МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1992

УДК 539.3

© 1992 г. Ю. И. ВОЛОГЖАНИНОВ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ФОТОУПРУГОСТИ КОМПЛЕКСНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧЕТНЫХ БИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В методе фотоупругости непосредственно определяются величины касательных и разностей нормальных напряжений. Для разделения нормальных напряжений на основе этих данных используются уравнения равновесия и совместности деформаций, решение их методами разности касательных напряжений [1–4], разности нормальных напряжений [5], конечных [6, 7] и граничных [8, 9] элементов, приближенные методы [10–13].

Здесь рассмотрены новые возможности для разделения напряжений в симметричных по x и y задачах на основе комплексного представления четных бигармонических функций.

Показано [1], что четная по x и y бигармоническая функция определяется своими значениями на осях симметрии. Применительно к симметричным задачам фотоупругости это означает, что разность нормальных напряжений

$$U(x, y)=\sigma_x(x, y)-\sigma_y(x, y) \tag{1}$$

значения которой на осях симметрии равны

$$U(x, 0)=f_1(x), \quad U(0, y)=f_2(y) \tag{2}$$

определяется через эти значения следующим образом:

$$U(x, y)=\operatorname{Re}\{f_1(z)+f_2(iz)+\bar{z}z^{-1}[f_1(z)-f_2(iz)]\}/2 \tag{3}$$

Оказывается, в рассматриваемых задачах можно пойти дальше и по значениям разностей нормальных напряжений на осях симметрии (2) получить не только $U(x, y)$, но и раздельно все компоненты напряжений на осях и вне осей симметрии.

Воспользуемся комплексными представлениями Колосова – Мусхелишвили [14]:

$$\sigma=\sigma_x+\sigma_y=\sigma_r+\sigma_\theta=4\operatorname{Re}\Phi(z) \tag{4}$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[F(z)+\bar{z}\Phi'(z)] \tag{5}$$

$$\sigma_\theta-\sigma_r+2i\tau_{r\theta}=2[F(z)+\bar{z}\Phi'(z)]e^{2i\theta} \tag{6}$$

Из (5) следует, что

$$U(x, y)=-2\operatorname{Re}[F(z)+\bar{z}\Phi'(z)] \tag{7}$$

$$\tau_{xy}=\operatorname{Im}[F(z)+\bar{z}\Phi'(z)] \tag{8}$$

---

[1] *Вологжанинов Ю. И.* Комплексное представление четных бигармонических функций // Тез. докл. 2-й школы-семинара. Методы математического моделирования в научных исследованиях. Донецк: Ин-т прикл. математики и механики АН УССР. 1990. С. 22.

Сопоставляя два выражения для разности нормальных напряжений (3) и (7), приходим к равенству

$$F(z)+\bar{z}\Phi'(z)=i(a+bz\bar{z})-\{f_1(z)+f_2(iz)+\\ +\bar{z}z^{-1}[f_1(z)-f_2(iz)]\}/4 \tag{9}$$

где a и b — действительные постоянные. Отсюда следует, что

$$\Phi'(z)=ibz-[f_1(z)-f_2(iz)]/4z \tag{10}$$

$$\Phi(z)=ibz^2/2+\left\{A-\int z^{-1}[f_1(z)-f_2(iz)]\mathrm{d}z\right\}\Big/4 \tag{11}$$

Соотношения (4) и (11) определяют выражение для суммы нормальных напряжений

$$\sigma=-4bxy+\mathrm{Re}\left\{A-\int z^{-1}[f_1(z)-f_2(iz)]\mathrm{d}z\right\} \tag{12}$$

Из четности нормальных напряжений следует, что в данном случае

$$b=0 \tag{13}$$

Зная разность (3) и сумму нормальных напряжений (12), получаем формулы для отдельных компонент нормальных напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_x&=C+\mathrm{Re}\Big\{f_1(z)+f_2(iz)+\bar{z}z^{-1}[f_1(z)-f_2(iz)]-\\&\quad-2\int z^{-1}[f_1(z)-f_2(iz)]\mathrm{d}z\Big\}\Big/4\\ \sigma_y&=C-\mathrm{Re}\Big\{f_1(z)+f_2(iz)+\bar{z}z^{-1}[f_1(z)-f_2(iz)]+\\&\quad+2\int z^{-1}[f_1(z)-f_2(iz)]\mathrm{d}z\Big\}\Big/4,\qquad C=\mathrm{Re}\,A/2\end{aligned} \tag{14}$$

Формула для касательных напряжений следует из соотношений (8), (9) и (13) непосредственно

$$\tau_{xy}=a-\mathrm{Im}\{f_1(z)+f_2(iz)+\bar{z}z^{-1}[f_1(z)-f_2(iz)]\}/4 \tag{15}$$

Из нечетности касательных напряжений следует, что в данном случае

$$a=0 \tag{16}$$

Аналогично на основе соотношений (6), (9) и (12) с учетом (13) и (16) получаем формулы для напряжений в полярных координатах

$$\sigma_r=C+\mathrm{Re}\{f_1(z)+f_2(iz)+\bar{z}z^{-1}[f_1(z)-f_2(iz)]\}e^{2i\theta}/4-\\ -\mathrm{Re}\int z^{-1}[f_1(z)-f_2(iz)]\mathrm{d}z/2 \tag{17}$$

$$\sigma_\theta=C-\mathrm{Re}\{f_1(z)+f_2(iz)+\bar{z}z^{-1}[f_1(z)-f_2(iz)]\}e^{2i\theta}/4-\\ -\mathrm{Re}\int z^{-1}[f_1(z)-f_2(iz)]\mathrm{d}z/2 \tag{18}$$

$$\tau_{r\theta}=-\mathrm{Im}\{f_1(z)+f_2(iz)+\bar{z}z^{-1}[f_1(z)-f_2(iz)]\}e^{2i\theta}/4 \tag{19}$$

Для апробации полученных формул обратимся к известному решению задачи о напряженном состоянии одноосно растянутой плоскости с круговым отверстием [14]. Растягивающие напряжения интенсивности P направлены вдоль оси x. Радиус отверстия равен R. Значения разностей нормальных напряжений на осях симметрии равны

$$f_1(x)=P(1-3R^2/x^2+3R^4/x^4) \quad (20)$$

$$f_2(y)=P(1-R^2/y^2+3R^4/y^4) \quad (21)$$

Исходя из этой информации, получим выражения для всех компонент напряжений во всей плоскости.

Заменяя в (20) x на z, в (21) y на iz, получаем

$$f_1(z)=P(1-3R^2/z^2+3R^4/z^4) \quad (22)$$
$$f_2(iz)=P(1+R^2/z^2+3R^4/z^4)$$

Подстановка этих выражений в формулу (17) дает

$$\begin{aligned}\sigma_r&=C+P\,\mathrm{Re}\,[-2R^2/z^2+(1-R^2/z^2+3R^4/z^4-\\&\quad-2R^2\bar{z}/z^3)e^{2i\theta}]/2=\\&=C+P[-R^2/r^2+(1-4R^2/r^2+3R^4/r^4)\cos 2\theta]/2\end{aligned} \quad (23)$$

Условие на свободном контуре $\sigma_r(r=R)=0$ определяет значение постоянной

$$C=P/2 \quad (24)$$

и окончательное выражение для радиальных напряжений

$$\sigma_r=P[1-R^2/r^2+(1-4R^2/r^2+3R^4/r^4)\cos 2\theta]/2 \quad (25)$$

Подстановка выражений (22) и (24) в формулы (18) и (19) определяет вид окружных и касательных напряжений

$$\sigma_\theta=P[1+R^2/r^2-(1+3R^4/r^4)\cos 2\theta]/2 \quad (26)$$

$$\tau_{r\theta}=P(-1-2R^2/r^2+3R^4/r^4)\sin 2\theta/2 \quad (27)$$

которые, как и радиальные напряжения (25), совпадают с напряжениями, приведенными в [14, с. 194].

Полученные здесь формулы (14)–(19), представляющие все компоненты напряжений через значения разностей нормальных напряжений только на осях симметрии, могут использоваться в фотоупругости и других методах измерения разностей нормальных напряжений для разделения напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кокер Э., Файлон Л.* Оптический метод исследования напряжений. Л.; М.: ОНТИ, 1936. 634 с.
2. *Фрохт М.* Фотоупругость. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. Т. 1. 432 с.
3. *Александров А. Я., Ахметзянов М. Х.* Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. М.: Наука, 1973. 576 с.
4. *Вологжанинов Ю. И.* Оптимальный по объему вариант поляризационно-оптических измерений для разделения напряжений в плоскостях симметрии // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 189–191.
5. *Вологжанинов Ю. И., Демиденко С. Г., Чурпита А. В.* Метод разности нормальных напряжений в фотоупругости // Прикл. механика. 1982. Т. 18. № 8. С. 102–105.
6. *Seguchi Y., Tomita Y., Watanabe M.* Computer-aided fringepattern analyses. – A case of photoelastic fringe // Exp. Mech. 1979. V. 19, N 10. P. 362–370.
7. *Маркелов В. А.* Разделение напряжений в фотоупругости с помощью метода конечных элементов // Механика деформируемого тела и расчет транспортных сооружений. Новосибирск: НИИЖТ, 1982. С. 110–115.
8. *Верюжский Ю. В.* Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики. Киев: Вища шк., 1978. 183 с.
9. *Eiland R. J., Chambless D. A., Suhling J. C., Swinson W. F., Turner J. L.* Hybrid Stress Analysis Technique Combining the Boundary Element Method and Photoelastic Experimental Data // 6th Int. Congr. on Exp. Mech. Portland, Ore, 5–10 June, 1988. V. 2. L.; Bethel, 1988. P. 968–974.

10. *Вологжанинов Ю. И.* Приближенный метод разделения напряжений в фотоупругости // Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 8. С. 56–61.
11. *Вологжанинов Ю. И.* Приближенный метод разделения напряжений в пространственной фотоупругости // Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. № 10. С. 32–34.
12. *Гузь А. Н., Вологжанинов Ю. И.* Определение напряжений на основе ограниченного объема экспериментальных измерений // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 3. С. 563–565.
13. *Нетребко В. П., Вологжанинов Ю. И.* Приближенный метод разделения напряжений в фотоупругости ортотропных материалов // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 30–39.
14. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

Киев

Поступила в редакцию
24.XII.1990