

УДК. 539.3

© 1992 г. А. Э. ПУРО

ОПТИЧЕСКАЯ ТОМОГРАФИЯ ВНУТРЕННИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Определение напряжений в прозрачном теле по результатам его сквозного просвечивания [1] рассматривается в предположении слабой оптической анизотропии [2, 3]. Боковая поверхность тела считается свободной от нагрузок. Просвечивание проводится в семействе параллельных плоскостей.

Ранее при такой постановке проблемы восстановление напряжений базировалось на измерении характеристических величин: характеристической разности фаз δ и параметра изоклины ψ [4]. При этом на основе экспериментальных данных и уравнений равновесия удается определить только компоненту тензора напряжений σ_{zz} , нормальную к плоскости просвечивания [5, 6]. Для нахождения остальных компонент привлекались уравнения совместности [5, 7].

Ниже вместо уравнений совместности предлагается использовать измерения абсолютной разности хода (абсолютной разности фаз неполяризованного света [8]), что в свою очередь позволяет реконструировать внутренние (остаточные) напряжения, которые не удовлетворяют уравнениям совместности. Обзор методов экспериментального определения абсолютной разности фаз в слабоанизотропной среде приведен в [8], возможность использования этого параметра для определения напряжений обсуждалась в [9]. Предлагаемый способ восстановления трехмерных внутренних напряжений ранее рассматривался только в приложении к круглому цилиндру в состоянии плоской деформации при осесимметричном распределении последних [10, 11]. Обобщение этого результата на цилиндрические образцы произвольного сечения с произвольным распределением напряжения вдоль сечения представляет самостоятельный интерес.

1. Цилиндрический образец с произвольным поперечным сечением находится в состоянии плоской деформации $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$. Просвечивание проводится в плоскости, нормальной к оси образца в направлении вектора l . Абсолютные разности хода δ_z , δ_m плоскополяризованных волн, направления поляризации которых совпадают соответственно с осью z и вектором m (фигура), определяются лучевыми интегралами

$$\delta_z = \int n_0 + C_1 \sigma_{zz} + C_2 (\sigma_{mm} + \sigma_{ll}) dl$$

$$\delta_m = \int n_0 + C_1 \sigma_{mm} + C_2 (\sigma_{zz} + \sigma_{ll}) dl$$

Здесь n_0 — показатель преломления не напряженного материала; C_1 , C_2 — фотоупругие постоянные.

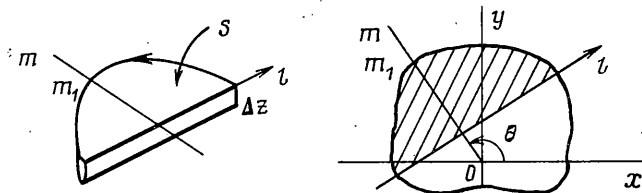
Относительная разность хода (характеристическая разность фаз) [4]:

$$\delta(m, \theta) = \delta_m - \delta_z = (C_1 - C_2) \int \sigma_{mm} - \sigma_{zz} dl = -C \int \sigma_{zz} dl \quad (1.1)$$

($C_1 - C_2 = C$) позволяет при помощи обратного преобразования Радона [12] определить распределение σ_{zz} . При преобразовании формулы (1.1) использовалось условие равновесия сил в направлении m [5, 7].

Определение остальных компонент тензора напряжений свяжем с определением полусуммы абсолютных разностей хода на луче (абсолютной разности фаз неполяризованного света [8]):

$$K(m, \theta) = 0,5(\sigma_z + \sigma_m) = \int n_0 + 0,5C(\sigma_{zz} + \sigma_{mm}) + C_2 \sigma dl$$



где $\sigma = \sigma_{zz} + \sigma_{ll} + \sigma_{mm}$ — первый инвариант тензора напряжений. С учетом условия равновесия в направлении m лучевой интеграл K упрощается

$$K(m, \theta) = \int n_0 + 0,5C\sigma_{zz} + C_2\sigma dl$$

Применение обратного преобразования Радона к линейной комбинации лучевых интегралов $K + 0,5\delta$ позволяет определить $\sigma_1 = \sigma + n_0/C_2$, т. е., первый инвариант с точностью до аддитивной постоянной.

Покажем, как по найденным σ_1, σ_{zz} можно определить остальные компоненты тензора напряжений.

Удовлетворим уравнениям равновесия введением функции Эйри F :

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \Delta_+ F - \frac{\partial^2}{\partial i \partial j} F \quad (i, j = x, y)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, Δ_+ — двумерный оператор Лапласа в плоскости x, y .

Выражая первый инвариант через так определенные напряжения, получаем разрешающее уравнение

$$\Delta_+ F = \sigma_1^\circ - \sigma_{zz}^\circ - n_0/C_2 = f(x, y) \quad (1.2)$$

Здесь индексом ноль $\sigma_1^\circ, \sigma_{zz}^\circ$ обозначены соответствующие экспериментально определяемые величины. На свободной боковой поверхности имеем два граничных условия: сама функция F и ее нормальная производная $\partial F/\partial n$ равны нулю [12].

Переопределенность краевой задачи относительно F можно использовать для исключения постоянной n_0/C_2 и для уменьшения погрешностей измерений. Этот факт в предшествующих работах [10, 11] при определении осесимметричного напряженного состояния остался незамеченным. Поэтому для определения постоянной n_0 в [10] предлагалось проводить добавочное просвечивание под наклонным углом к оси цилиндра, в [11] определение этой постоянной вообще не обсуждалось.

Введем в уравнение (1.2) регуляризирующую функцию χ . Докажем, что для разрешимости граничной задачи относительно F необходимо и достаточно, чтобы функция χ была равна гармонической части f . Для этого умножим обе части уравнения на произвольную дважды дифференцируемую функцию u и проинтегрируем выражение по площади сечения

$$\iint u \Delta_+ F ds = \iint u (f - \chi) ds \quad (1.3)$$

Преобразуем левую часть уравнения (1.3), используя формулу Грина

$$\iint (u \Delta_+ F - F \Delta_+ u) ds = \int \left(u \frac{\partial}{\partial n} F - F \frac{\partial}{\partial n} u \right) dl \quad (1.4)$$

Правая часть равенства (1.4) равна нулю, так как F и ее нормальная производная $\partial F/\partial n$ на границе равны нулю. Поэтому уравнение (1.3) приводится к виду

$$\iint F \Delta_+ u ds = \iint u (f - \chi) ds \quad (1.5)$$

Выбираем χ из условия того, что обе части уравнения (1.5) должны быть равны нулю, если u — гармоническая функция.

Таким образом, правая часть уравнения (1.2) должна быть ортогональна любой гармонической функции, т. е. функция χ должна быть равна гармонической части f .

Докажем, что вышеприведенное условие относительно χ является достаточным. Для этого подставим в (3.2.11) вместо u элементарное решение уравнения Лапласа u_1 :

$$u_1 = \frac{1}{4\pi} \ln [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]$$

Учитывая, что оператор Лапласа от u_1 равен дельта-функции Дирака, получаем

$$F(x_0, y_0) = \iint (f - \chi) u_1 dx dy$$

Из необходимых свойств χ следует, что u_1 определяется с точностью до аддитивной гармонической функции. В частности, для осесимметричного распределения f [10, 11] гармоническая часть ее равна постоянной — среднему значению f по сечению.

Так как гармоническая функция χ как частное содержит постоянную, то тем самым отпадает необходимость в точном определении n_0/C_2 . Регуляризирующий коэффициент λ , определяемый экспериментально, позволяет улучшить оценку значений $\sigma = \sigma^0 - \lambda\chi$, $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^0 + (1-\lambda)\chi$.

Очевидно, что предлагаемый алгоритм уменьшает неточности восстановления напряжений, обусловленные разностью показателей преломления иммерсионной жидкости и образца. Интересно отметить, что в [10] вместо иммерсионной жидкости использовался эталонный образец.

2. В случае произвольного трехмерного распределения напряжений (вращение квазиглавных направлений на луче) по измеренным характеристической разности фаз δ и параметру изоклины ψ можно определить два лучевых интеграла [2, 3]:

$$\delta \cos 2\psi = C \int \sigma_{mm} - \sigma_{zz} dl = CA(m, \theta)$$

$$\delta \sin 2\psi = 2C \int \sigma_{mz} dl = CH(m, \theta)$$

Из условия равновесия элемента S (фигура) в направлении m и z можно получить соотношения [6, 7]:

$$\int \sigma_{zz} dl = \frac{\partial}{\partial z} \int_m^{m_1} H(m, \theta, z) dm - A(m, \theta, z)$$

$$\int \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} dl = - \frac{\partial}{\partial m} H(m, \theta, z) + \sigma_{zz} \operatorname{ctg}(j) \frac{d\Gamma}{dm} \Big|_{l_0}^{l_1} \quad (2.1)$$

сводящие задачу нахождения σ_{zz} , $\partial\sigma_{zz}/\partial z$ к стандартной процедуре обращения преобразования Радона [13]. В выражении (2.1) m_1 — любая из двух крайних точек проекций контура сечения на ось m ; j — угол между осью z и n — нормалью к боковой поверхности; Γ — длина дуги на контуре, отсчитываемая от произвольной точки; значения $\sigma_{zz}(l_1)$, $\sigma_{zz}(l_0)$ на концах луча определяются из граничных условий с помощью касательного про-свечивания в этих точках при условии выпуклости контура.

Таким образом, проведя измерения в двух близко расположенных параллельных плоскостях и численно обращая интегралы (1.4), (2.1), можно определить σ , σ_{zz} , $\partial\sigma_{zz}/\partial z$.

Исследование возможностей определения остальных компонент тензора напряжений будем проводить на основе представления напряжений в виде суперпозиции решений первого и второго рода [14].

Выразив напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi - \frac{\partial}{\partial z} \tau - 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} N, & \sigma_{xy} &= -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Phi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) N \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi - \frac{\partial}{\partial z} \tau + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} N, & \sigma_{xz} &= \frac{\partial}{\partial x} \tau + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) N \\ \sigma_{yz} &= \frac{\partial}{\partial y} \tau - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) N, & \sigma_{zz} &= \Delta_+ L, \quad \tau = -\frac{\partial}{\partial z} L \end{aligned} \quad (2.2)$$

посредством симметричного тензора функций напряжений ψ [15] с компонентами $\psi_{xx} = \psi_{yy} = L$, $\psi_{zz} = \Phi$, $\psi_{xz} = \psi_{yz} = N$, $\psi_{xy} = 0$, удовлетворим уравнениям равновесия.

Решение первого рода определяется функциями L , Φ ; решение второго рода — функцией N . Для тел, удовлетворяющих закону Гука, уравнения совместности для этих функций разделяются на отдельное уравнение относительно N и уравнение, связывающее L и Φ [13]. Другой особенностью представления (2.2) является то, что σ_{zz} выражается только через L , а компоненты σ_{xz} , σ_{yz} выражаются в виде суммы потенциального (τ) и соленоидального (N) полей на плоскости. В качестве примера решения первого рода можно указать на осесимметричное напряженное состояние; примера решения второго рода — чистое кручение тел вращения.

Дальнейшее рассмотрение, как и в [7], ограничим случаем отсутствия нормального вращения ($N=0$). При этом получаем разрешающую систему относительно потенциалов Φ , τ :

$$\Delta_+ \tau = -\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}, \quad \Delta_+ \Phi = 2 \frac{\partial}{\partial z} \tau + \sigma_z \quad (2.3)$$

и три граничных условия на контуре

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \quad (i, j = x, y, z) \quad (2.4)$$

Краевая задача относительно потенциала Φ , τ снова переопределена, что позволяет, как и в случае плоской деформации, использовать эту переопределенность для исключения постоянной n_0 и улучшения оценки напряжений.

Проиллюстрируем вышесказанное на более простом случае — боковая поверхность тела ортогональна плоскости просвечивания ($n_z=0$). Граничные условия (2.4) относительно τ отделяются, на боковой поверхности $\partial\tau/\partial n=0$.

Таким образом, относительно τ и $\partial\tau/\partial z$ имеем корректно поставленную краевую задачу, что и позволяет определить их независимо от Φ .

Заметим, что Φ входит в выражения для напряжений (2.2) аналогично функции Эйри в случае плоского напряженного состояния, поэтому граничные условия для нее можно выразить посредством криволинейных интегралов по контуру границы [12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \Phi(x, y) &= \frac{dy}{dl} \int \frac{\partial}{\partial z} \tau dx' - \frac{dx}{dl} \int \frac{\partial}{\partial z} \tau dy' \\ \Phi(x, y) &= -0,5 \int \left(\frac{\partial}{\partial z} \tau \right) \frac{d}{dl} [(x-x')^2 + (y-y')^2] dl \end{aligned}$$

посредством найденной ранее величины $\partial\tau/\partial z$.

Дальнейшее решение задачи по сути дела совпадает с решением для случая плоского деформированного состояния.

Таким образом, показано, что в случае слабой оптической анизотропии при отсутствии нормального вращения ($N=0$) по измерениям в сечении тела указанных выше параметров удастся определить внутреннее напряжение в этом сечении.

Автор считает своей приятной обязанностью выразить благодарность Х. К. Абену за внимание к работе и К.—Ю. Э. Келл за предоставленную литературу по вопросу определения абсолютной разности фаз неполяризованного света.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aben H.* Tomographie optique des champs de contraintes // *Rev. Frac. Mec.* 1989. N. 1. P. 124–134.
2. *Leray J., Scheibling G.* Composition des birefringences; Cas de milieux de faible anisotropie optique // *J. Chim. Phys.* 1961. V. 58. N. 9. P. 797–802.
3. *Aben H. K., Josepson J. I., Kell K.-J., E.* The case of weak birefringence in integrated photoelasticity // *Optics and lasers in engineering.* 1989. V. 11. No. 3. P. 145–157.
4. *Абен Х. К.* Интегральная фотоупругость. Таллинн: Валгус, 1975. 218 с.
5. *Пуро А. Э.* Томография при слабой оптической анизотропии // Тез. докл. 4-го Всесоюз. симпоз. по вычислит. томографии. Ташкент, 1989. Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1989. Т. 1. С. 37.
6. *Шарафутдинов В. А.* О двух новых типах ядер свертки, возникающих в томографии фотоупругих сред // Там же. С. 50–51.
7. *Пуро А. Э.* Реконструктивная томография при слабой оптической анизотропии // Журнал прикладной механики и технической физики. 1991. № 2.
8. *Келл К.-Ю.* Абсолютные разности фаз в интегральной фотоупругости // Изв. АН Эстонии. Физика. Математика. 1989. Т. 38. Вып. 1. С. 44–49.
9. *Зимин В. Л., Шахурдин В. И.* Соотношения для теневых и интерференционных методов исследования напряженно деформированного состояния твердых тел // Прикл. механика. 1978. Т. 14. № 5. С. 25–29.
10. *Sáenz A. W.* Determination of residual stresses of quenching origin in solids and concentric hollow cylinders from interferometric observations // *J. Appl. Phys.* 1950. V. 21. N. 10. P. 962–965.
11. *Aben H. K.* Integrated photoelasticity of axisymmetric bodies // *Optical Eng.* 1982. V. 21. No. 4. P. 689–695.
12. *Новацкий В.* Теория упругости. Москва: Мир, 1975. 872 с.
13. *Lewitt R. M.* Reconstruction algorithms: Transform methods // *Proc. IEEE.* 1983. V. 71. N. 3. P. 390–408.
14. *Пуро А. Э.* Разделение уравнений теории упругости неоднородных тел // Изв. АН Эстонии. Физика. Математика. 1989. Т. 38. Вып. 4. С. 372–378.
15. *Крутков Ю. А.* Тензор функции напряжений и общие решения в статике теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. 199 с.

Таллинн

Поступила в редакцию
20.XII.1990