

УДК 539.4.01.

© 1992 г. А. К. СТАЛЬНОВ

**ПРИМЕНЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ
В СЛУЧАЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОВЕРХНОСТИ ДЕФЕКТА**

Рассматривается влияние неоднородности поверхности двумерного дефекта эллиптической формы на параметры его критического равновесного состояния. Показано, что в этом случае могут наблюдаться две особенности. Первая: вплоть до достижения определенной длины дефекта критического равновесного состояния не существует. Вторая: при действии однородных растягивающих напряжений, поперечном и продольном сдвигах состояние критического равновесия может быть устойчивым.

При использовании энергетического критерия Гриффитса поверхность дефекта рассматривается как однородная. Однако в реальных условиях это не всегда так. Например, краевая трещина не может быть полностью заполнена средой, окружающей образец, если размер молекул этой среды больше ширины трещины у ее вершины. Поэтому поверхность такой трещины будет энергетически неоднородной.

Нельзя исключать, что неоднородность трещины может влиять на параметры ее критического равновесного состояния. В данной статье принята попытка оценить это влияние.

Как и в [1], использован энергетический критерий Гриффитса применительно к двумерному дефекту эллиптической формы.

Зададим уравнение эллипса параметрически: $x = a \sin t$, $y = b \cos t$, причем будем считать, что при $|x| < x_0 = a \sin t_0$ ($0 < t_0 < \pi/2$) значение поверхностной энергии равно γ , а при $x_0 \leq |x| < a$ это значение равно γ_0 ($\gamma_0 > \gamma$).

Тогда, если принять размер дефекта в направлении оси z за единицу, общая энергия поверхности дефекта (T) будет равна (k — эксцентриситет эллипса):

$$T = 4\gamma a \int_0^{t_0} (1 - k^2 \sin^2 t)^{1/2} dt + 4\gamma_0 a \int_{t_0}^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 t)^{1/2} dt \quad (1)$$

Предположим, как это сделано в [1], что радиус кривизны эллипса в вершинах большой оси не зависит от величины a , т. е. $db/da = b/2a$. Это предположение перекликается с постулатом теории равновесных трещин о постоянстве формы нормального сечения поверхности трещины в концевой области [2]. В нашем случае принятое ограничение означает, что будут рассматриваться дефекты с «острыми» концами, радиус кривизны которых не превышает межъядерного расстояния материала образца. Производная энергии поверхности дефекта по длине a в этом случае становится равной

$$\frac{\partial T}{\partial a} = \frac{2\gamma_0}{k^2} \left[(1+k^2)E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k'^2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \right] - \frac{2\Delta\gamma}{k^2} \left[(1+k^2)E(k, t_0) - k'^2 F(k, t_0) + 2k^2 a (1 - k^2 \sin^2 t_0)^{1/2} \frac{dt_0}{da} \right] \quad (2)$$

где $E(k, \pi/2)$ и $E(k, t_0)$ — эллиптические интегралы второго рода, $F(k, \pi/2)$ и $F(k, t_0)$ — эллиптические интегралы первого рода, $k' = b/a$, $\Delta\gamma = \gamma_0 - \gamma$.

При эксцентриситете эллипса, близком к единице, уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial a} = 4\gamma_0 \left[1 - \frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \left(\sin t_0 + a \cos t_0 \frac{dt_0}{da} \right) \right] \quad (3)$$

В это уравнение входит производная dt_0/da , определяемая соотношением скорости изменения значения параметра t_0 , соответствующего границе неоднородности поверхности в дефекте, $dt_0/d\tau$ (τ — время) и скорости роста дефекта $da/d\tau$. Полагая, что эта производная неотрицательна, рассмотрим два предельных случая. В первом случае будем считать, что перемещение границы неоднородности поверхности при увеличении дефекта не происходит, т. е. $x_0 = \text{const}$. Тогда $dt_0/da = -a^{-1} \text{tg } t_0$. Во втором будем исходить из предположения, что при увеличении a перемещение молекул среды к вершине дефекта осуществляется мгновенно и вертикальное смещение его поверхности (b_0), соответствующее значению параметра t_0 , не зависит от длины дефекта. Тогда справедливо соотношение $b_0 = b \cos t_0$, из которого следует, что $dt_0/da = 1/2 a^{-1} \text{ctg } t_0$.

Таким образом уравнение (3) преобразуется в первом случае в уравнение

$$\partial T / \partial a = 4\gamma_0 \quad (4)$$

во втором — в следующее

$$\frac{\partial T}{\partial a} = 2\gamma_0 \left[2 - \frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \left(2 \sin t_0 + \frac{\cos^2 t_0}{\sin t_0} \right) \right] \quad (5)$$

В соответствии с энергетическим критерием Гриффитса параметры критического равновесного состояния определяются из соотношения $\partial T / \partial a = \partial W / \partial a$, где W — упругая энергия, связанная с существованием дефекта. Выражения для W применительно к двумерному дефекту эллиптической формы даны в [1]. Если эксцентриситет эллипса близок к единице, они имеют вид для одноосного растяжения, для поперечного сдвига и для продольного сдвига соответственно

$$W = 1/8 \pi \mu^{-1} (\kappa + 1) \sigma_y^2 a^2 \quad (6)$$

$$W = 1/8 \pi \mu^{-1} (\kappa + 1) \tau_{xy}^2 a^2 \quad (7)$$

$$W = 1/2 \pi \tau_{yz}^2 a^2 \mu^{-1} \quad (8)$$

Здесь μ — модуль сдвига, $\kappa = 3 - 4\nu$ — для плоской деформации и $3 - \nu / (1 - \nu)$ — для обобщенного плоского напряженного состояния, ν — коэффициент Пуассона.

Легко показать, что вследствие принятых ранее допущений $k' = \rho b_0^{-1} \cos t_0$ и $a = b_0^2 \rho^{-1} \cos^2 t_0$, где ρ — радиус кривизны эллипса в вершинах большой оси.

Тогда применение критерия Гриффитса приводит к следующим результатам. В случае, когда $x_0 = \text{const}$:

$$A \sigma^2 a = 1 \quad (9)$$

Во втором случае

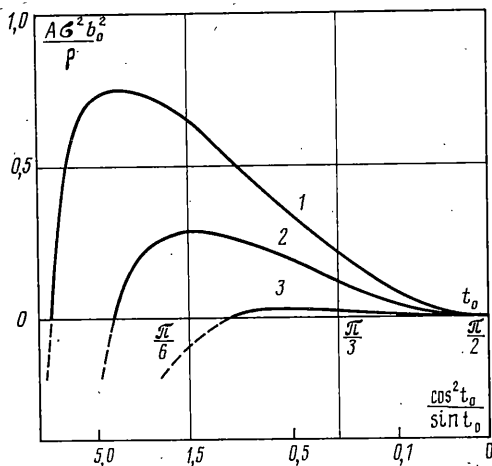
$$A \sigma^2 \frac{b_0^2}{\rho} = \cos^2 t_0 \left[1 - \frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \left(\sin t_0 + \frac{\cos^2 t_0}{2 \sin t_0} \right) \right] \quad (10)$$

В уравнениях (9) и (10) $A = \pi(\kappa + 1) / 16 \mu \gamma_0$ — при одноосном растяжении и поперечном сдвиге, $A = \pi / 4 \mu \gamma_0$ — при продольном сдвиге.

Уравнение (9) соответствует известному критерию разрушения для трещин. Графическое изображение зависимости, отвечающей уравнению

(10), дано на фигуре (кривая 1 — $\Delta\gamma/\gamma_0=0,1$; 2 — $\Delta\gamma/\gamma_0=0,5$; 3 — $\Delta\gamma/\gamma_0=0,9$).

Полученный результат зависит от величины $\Delta\gamma/\gamma_0=(\gamma_0-\gamma)/\gamma_0$ — относительного уменьшения поверхностной энергии материала образца под действием среды (γ_0 — поверхностная энергия на границе «материал — вакуум», γ — эта же величина на границе «материал — среда»). Кроме того, в уравнение (10) входит соотношение вертикального смещения поверхности дефекта на границе неоднородности к радиусу кривизны в вершине дефекта b_0/ρ .



В предлагаемой модели дефекта, заполняющая полость дефекта, рассматривается как двумерный континуум, протяженностью которого по оси Y можно практически пренебречь по сравнению с протяженностью по оси x . Это значит, что полученные выводы справедливы лишь для значений t_0 , удовлетворяющих неравенству $a \sin t_0 \gg b_0$, из которого следует, что $b_0/\rho \gg \cos^2 t_0/\sin t_0$. На нижней оси абсцисс фигуры даны значения величины $\cos^2 t_0/\sin t_0$.

Следует отметить две особенности полученного результата. Во-первых, для рассматриваемых дефектов вплоть до достижения ими определенной длины не существует состояния критического равновесия. Во-вторых, в некотором диапазоне значений a состояние критического равновесия может быть устойчивым. Очевидно, однако, что обе эти особенности будут реализованы, если наблюдаются два условия: $\Delta\gamma/\gamma_0$ близка к единице и $b_0/\rho \gg \cos^2 t_0/\sin t_0$. Первое из них означает, что среда должна обладать высокой поверхностной активностью по отношению к материалу образца, второе накладывает ограничение на размер молекул среды. В этом случае встает вопрос об оценке величины ρ .

Такую оценку можно провести, исходя из следующего. При действии однородных растягивающих напряжений связь между вертикальным смещением трещины и действующим напряжением определяется соотношением [3]:

$$u_y = 2E^{-1}(1-\nu^2)\sigma_y(a^2-x^2)^{1/2} \quad (11)$$

где E — модуль Юнга, следовательно:

$$b = 2E^{-1}(1-\nu^2)\sigma_y a \quad (12)$$

С другой стороны, при критическом равновесном состоянии связь между длиной трещины и напряжением определяется как

$$\sigma_y^2 a = 2\pi^{-1}(1-\nu^2)^{-1}\gamma_0 E \quad (13)$$

Из уравнений (12) и (13) следует, что

$$\rho = b^2/a = 8\pi^{-1}E^{-1}(1-\nu^2)\gamma_0 \quad (14)$$

Проведенные с помощью уравнения (14) расчеты применительно к некоторым хрупким материалам показывают, что величина ρ равна: для оксида алюминия — $5 \cdot 10^{-12}$ м, для оксида магния — $1,1 \cdot 10^{-11}$ м, для кремния — $1,5 \cdot 10^{-11}$ м, для хлорида натрия — $6 \cdot 10^{-12}$ м. (Необходимые для расчета данные взяты из [4].)

Расчетанные значения ρ более чем на порядок уступают по величине кинетическим радиусам молекул таких веществ, как азот, кислород, вода и так далее. Очевидно, что b_0 не может быть меньше этого радиуса.

Поэтому можно ожидать, что при заполнении полости дефекта даже веществами с относительно малыми молекулами возможно проявление отмеченных ранее особенностей зависимости критического напряжения от длины трещины. При переходе к веществам с большими размерами молекул (например, углеводородам) вероятность проявления этих эффектов должна возрасти.

Необходимым условием реализации этих особенностей является значительная скорость диффузии среды к вершине трещины, как это наблюдается, например, в системах «твердый металл — металлический расплав» [5].

Предложенная модель может быть применена при описании некоторых случаев эффекта Ребиндера, проявляющегося в облегчении деформации и разрушения твердого тела, вызванных его обратимым физико-химическим взаимодействием с окружающей средой [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Си Г., Либовец Г. Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 83–203.
2. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. Вып. 4. С. 3–56.
3. England A. H., Green A. E. Some two-dimensional punch and crack problems in classical elasticity // Proc. Cambridge. Philos. Soc. 1963. V. 59. No. 2. P. 489–500.
4. Стокс Р. Дж. Микроскопические аспекты разрушения керамики // Разрушение. М.: Мир, 1976. Т. 7. С. 129–220.
5. Перцов Н. В., Шукин Е. Д. Физико-химическое влияние среды на процессы деформации, разрушения и обработки твердых тел // Физика и химия обраб. материалов. 1970. № 2. С. 60–82.
6. Ребиндер П. А., Шукин Е. Д. Поверхностные явления в твердых телах в процессах их деформации и разрушения // УФН. 1972. Т. 108. № 1. С. 3–42.

Москва

Поступила в редакцию
23.X.1990