\cdot 2})[u_{xxx}]|_{x=l(t)} = \frac{\rho F}{\Phi_x}(c_p^2 - l^{\cdot 2})u_x[u_{xxx}]|_{x=l(t)}$$

и точке $x = l(t)$ соответствует очевидное условие $u_x|_{x=l(t)} = -\Phi_x/\Phi_u|_{x=l^{\cdot}(t)}$. Для модели балки Бернулли – Эйлера необходимо пренебречь инерцией вращения сечений балки и в выражении λ положить $\rho J = 0$.

Автор глубоко признателен В. Ф. Журавлеву за внимание к работе, а также В. А. Самсонову и И. Г. Горячевой за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Весницкий А. И., Крысов С. В., Уткин Г. А.* Постановка краевых задач динамики упругих систем исходя из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского. Горький: Горьк. ун-т, 1983. 65 с.
2. *Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Уткин Г. А.* Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками. ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 863–866.
3. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1963 г.
4. *Ленский Э. В.* Вынужденное движение поперечной волны в гибкой растяжимой нити // Инж. ж. МТТ. № 6. 1968. С. 128–131.
5. *Cabannes N.* Cordes Vibrantes avec Obstacles // Acustica. 1984. V. 55. P. 14–20.
6. *Крупенин В. Л.* Транформация форм колебаний струны, взаимодействующей с двумя протяженными преградами // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313. № 6. С. 1390–1394.

Н.-Новгород

Поступила в редакцию
11.04.1991