МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1992

УДК 539.3

© 1992 г. В. И. ЛЕВИТАС

ЗАКОНЫ ТЕРМОДИНАМИКИ ДЛЯ КОНЕЧНОГО ОБЪЕМА МИКРОНЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Для конечного объема микронеоднородной среды введены понятия макроскопической температуры и теплового потока, позволяющие записать законы термодинамики в виде, аналогичном их локальной форме. Первое начало термодинамики, записанное с помощью макропараметров, полностью идентично его локальной форме. Второе начало отличается от локального закона тем, что при объемном источнике тепла появляется «объемная» температура, отличная от обычной. Рассмотрен случай конечных деформаций.

1. Проблеме введения макроскопических параметров для конечного объема микронеоднородной среды посвящено большое количество работ. Понятия макронапряжений и деформаций и выражения для их работы рассмотрены при малых деформациях в [1—3], получены формулы для эффективной пластической [3] и упругой [4] деформации. При конечных деформациях меры макронапряжений и деформаций, их скорости введены в [5, 6]. Выражения для их мощности, работы и скорости эффективной неупругой деформации получены в [6, 7], [8, 9] с использованием для каждой точки среды обоснованного в [10] корректного разложения градиента деформации на упругую и пластическую составляющие получено выражение скорости эффективной и пластической деформации, отличное от приведенного в [7]. Эти же вопросы при конечных деформациях и наличии фазовых переходов (поверхностей разрыва) рассмотрены в [9]. В то же время нам известна всего одна работа [11], посвященная определению понятий макроскопической температуры и теплового потока и формулировке макроскопических законов термодинамики для поликристаллической среды. Однако в [11] рассматривался не конечный, а бесконечно малый представительный объем, малые деформации и не учитывались объемные источники тепла. В данной работе для конечного объема среды при малых и больших деформациях вводятся понятия макроскопической температуры, ее градиента и теплового потока, с помощью которых законы термодинамики записаны в виде, аналогичном их локальной форме.

В работе используется безындексная форма оперирования тензорами: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}:\mathbf{B}$ означают свертку тензоров по одному и двум близлежащим друг к другу индексам, $\mathbf{I}$ — единичный тензор, $\mathbf{A}^T$ и $\mathbf{A}_s$ транспонированный и симметризованный тензор $\mathbf{A}$.

Рассмотрим конечный объем v микронеоднородной среды, ограниченной поверхностью s. В каждой точке среды справедливы первое и второе начала термодинамики в форме [12]:

$$\rho_* u_*^{\cdot} = \boldsymbol{\sigma}_* : \boldsymbol{\varepsilon}_*^{\cdot} + \operatorname{div} \mathbf{h}_* + \rho_* \Omega_* \quad (1.1)$$

$$\rho_* \eta_*^{\cdot} - (\operatorname{div} \theta_* \mathbf{h}_* + \rho_* \theta_* \Omega_*) \geqslant 0 \quad (1.2)$$

где ρ_* — плотность, $\boldsymbol{\sigma}_*$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_*$ — тензоры напряжения и деформации, u_*, η_* и Ω_* — удельные внутренняя энергия, энтропия и объемные источники тепла, $\theta_*=T_*^{-1}$, T_* — абсолютная температура, $\mathbf{h}_*$ — вектор потока тепла; $*$ означает локальное значение величины, точка над символом — производая по времени t.

Поставим вопрос: можно ли путем осреднения соотношений (1.1) и (1.2) по объему и определения соответствующих макроскопических параметров придать первому и второму началу термодинамики вид, аналогичный (1.1) и (1.2)?

Осредним соотношения (1.1) и (1.2) по объему

$$\langle\rho_* u_*^{\cdot}\rangle=\langle\boldsymbol{\sigma}_*:\boldsymbol{\varepsilon}_*^{\cdot}\rangle+\langle\operatorname{div}\mathbf{h}_*\rangle+\langle\rho_*\Omega_*\rangle \tag{1.3}$$

$$\langle\rho_*\eta_*^{\cdot}\rangle-\langle\operatorname{div}\theta_*\mathbf{h}_*\rangle-\langle\rho_*\theta_*\Omega_*\rangle\geqslant0,\qquad \langle\mathbf{A}_*\rangle=\frac{1}{v}\int\limits_v \mathbf{A}_*\,dv \tag{1.4}$$

Учитывая аддитивность ρ, u, η и Ω, макроскопические параметры обычно определяют обычным осреднением

$$\rho=\langle\rho_*\rangle;\quad \rho u=\langle\rho_* u_*\rangle;\quad \rho\eta=\langle\rho_*\eta_*\rangle;\quad \rho\Omega=\langle\rho_*\Omega_*\rangle \tag{1.5}$$

Так как (с учетом закона сохранения массы $m=\rho v$):

$$u^{\cdot}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\int\limits_v \rho_* u_*\,dv\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\int\limits_m u_*\,dm\right)=\frac{1}{m}\int\limits_m u_*^{\cdot}\,dm$$

то получится следующее уравнение

$$\rho u^{\cdot}=\langle\rho_* u_*^{\cdot}\rangle,\qquad \rho\eta^{\cdot}=\langle\rho_*\eta_*^{\cdot}\rangle \tag{1.6}$$

Для макроскопической мощности деформации справедливо тождество [7, 9, 13]:

$$\langle\boldsymbol{\sigma}_*:\boldsymbol{\varepsilon}_*^{\cdot}\rangle-\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot}=\frac{1}{v}\int\limits_s(\mathbf{u}_*-\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot}\cdot\mathbf{r}_*)\cdot(\boldsymbol{\sigma}_*-\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{n}\,ds \tag{1.7}$$

где макронапряжение $\boldsymbol{\sigma}$ и скорость деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot}$ вводятся формулами

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{v}\int\limits_s \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}_*\cdot\mathbf{n}\,ds=\langle\boldsymbol{\sigma}_*\rangle;\qquad \boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{v}\int\limits_s(\mathbf{u}_*\mathbf{n})_s\,ds=\langle\boldsymbol{\varepsilon}_*\rangle,\quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot}=\langle\boldsymbol{\varepsilon}_*^{\cdot}\rangle \tag{1.8}$$

Здесь u_* — вектор перемещений, $\mathbf{r}$ — радиус вектор точек среды, $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к s. При переходе от поверхностного интеграла к объемному используется непрерывность подынтегральных функций, теорема Остроградского — Гаусса, уравнения

$$\boldsymbol{\varepsilon}_*=(\nabla u_*)_s,\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_*=0 \tag{1.9}$$

Из формулы (1.7) следует, что для макрооднородного напряженного ($\sigma_*\cdot n=\sigma\cdot n$) или деформированного ($\mathbf{u}_*=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{r}$) состояний справедливо соотношение типа Манделя — Хилла

$$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot}=\langle\boldsymbol{\sigma}_*:\boldsymbol{\varepsilon}_*^{\cdot}\rangle \tag{1.10}$$

Таким образом, для перечисленных параметров удается перейти в соотношениях (1.3) и (1.4) к виду, аналогичному (1.1) и (1.2). Перейдем к определению θ, $\nabla\theta$, $\mathbf{h}$ и $\operatorname{div}\mathbf{h}$. Определим

$$\operatorname{div}\mathbf{h}=\langle\operatorname{div}\mathbf{h}_*\rangle=\frac{1}{v}\int\limits_s \mathbf{h}_*\cdot\mathbf{n}\,ds \tag{1.11}$$

Действительно, формула (1.11) при $v\to 0$ является математическим определением оператора div. Тогда уравнение (1.3) принимает вид

$$\rho u^{\cdot}=\sigma:\varepsilon^{\cdot}+\operatorname{div}\mathbf{h}+\rho\Omega \tag{1.12}$$

полностью аналогичный (1.1).

Для обоснования определения $\mathbf{h}$ и $\nabla\theta$ рассмотрим частный случай стационарной теплопроводности без источников, т. е. $\Omega_*=0$, $\operatorname{div}\mathbf{h}_*=0$. Так как $\operatorname{div}\theta_*\mathbf{h}_*=\theta_*\operatorname{div}\mathbf{h}_*+\nabla\theta_*\cdot\mathbf{h}_*$, то соотношения (1.1) и (1.2) принимают вид

$$\operatorname{div}\mathbf{h}_*=0,\quad \rho_*\eta_*^{\cdot}-\nabla\theta_*\cdot\mathbf{h}_*\geqslant 0 \tag{1.13}$$

Определим

$$\mathbf{h}=\frac{1}{v}\int_s \mathbf{r}\mathbf{h}_*\cdot\mathbf{n}\,ds,\qquad \nabla\theta=\frac{1}{v}\int_s \theta_*\mathbf{n}\,ds=\langle\nabla\theta_*\rangle \tag{1.14}$$

причем при $\operatorname{div}\mathbf{h}_*=0$ имеем $\mathbf{h}=\langle\mathbf{h}_*\rangle$, т. е. в данном случае макропараметры определяются обычным осреднением. Однако в качестве основного будем рассматривать их определение через поверхностные интегралы, т. е. чтобы можно было определить $\mathbf{h}$ и $\nabla\theta$ через замеры $\mathbf{h}_*$ и θ_* только на s. При $\operatorname{div}\mathbf{h}_*\neq 0$, $\mathbf{h}\neq\langle\mathbf{h}_*\rangle$, но именно определение (1.14) позволит получить соотношение (1.4), аналогичное (1.2). Заметим, что рассмотрение в качестве v куба со сторонами, параллельными осям координат, позволяет понять логичность определений (1.14).

Рассмотрим макрооднородные граничные условия для $\mathbf{h}_*$ и $\nabla\theta_*$: $\mathbf{h}_*=\mathbf{h}_0$ и $\theta_*=\theta_0+\nabla\theta_0\cdot\mathbf{r}$. Из определений (1.14) получим $\mathbf{h}=\mathbf{h}_0$ и $\nabla\theta=\nabla\theta_0$, т. е. макропараметры совпадают с постоянными значениями соответствующих микропараметров на s. Докажем энергетическое тождество

$$\langle\mathbf{h}_*\cdot\nabla\theta_*\rangle-\mathbf{h}\cdot\nabla\theta=\frac{1}{v}\int_s(\theta_*-\theta-\nabla\theta\cdot\mathbf{r})(\mathbf{h}_*-\mathbf{h})\cdot\mathbf{n}\,ds \tag{1.15}$$

Имеем

$$\frac{1}{v}\int_s(\theta_*-\theta-\nabla\theta\cdot\mathbf{r})(\mathbf{h}_*-\mathbf{h})\cdot\mathbf{n}\,ds=\frac{1}{v}\int_v[(\nabla\theta_*-\nabla\theta)\cdot(\mathbf{h}_*-\mathbf{h})+$$

$$+(\theta_*-\theta-\nabla\theta\cdot\mathbf{r})\operatorname{div}\mathbf{h}_*]\,dv=\langle(\nabla\theta_*-\nabla\theta)\cdot(\mathbf{h}_*-\mathbf{h})\rangle=\langle\nabla\theta_*\cdot\mathbf{h}_*\rangle-$$

$$-\langle\nabla\theta_*\rangle\cdot\mathbf{h}-\nabla\theta\cdot\langle\mathbf{h}_*\rangle+\nabla\theta\cdot\mathbf{h}=\langle\nabla\theta_*\cdot\mathbf{h}_*\rangle-\nabla\theta\cdot\mathbf{h},$$

где использованы соотношения $\operatorname{div}\mathbf{h}_*=0$, $\nabla\theta=\langle\nabla\theta_*\rangle$ и $\mathbf{h}=\langle\mathbf{h}_*\rangle$. Следовательно, при макрооднородных граничных условиях на s — $\theta_*=\theta+\nabla\theta\cdot\mathbf{r}$ или $\mathbf{h}_*=\mathbf{h}$ (или на части s_1 — $\theta_*=\theta+\nabla\theta\cdot\mathbf{r}$, а на остальной части $s-s_1$ — $\mathbf{h}_*=\mathbf{h}$) имеем

$$\langle\mathbf{h}_*\cdot\nabla\theta_*\rangle=\mathbf{h}\cdot\nabla\theta \tag{1.16}$$

и осредненные уравнения (1.13) имеют вид

$$\operatorname{div}\mathbf{h}=0,\quad \rho\eta^{\cdot}-\nabla\theta\cdot\mathbf{h}\geqslant 0 \tag{1.17}$$

аналогичный их локальной форме, т. е. в данном частном случае задача решена, причем понятие макротемпературы не вводилось, так как оно не входит в выражение (1.17).

Нетрудно заметить формальную аналогию соотношений (1.7)—(1.9) для механических и (1.14), (1.15) и $\operatorname{div}\mathbf{h}_*=0$ для тепловых параметров при соответствии u_*—θ_*, ε_*—$\nabla\theta_*$, σ_*—$\mathbf{h}_*$.

2. Перейдем к общему случаю неравенства (1.4) и рассмотрим член $\langle \operatorname{div} \theta_* \mathbf{h}_* \rangle$. При $\theta_* = \theta + \nabla\theta \cdot \mathbf{r}$ на s имеем

$$\langle \operatorname{div} \theta_* \mathbf{h}_* \rangle = \frac{1}{v} \int_s \theta_* \mathbf{h}_* \cdot \mathbf{n}\, ds = \frac{1}{v} \int_s (\theta + \nabla\theta \cdot \mathbf{r}) \mathbf{h}_* \cdot \mathbf{n}\, ds =$$

$$= \theta \frac{1}{v} \int_s \mathbf{h}_* \cdot \mathbf{n}\, ds + \nabla\theta \cdot \int_s \mathbf{r}\mathbf{h}_* \cdot \mathbf{n}\, ds = \theta \operatorname{div} \mathbf{h} + \nabla\theta \cdot \mathbf{h} = \operatorname{div} \theta\mathbf{h} \tag{2.1}$$

т. е. этот член сохраняет свой вид и в макропеременных. Заметим, что в формуле (2.1) учтено, что

$$\mathbf{h} = \frac{1}{v} \int_s \mathbf{r} h_* \cdot \mathbf{n}\, ds = \langle \mathbf{h}_* \rangle + \langle \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{h}_* \rangle \tag{2.2}$$

т. е. $\mathbf{h} \neq \langle \mathbf{h}_* \rangle$ и только при таком определении справедливо соотношение (2.1). Принять однородные условия для h_* на s нельзя, так как в этом случае $\operatorname{div} \mathbf{h}_* = 0$. Поэтому примем $\mathbf{h}_* = \mathbf{h} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ при этом $\operatorname{div} \mathbf{h}_* = \operatorname{div} \mathbf{h} = A : \mathbf{I}$ и определим

$$\langle \operatorname{div} \theta_* \mathbf{h}_* \rangle = \frac{1}{v} \int_s \theta_* \mathbf{h}_* \cdot \mathbf{n}\, ds = \frac{1}{v} \int_s \theta_* (\mathbf{h} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}\, ds =$$

$$= \mathbf{h} \cdot \frac{1}{v} \int_s \theta_* \mathbf{n}\, ds + \frac{1}{v} \mathbf{A} : \int_s \theta_* \mathbf{r}\mathbf{n}\, ds = \mathbf{h} \cdot \nabla\theta + \frac{1}{v} \mathbf{A} : \int_s \theta_* \mathbf{r}\mathbf{n}\, ds \tag{2.3}$$

Видно, что необходимо получить равенство $\frac{1}{v} \mathbf{A} : \int_s \tilde{\theta} \mathbf{r}\mathbf{n}\, ds = \theta \operatorname{div} \mathbf{h}$.

Для этого положим $\mathbf{A} = a\mathbf{I}$, тогда $\operatorname{div} \mathbf{h} = 3a$ и $1/v\, \mathbf{A} : \int \theta_* \mathbf{r}\mathbf{n}\, ds = \operatorname{div} \mathbf{h}\, {}^1/_3 v^{-1} \times$ $\times \int \theta_* \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, ds$.

Если определить

$$\theta = {}^1/_3 v^{-1} \int_s \theta_* \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, ds = \langle \theta_* \rangle + \frac{1}{3} \langle \nabla\theta_* \cdot \mathbf{r} \rangle \tag{2.4}$$

то получим $\langle \operatorname{div} \theta_* \mathbf{h}_* \rangle = \operatorname{div} \theta\mathbf{h}$. Таким образом, однозначно получено определение понятия макроскопической температуры (обратной температуры). Покажем, что оно не противоречит здравому смыслу. Если на s $\theta_* = \theta_0$, то

$$\theta_* = \theta_0 \frac{1}{3v} \int_v \mathbf{I} : \mathbf{I}\, dv = \theta_0,$$

т. е. θ совпадает с постоянным значением θ_* на s. Аналогично при $\theta_* = \theta_0 + \nabla\theta \cdot \mathbf{r}$ имеем $\theta = \theta_0$, так как

$$\int_s \mathbf{r}\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, ds = 4 \int_v \mathbf{r}\, dv = 0$$

(принимаем по определению, т. е. точка $\mathbf{r} = 0$ является геометрическим центром объема v).

Далее рассмотрим куб с ребром c. При интегрировании по парам противоположных граней имеем $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=c$, учитывая, что таких пар три, имеем

$$\theta=\frac{1}{s}\int_s \theta_* \, ds$$

обычное осреднение по поверхности. При $\nabla\theta_*=\mathrm{const}\,\theta=\langle\theta_*\rangle$, в противном случае $\theta\neq\langle\theta_*\rangle$. Поясним, почему формулу $\langle\operatorname{div}\theta_*\mathbf{h}_*\rangle=\operatorname{div}\theta\mathbf{h}$ удалось получить лишь при $\mathbf{A}=a\mathbf{I}$. Постоянному $\nabla\theta$ соответствует $\mathbf{h}_*=\mathbf{h}$, а не $\mathbf{h}_*=\mathbf{h}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}$, но при этом $\operatorname{div}\mathbf{h}_*=0$. Если при $\mathbf{h}_*=\mathbf{h}+a\mathbf{r}$ рассмотреть в качестве v куб, то величина $\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}$ постоянна вдоль каждой грани, а значения на противоположных гранях отличаются на ac, что и позволяет получить $\operatorname{div}\mathbf{h}_*=3a$.

Докажем тождество

$$\langle\operatorname{div}\theta_*\mathbf{h}_*\rangle-\operatorname{div}\theta\mathbf{h}=\frac{1}{v}\int_s(\theta_*-\theta-\nabla\theta\cdot\mathbf{r})(\mathbf{h}-\mathbf{h}_*-{}^1/_3\mathbf{r}\operatorname{div}\mathbf{h})\cdot\mathbf{n}\,ds \quad (2.5)$$

Действительно

$$\frac{1}{v}\int_s(\theta_*-\theta-\nabla\theta\cdot\mathbf{r})(\mathbf{h}-\mathbf{h}_*-{}^1/_3\mathbf{r}\operatorname{div}\mathbf{h})\cdot\mathbf{n}\,ds=$$

$$=\frac{1}{v}\Big[-\int_s\theta_*(\mathbf{h}+{}^1/_3\mathbf{r}\operatorname{div}\mathbf{h})\cdot\mathbf{n}\,ds-\int_s(\theta+\nabla\theta\cdot\mathbf{r})\mathbf{h}_*\cdot\mathbf{n}\,ds+$$

$$+\int_s\theta_*\mathbf{h}_*\cdot\mathbf{n}\,ds+\theta\int_s(\mathbf{h}+{}^1/_3\mathbf{r}\operatorname{div}\mathbf{h})\cdot\mathbf{n}\,ds+\nabla\theta\cdot\int_s\mathbf{r}(\mathbf{h}+{}^1/_3\mathbf{r}\operatorname{div}\mathbf{h})\cdot\mathbf{n}\,ds\Big]=$$

$$=-\operatorname{div}\theta\mathbf{h}-\operatorname{div}\theta\mathbf{h}+\langle\operatorname{div}\theta_*\mathbf{h}_*\rangle+\theta\operatorname{div}\mathbf{h}+\nabla\theta\cdot\mathbf{h}=\langle\operatorname{div}\theta_*\mathbf{h}_*\rangle-\operatorname{div}\theta\mathbf{h}$$

Преимущество использования тождества (2.5) по сравнению с рассмотренными выше случаями заключается в том, что соотношение

$$\langle\operatorname{div}\theta_*\mathbf{h}_*\rangle=\operatorname{div}\theta\mathbf{h} \quad (2.6)$$

вытекает из него и тогда, когда на части поверхности s задано $\theta_*=\theta+\nabla\theta\cdot\mathbf{r}$, а на остальной части — $\mathbf{h}_*=\mathbf{h}+{}^1/_3\mathbf{r}\operatorname{div}\mathbf{h}$.

Очевидно, что слагаемое $\langle\Theta_*\Omega_*\rangle\neq\Theta\Omega$ даже при $\Omega=\mathrm{const}$; если при этом еще и $\langle\mathbf{r}\nabla\Theta_*\rangle=0$, то $\langle\Theta_*\Omega_*\rangle=\Theta\Omega$. В общем случае введем новую «объемную» обратную температуру Θ соотношением $\Theta^0=\Omega^{-1}\langle\Theta_*\Omega_*\rangle$. Тогда второе начало термодинамики для конечного объема примет вид

$$\rho\eta^{\cdot}-(\operatorname{div}\Theta\mathbf{h}+\rho\Theta^0\Omega)\geqslant0. \quad (2.7)$$

Объединяя (1.2) и (2.4), получим приведенное диссипативное неравенство

$$\frac{\rho}{\theta}\eta^{\cdot}-\rho u^{\cdot}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot}+\Omega\left(1-\frac{\theta^0}{\theta}\right)-\frac{\nabla\theta}{\theta}\cdot\mathbf{h}\geqslant0 \quad (2.8)$$

или переходя к температуре $T=\Theta^{-1}$, $T^0=(\Theta^0)^{-1}$ имеем

$$\rho T\eta^{\cdot}-\rho u^{\cdot}+\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot}-\Omega\left(1-\frac{T}{T^0}\right)+\frac{\nabla T}{T}\cdot\mathbf{h}\geqslant0 \quad (2.9)$$

Таким образом, с помощью принятых определений макропараметров удалось записать законы термодинамики для конечного объема в виде, аналогичном для точки сплошной среды, но с введением объемной обратной температуры Θ^0 при Ω.

Член $\Omega(1-T/T^0)$ не раскладывается на произведение силы на скорость (также как и производная Фреше от u для сред с памятью) и не является знакоопределенным.

Если учесть, что в рациональной термодинамике [14] для точки сплошной среды также вводились две температуры в таком же виде, как и в формуле (2.7), то получим полную аналогичность.

Очевидно, что если обозначить правые части неравенства, (1.2) и (2.8) домноженные на Θ_* и Θ соответственно через $\rho_1 D_*$ и ρD, где D_* и D — локальная и макроскопическая мощность диссипации

$$\rho\Theta D = \langle \rho\Theta_* D_* \rangle \tag{2.10}$$

но $\rho D \neq \langle \rho \bar{D}_* \rangle$. Если ввести удельную локальную и макроскопическую свободную энергию — $\psi_* = u_* - T_* \eta_*$ и $\psi = u - T\eta$, то $\psi \neq \langle \psi_* \rangle$, но из $\rho\eta = \langle \rho_* \eta_* \rangle$ следует $\rho\psi = \langle \rho_* (\psi_* - u_*) \Theta_* \rangle + \rho\Theta u$.

Сопоставим полученные результаты с результатами работы [11]. В ней рассматривается бесконечно малый, а не конечный макрообъем, принято, что $\Omega_* = 0$ и получено $\mathbf{h} = \langle \mathbf{h}_* \rangle$ и $\Theta = \langle \Theta_* \rangle$, (выражение для $\nabla\Theta_*$ не вводится). Видно, что рассмотрение конечного объема требует задания макрооднородных граничных условий, вносит коррективы в определения $\mathbf{h}$ и Θ, а учет $\Omega_* \neq 0$ приводит к введению «объемной» обратной температуры $\Theta^0 \neq \Theta$.

3. Рассмотрим конечные деформации. Особенность заключается в том, что все соотношения могут быть записаны как в произвольной отсчетной конфигурации V_τ, в качестве которой примем положение объема в момент τ, так и в актуальной V $(\tau = t)$. Величины и операторы в конфигурации V_τ будем снабжать индексом τ, в V — оставлять без индекса. В отсчетной и актуальной конфигурациях [12, 10]:

$$\rho_{\tau*} u_*^{\cdot} = \mathbf{P}_{\tau*} : \mathbf{F}_{\tau*}^{\cdot T} + \operatorname{div}^\tau \mathbf{h}_{\tau*} + \rho_{\tau*}\Omega_*; \quad \rho_{\tau*}\eta_*^{\cdot} - (\operatorname{div}^\tau(\Theta_* \mathbf{h}_{\tau*}) + \\ + \rho_{\tau*}\Theta_*\Omega_*) \geqslant 0 \tag{3.1}$$

$$\rho u_*^{\cdot} = \mathbf{T}_* : \mathbf{d}_* + \operatorname{div} \mathbf{h}_* + \rho_*\Omega_*; \quad \rho_*\eta_*^{\cdot} - (\operatorname{div} \Theta_* \mathbf{h}_* + \rho_*\Theta_*\Omega_*) \geqslant 0 \tag{3.2}$$

где $\mathbf{F}_{\tau*}$ — градиент деформации, $\mathbf{P}_{\tau*}$ и $\mathbf{T}_*$ — тензоры напряжений Пиолы — Кирхгоффа и Коши, $\mathbf{d}_*$ — деформация скорости. Из соотношений (3.1) и (3.2), в частности, следует

$$\frac{1}{\rho_{\tau*}} \operatorname{div}^\tau \mathbf{h}_{\tau*} = \frac{1}{\rho_*} \operatorname{div} \mathbf{h}_*; \qquad \frac{1}{\rho_{\tau*}} \operatorname{div}^\tau \theta \mathbf{h}_{\tau*} = \frac{1}{\rho_*} \operatorname{div} \theta_* \mathbf{h}_* \tag{3.3}$$

При макрооднородных граничных условиях $\langle \mathbf{P}_{\tau*} : \mathbf{F}_{\tau*}^{\cdot T} \rangle_\tau = \mathbf{P}_\tau : \mathbf{F}_\tau^{\cdot T}$, $\langle \mathbf{T}_* : d_* \rangle = \mathbf{T} : d$ [6, 7, 9], где

$$\langle \mathbf{A}_* \rangle_\tau = \frac{1}{v_\tau} \int_{v_\tau} \mathbf{A}_* \, dv_\tau \tag{3.4}$$

т. е. переход к макропеременным сохраняет вид этих слагаемых. Все приведенные в предыдущих пунктах соотношения можно рассматривать, как записанные в конфигурации V, поэтому они остаются в силе (с заменой $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot}$ на $\mathbf{T} : \mathbf{d}$).

Рассмотрим вопрос о возможности получить аналогичные соотношения в V_τ. Введем

$$\mathbf{h}_\tau = \frac{1}{v_\tau} \int_{s_\tau} \mathbf{r}_\tau \mathbf{h}_{\tau*} \cdot \mathbf{n}_\tau \, ds_\tau = \langle \mathbf{h}_{\tau*} \rangle_\tau + \langle \mathbf{r}_\tau \operatorname{div}^\tau \mathbf{h}_{\tau*} \rangle \tag{3.5}$$

$$\nabla^\tau(\theta) = \frac{1}{v_\tau} \int_{s_\tau} \theta_* \mathbf{n}_\tau \, ds_\tau = \langle \nabla^\tau \theta_* \rangle \tag{3.6}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{h}_\tau=\langle\operatorname{div}\mathbf{h}_{\tau*}\rangle_\tau=\frac{1}{v_\tau}\int\limits_{s_\tau}\mathbf{h}_{\tau*}\cdot\mathbf{n}_\tau\,ds_\tau \tag{3.7}$$

а определение (2.4) для Θ оставим без изменения (наши попытки ввести непротиворечиво $\Theta_\tau\neq 0$ остались без результата). Напомним соотношения для локальных величин [12]:

$$\mathbf{h}_*=\frac{\rho_*}{\rho_{\tau*}}\mathbf{F}_{\tau*}\cdot\mathbf{h}_{\tau*},\qquad \nabla\theta_*=\nabla^\tau(\theta_*)\cdot\mathbf{F}_{\tau*}^{-1};\qquad \mathbf{n}\,ds=\frac{\rho_{\tau*}}{\rho_*}\mathbf{F}_{\tau*}^{-1T}\cdot\mathbf{n}_\tau\,ds_\tau$$

$$\mathbf{h}_*\cdot\mathbf{n}ds=\mathbf{h}_{\tau*}\cdot\mathbf{n}_\tau ds_\tau \tag{3.8}$$

Определим связь между макропеременными в V_τ и V. Имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{h}=\frac{1}{v}\int\limits_{s}\operatorname{div}\mathbf{h}_*\,dv=\frac{\rho}{\rho_\tau v_\tau}\int\operatorname{div}\mathbf{h}_{\tau*}\,dv_\tau=\frac{\rho}{\rho_\tau}\operatorname{div}\mathbf{h}_\tau \tag{3.9}$$

При задании на s_τ макрооднородных граничных условий в перемещениях $\mathbf{r}=\mathbf{F}_\tau\cdot\mathbf{r}_\tau$ получаем

$$\mathbf{h}=\frac{\rho}{\rho_\tau v_\tau}\mathbf{F}_\tau\cdot\int\mathbf{r}_\tau\mathbf{h}_{\tau*}\cdot\mathbf{n}_\tau\,ds_\tau=\frac{\rho}{\rho_\tau}\mathbf{F}_\tau\cdot\mathbf{h}, \tag{3.10}$$

т. е. такую же связь как и для локальных величин. Связь между $\nabla\Theta$ и $\nabla^\tau\Theta$ установить не удается, так как на s $\mathbf{F}_{\tau*}\neq\mathbf{F}_\tau$. При

$$\mathbf{h}_{\tau*}=\mathbf{h}_\tau+\mathbf{r}_\tau\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{h}_\tau\qquad\text{на}\qquad s_\tau$$

$$\mathbf{h}=\frac{\rho}{\rho_\tau v_\tau}\int\limits_{s_\tau}\mathbf{r}\mathbf{n}_\tau\,ds_\tau\cdot\mathbf{h}_\tau+\frac{\rho}{3\rho_\tau v_\tau}\operatorname{div}^\tau\mathbf{h}_\tau\int\limits_{s_\tau}\mathbf{r}\mathbf{r}_\tau\cdot\mathbf{n}_\tau\,ds_\tau=$$

$$=\frac{\rho}{\rho_\tau}\mathbf{F}_\tau\cdot\mathbf{h}_\tau+\frac{\rho}{3\rho_\tau}\operatorname{div}\mathbf{h}_\tau\langle\mathbf{F}_*\cdot\mathbf{r}_\tau+3\mathbf{r}\rangle_\tau \tag{3.11}$$

т. е. соотношение (3.10) выполняется только при $\operatorname{div}^\tau\mathbf{h}_{\tau*}=0$. Остановимся на этом случае. Также как и в формуле (1.15) доказывается тождество:

$$\langle\mathbf{h}_{\tau*}\cdot\nabla^\tau\theta_*\rangle_\tau-\mathbf{h}_\tau\cdot\nabla^\tau\theta=\frac{1}{v_\tau}\int\limits_{s_\tau}(\theta_*-\theta-\nabla^\tau\theta\cdot\mathbf{r}_\tau)(\mathbf{h}_\tau-\mathbf{h}_{\tau*})\cdot\mathbf{n}_\tau\,ds_\tau, \tag{3.12}$$

откуда при равенстве нулю правой части имеем

$$\mathbf{h}_\tau\cdot\nabla^\tau(\Theta)=\langle\mathbf{h}_{\tau*}\cdot\nabla^\tau\Theta_*\rangle_\tau \tag{3.13}$$

$$\rho_\tau\eta^\cdot-\nabla^\tau\Theta\cdot\mathbf{h}_\tau\geqslant 0\ \text{при}\ \Theta_*=\Theta+\nabla^\tau(\Theta)\cdot\mathbf{r}_\tau\ \text{или}\ \mathbf{h}_{\tau*}\cdot\mathbf{n}_\tau=\mathbf{h}_\tau\cdot\mathbf{n}\ \text{на}\ s \tag{3.14}$$

Заметим, что из сопоставления неравенств (3.13) и (1.17) нельзя сделать вывод, что

$$\frac{1}{\rho_\tau}\nabla^\tau\theta\cdot\mathbf{h}_\tau=\frac{1}{\rho}\nabla\theta\cdot\mathbf{h}\quad\left(\text{хотя}\ \nabla^\tau\theta\cdot\mathbf{h}_\tau=\langle\nabla^\tau\theta_*\cdot\mathbf{h}_{\tau*}\rangle_\tau=\frac{\rho_\tau}{\rho}\langle\nabla^\tau\theta_*\cdot\mathbf{h}\rangle\right)$$

так как соотношения (3.13) и (3.14) справедливы при $(\Theta_*-\Theta-\nabla^\tau\Theta\cdot\mathbf{r}_\tau)\cdot(\mathbf{h}_{\tau*}-\mathbf{h}_\tau)\cdot\mathbf{n}_\tau=0$ на s_τ, а (1.16) и (1.17) — при $(\Theta_*-\Theta-\nabla\Theta\cdot\mathbf{r})(\mathbf{h}_*-\mathbf{h})\cdot\mathbf{n}=0$ на s, а эти граничные условия неэквивалентны.

Если ввести $\mathbf{G}_\tau=\nabla\Theta\cdot\mathbf{F}_\tau$, то $\rho_\tau^{-1}\mathbf{G}_\tau\cdot\mathbf{h}_\tau=\rho_\tau^{-1}\nabla\Theta\cdot\mathbf{h}$ и из неравенства (1.17) следует

$$\rho_\tau\eta^\cdot-\mathbf{G}_\tau\cdot\mathbf{h}_\tau\geqslant 0\ \text{при}\ \Theta=\Theta+\nabla\Theta\cdot\mathbf{r}\ \text{или}\ \mathbf{h}_*\cdot\mathbf{n}=\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}\ \text{на}\ s \tag{3.15}$$

Рассмотрим случай $\operatorname{div} h_\tau \neq 0$. Также, как и в формуле (1.18) получим

$$\langle \operatorname{div}^\tau (\Theta \mathbf{h}_\tau) \rangle_\tau = \operatorname{div}^\tau (\Theta \mathbf{h}_\tau) \text{ при } \Theta_* = \Theta + \nabla^\tau (\Theta) \cdot \mathbf{r} \text{ на } s_\tau \tag{3.16}$$

и, следовательно

$$\rho_\tau u^{\cdot} = \mathbf{P}_\tau : \mathbf{F}_\tau^{T \cdot} + \operatorname{div}^\tau \mathbf{h}_\tau + \rho_\tau \Omega \tag{3.17}$$

$$\rho_\tau \eta^{\cdot} - (\operatorname{div}^\tau (\Theta \mathbf{h}_\tau) - \rho_\tau \Theta^0 \Omega) \geqslant 0 \tag{3.18}$$

где $\rho_\tau \Omega = \langle \rho_{\tau *} \Omega_* \rangle_\tau$, $\rho_\tau \Theta^0 \Omega = \langle \rho_\tau \Theta_* \Omega_* \rangle_\tau$. Если же на s_τ задано $\mathbf{h}_{\tau *} = \mathbf{h}_\tau + 1/3 \mathbf{r}_\tau \operatorname{div}^\tau \mathbf{h}_\tau$, то вместо условия (2.3) получим

$$\langle \operatorname{div}^\tau (\theta \mathbf{h}_\tau) \rangle_\tau = \frac{1}{v_\tau} \int_s \theta_* \mathbf{h}_{\tau *} \cdot \mathbf{n}_\tau \, ds_\tau = \mathbf{h}_\tau \cdot \nabla^\tau (\theta) + \frac{1}{3 v_\tau} \operatorname{div}^\tau \mathbf{h}_\tau \int_s \theta_* \mathbf{r}_\tau \cdot \mathbf{n}_\tau \, ds_\tau$$

а так как

$$\theta \neq \frac{1}{3 v_\tau} \int_{s_\tau} \theta_* \mathbf{r}_\tau \cdot \mathbf{n}_\tau \, ds_\tau$$

то $\langle \operatorname{div}^\tau (\Theta_* \mathbf{h}_{\tau *}) \rangle_\tau \neq \operatorname{div}^\tau (\Theta \mathbf{h}_\tau)$. В тоже время, согласно равенству (3.3):

$$\langle \operatorname{div}^\tau (\theta_* \mathbf{h}_{\tau *}) \rangle_\tau = \frac{\rho_\tau}{\rho} \operatorname{div} \theta \mathbf{h}_\tau \qquad \text{при } \mathbf{h}_* = \mathbf{h} + {}^1/_3 \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{h} \text{ на } s.$$

Определим граничные условия на s_τ, при которых $\langle \operatorname{div}^\tau (\Theta_* \mathbf{h}_{\tau *}) \rangle_\tau = \operatorname{div}^\tau (\Theta \mathbf{h}_\tau)$. Пусть на $s_\tau \mathbf{h}_{\tau *} = \mathbf{h}_\tau + {}^1/_3 \rho \rho_\tau^{-1} \operatorname{div} \mathbf{h}_{\tau} (\mathbf{r}_\tau)$. Тогда

$$\langle \operatorname{div}^\tau (\theta_* \mathbf{h}_{\tau *}) \rangle_\tau = \frac{1}{v_\tau} \int_s \theta_* \mathbf{h}_{\tau *} \cdot \mathbf{n}_\tau \, ds_\tau = \mathbf{h}_\tau \cdot \nabla^\tau \theta + \frac{\rho}{3 \rho_\tau v_\tau} \operatorname{div}^\tau \mathbf{h}_\tau \int_s \theta_* \mathbf{f}_* (\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_\tau \, ds_\tau$$

Если $\mathbf{f}_* (\mathbf{r}_\tau) \cdot \mathbf{n}_\tau ds_\tau = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} ds$, т. е. $\mathbf{f}(\mathbf{r}_\tau) \rho_{\tau *} \rho_*^{-1} \mathbf{r}_\tau \cdot \mathbf{F}_\tau^T \cdot \mathbf{F}_{\tau *}^{-1T}$ и $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{F}_\tau^{-1} \cdot \mathbf{r}$ на s_τ, то $\langle \operatorname{div}^\tau (\Theta_* \mathbf{h}_{\tau *}) \rangle_\tau = \operatorname{div}^\tau (\Theta \mathbf{h}_\tau)$ при $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{F}_\tau^{-1} \cdot r$ и

$$\mathbf{h}_{\tau *} = \mathbf{h}_\tau + \frac{\rho}{3 \rho_\tau} \frac{\rho_{\tau *}}{\rho_*} \mathbf{F}_\tau \cdot \mathbf{F}_\tau^T \cdot \mathbf{F}_{\tau *}^{-1T} \operatorname{div}^\tau \mathbf{h}_\tau$$

на s_τ. В этом случае из неравенства (3.1) следует неравенство (3.18).

Таким образом, если запись законов термодинамики для конечного объема в актуальной конфигурации такая же как и при малых деформациях, то в отсчетной конфигурации она такая же при линейных граничных условиях для Θ_* или довольно искусственных граничных условиях для h_τ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hill R.* Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles // J. Mech. Phys. Solids. 1963. V. 11. N 5. P. 357–372.
2. *Hill R.* The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. N 2. P. 79–95.
3. *Mandel J.* Contribution theorique a l''etude l''ecrouissage et des Lois de l''ecoulement plastique // Proc. 11-th Intern. Congr. Appl. Mech. Berlin, 1964. Berlin: Springer-Verlag, 1966. P. 502–509.
4. *Bui H. D.* Evjlution de la frontiere du domaine elastique des metaux avec l''ecrouissage plastique et comportement elasto-plastique d''un agregat de cristaux cubiques // Mem, artill, frans. 1970. V. 1. P. 141–165.
5. *Rice J. R.* Inelastic constitutive relations for solids: An internal-variable theory and its application to metal plasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1971. V. 19. N 6. P. 433–455.
6. *Hill R.* On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain // Proc. R. Soc., London. Ser. A. 1972. A326. N 1565. P. 131–147.
7. *Hill R.* On macroscopic effects of heterogeneity in elasto-plastic media at finite strain // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1984. V. 95. N 3. P. 481–494.

8. *Левитас В. И.* Структура определяющих соотношений для упругопластических композитов при конечных деформациях // Докл. АН УССР. Сер. А. 1989. N 3. С. 43–47.
9. *Левитас В. И.* Термомеханика фазовых переходов и неупругое деформирование микронеоднородных материалов. // Киев: Наук. думка, 1991.
10. *Левитас В. И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987. 231 с.
11. *Halphen B.* Sur la thermodynamique du polycristal metallique // Sci et techn l'armement. 1979. V. 53. N 4. P. 667–678.
12. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
13. *Nemat-Nasser S.* Overall stresses and strains in solids with microstructure // Modelling small deformations of polycrystals/Eds. J. Gittus, J. Zarka. Elsevier: Appl. Sci Publ. P. 41–64.
14. *Gurtin M. E., Williams W.* An axiomatic foundation for continuum thermodynamics // Arch. Rat. Mech. Anal. 1967. V. 26. N 2. P. 83–117.

Киев

Поступила в редакцию
24.12.90 г.