МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1992

УДК 539.3

 Э. И. ГРИГОЛЮК, В. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ,
Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

О ПРИМЕНЕНИИ ОБЩЕЙ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ К НЕКОТОРЫМ ОПТИМИЗАЦИОННЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Приводятся постановки некоторых оптимизационных задач теории упругости, имеющих приложения, например, в геомеханике. Указаны способы сведения данных задач к общим проблемам моментов [1] в пространстве $C(U)$ непрерывных функций на множестве $U\subset R$. С использованием аппроксимации нестандартных моментных функций многочленами общие проблемы моментов приводятся к классической степенной проблеме моментов или l – проблеме моментов [2, 3]. Это позволяет указать apriori структуру оптимального управления. Рассмотрены примеры теоретического и вычислительного характера.

1. Постановки задач. В качестве объекта исследования возьмем упругую полуплоскость $y\geqslant 0$, ослабленную концентраторами напряжений (трещины, отверстия, включения). На границе полуплоскости выделим множества U и V, на которых действуют нормальные $P(x)$ и касательные $Q(x)$ нагрузки соответственно. Эти нагрузки назовем управляющими. Под объектами управления будем понимать некоторые функционалы, ответственные за напряженное состояние и прочность тела. Это может быть концентрация напряжения на отверстиях, коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах дефектов, напряженное состояние в некоторых характерных точках или линиях, моменты напряжений различного характера и т. п.

В зависимости от характера оптимизационной задачи управление (P, Q) должно выбираться из некоторого функционального класса.

Приведем постановки оптимизационных задач для полуплоскости с концентраторами. Предварительно заметим, что проблема моментов в произвольном банаховом пространстве B [1] формулируется как задача отыскания линейного непрерывного функционала $\Phi\in B^*$: такого, что

$$\Phi(\varphi_k)=c_k \quad (k=\overline{1, n}), \quad \|\Phi\|_{B^*}\to\min \tag{1.1}$$

где $\varphi_k\in B$, постоянные c_k $(k=\overline{1, n})$ заданы. Известно, что эта задача всегда разрешима (теорема Хана – Банаха [1]) для конечного n, однако конструктивное построение экстремального функционала в общем случае неизвестно. Если требуется неотрицательность функционала (т. е. функционал принимает неотрицательные значения на пересечении некоторого конуса в B и линейной оболочки элементов φ_k), то приходим к классической проблеме моментов [2]. В этом случае, очевидно, существование функционала Φ: $\Phi(\varphi_k)=c_k$ $(k=\overline{1, n})$ гарантировать нельзя и требуется для конкретного пространства B и конкретного набора элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ находить критерий разрешимости. Иногда нужные утверждения следуют из общих теорем о разрешимости (М. Рисс и др. [2, 3]), но обычно они составляют самостоятельный раздел теории. Задачу (1.1) называют l-проблемой моментов, а задачу поиска неотрицательного функционала Φ — классической проблемой моментов.

Более сложный вариант проблемы моментов заключается в замене точных равенств (1.1) следующим условием: если C — некоторый n-мерный параллелепипед, то требуется, чтобы $\{\Phi(\varphi_k)\}_{k=1}^{n}\in C$. В частности, $|\Phi(\varphi_k)-c_k|\leqslant\varepsilon_k$ $(k=\overline{1,n})$.

Положим $B=C(U)$ — пространство непрерывных функций, заданных на компакте $U\subset\mathbb{R}$. Теорема Рисса [1] дает общий вид линейного непрерывного функционала Φ на $C(U)$:

$$\Phi(\varphi)=\int\limits_U\varphi(x)d\sigma(x),\qquad \|\Phi\|_{C^*}=\operatorname*{var}_{x\in U}\sigma(x)$$

а для положительного функционала (конус состоит из всех неотрицательных на U функций) добавляется требование $\sigma(x)$ — неубывающая на U функция. При этом, ввиду конечности числа моментных функций $(n<+\infty)$ оптимальными являются функции скачков, иначе говоря (в смысле обобщенных функций):

$$\sigma'(x)=\sum_{j=1}^{m}\rho_j\delta(x-x_j)\qquad(m<+\infty,\ x_j\in U)$$

В классической проблеме моментов добавляется условие $\rho_j>0$ и можно дополнительно требовать от решения (естественно, в случае разрешимости проблемы моментов) минимальности полной вариации $\Sigma\rho_j$, имеющей ясный физический смысл.

Поставим задачу о сосредоточенном граничном управлении, когда $P(x)=\sigma'(x)$ $(x\in U)$, $Q(x)=\tau'(x)$ $(x\in V)$. В форме проблем моментов задача 1 (классическая проблема моментов) формулируется следующим образом

$$\int\limits_U\varphi_k(x)\,d\sigma(x)+\int\limits_V\psi_k(x)\,d\tau(x)=c_k\qquad(k=\overline{1,n})$$

$$d\sigma(x)\geqslant0,\quad d\tau(x)\geqslant0,\quad \operatorname{var}\sigma(x)+\operatorname{var}\tau(x)\to\min$$

Задача 1, по существу, заключается в поиске сосредоточенных граничных усилий одного типа $(\rho_j>0)$, приводящих к заданному напряженному состоянию в контролируемых регионах. Задача 2 (l — проблема моментов) формируется так

$$d\sigma(x)\gtreqless0,\quad d\tau(x)\gtreqless0,\quad \operatorname{var}\sigma(x)+\operatorname{var}\tau(x)\to\min$$

В дальнейшем положим $d\tau(x)\equiv0$. Действительно, нетрудно показать, что общая задача $(d\sigma(x)\not\equiv0,\ d\tau(x)\not\equiv0)$ эквивалентна проблеме моментов на множестве $U\cup V$ относительно моментных функций f_k: $f_k(x):=\varphi_k(x)$ $(x\in U-V)$, $f_k(x):=\varphi_k(x)+\psi_k(x)$ $(x\in U\cap V)$, $f_k(x):=\psi_k(x)$ $(x\in V-U)$. Кроме того, в случае разрешимости этой новой проблемы моментов появляется свобода выбора функций $\sigma(x)$, $\tau(x)$ на множестве $U\cap V$ с фиксированной суммой $\sigma(x)+\tau(x)$.

2. Аппроксимационный подход. Для указанного выше класса задач механики моментные функции $\varphi_k(x)$ являются линейными комбинациями некоторых стандартных решений интегральных уравнений соответствующих краевых задач [4] и могут быть найдены численно на системе точек U' из U. Чтобы не потерять аналитический подход к задачам управления, можно аппроксимировать моментные функции $\varphi_k(x)$ на U' тем или иным способом, например, обыкновенными многочленами. Пусть степень аппроксимирующего функцию $\varphi_k(x)$ многочлена $R_k(x)$ обозначена через n_k. Наилучшим с точки зрения минимизации абсолютной погрешности аппроксимации являются многочлены, наименее уклоняющиеся от $\varphi_k(x)$ в чебышевской метрике, т. е. в пространстве $C(U')$ [5]. Положим, далее

$$s_\nu = \int\limits_U x^\nu \, d\sigma(x) \tag{2.1}$$

Здесь ν-й степенной момент распределения $\sigma(x)$. Соотношения

$$\int\limits_U \varphi_k(x)\, d\sigma(x) = c_k \qquad (k=\overline{1, n})$$

принимают вид линейных связей для степенных моментов

$$\sum_{\nu=0}^{n_k} a_{\nu k} s_\nu = c_k \qquad (k=\overline{1, n}) \tag{2.2}$$

Таким образом, при пренебрежении погрешностью аппроксимации исходная задача эквивалентна следующей: найти условия на числа c_k, при выполнении которых существует неубывающая функция ограниченной вариации $\sigma(x)$ (функция распределения нагрузки на границе полуплоскости) с моментами s_ν, удовлетворяющими системе уравнений (2.2). Если искать аппроксимирующие многочлены $R_k(x)$ так, чтобы $\max\{n_k\}$ совпадал с числом уравнений в (2.2), то из (2.2) однозначно опредляются степенные моменты s_ν и задача приводится к определению необходимых и достаточных условий разрешимости классической степенной проблемы моментов [2, 3] на множестве U. Дальнейшие исследования существенно зависят от вида множества U, на котором задана $\sigma(x)$. Если $U=(-\infty, \infty)$, то [2, 3] необходимым и достаточным условием существования меры $\sigma(x)$ с заданными моментами

$$s_\nu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^\nu \, d\sigma(x) \qquad (\nu=\overline{0, N})$$

является ненегативность квадратичной формы (ганкелевой формы):

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{[N/2]} s_{\alpha+\beta} \xi_\alpha \xi_\beta$$

В случае некоторой локализации приложения обобщенных усилий на границе тела можно воспользоваться результатами [6, 3]. Так, если $\sigma(x)$ сосредоточена на некотором $[a, b]$ и N — нечетное число, то необходимым и достаточным условием разрешимости задачи является ненегативность двух квадратичных форм

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{(N-1)/2} (s_{\alpha+\beta+1} - a s_{\alpha+\beta}) \xi_\alpha \xi_\beta,$$
$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{(N-1)/2} (b s_{\alpha+\beta} - s_{\alpha+\beta+1}) \xi_\alpha \xi_\beta \tag{2.3}$$

Ненегативность квадратичных форм возникает как результат применения общего критерия М. Рисса (конус пространства B состоит из неотрицательных непрерывных функций) и представления неотрицательного на U многочлена. Так, известно, что

$$P(x)\geqslant 0\ (x\in(-\infty,\infty))\Leftrightarrow P(x)=[A(x)]^2+[B(x)]^2$$

$$2\deg A(x)\leqslant\deg P(x),\quad 2\deg B(x)\leqslant\deg P(x)$$

Если $A(x)=\Sigma\xi_\alpha x^\alpha$, то $[A(x)]^2=\Sigma\xi_\alpha\xi_\beta x^{\alpha+\beta}$, а $\Phi([A(x)]^2)=\Sigma s_{\alpha+\beta}\xi_\alpha\xi_\beta$.

Если, например, $U=[a,b]$, то для $\deg P(x)=N$ (N – нечетное число) имеет место теорема Люкача [2]:

$$P(x)\geqslant 0\ (x\in[a,b])\Leftrightarrow P(x)=(x-a)[A(x)]^2+(b-x)[B(x)]^2$$

Отсюда вытекает появление квадратичных форм (2.3). Аналогично обстоит дело в случае четного N.

Следует заметить, что ненегативность квадратичной формы эквивалентна неотрицательности главных миноров матрицы квадратичной формы. В случае разрешимости проблемы моментов существует функция $\sigma(x)$ с конечным числом скачков ρ_k в точках $x_k\in U$:

$$P(x)=\sigma'(x)=\sum\nolimits_i\rho_k\delta(x-x_k)\qquad(\rho_k>0)\tag{2.4}$$

Если U есть объединение непересекающихся отрезков $[a_\nu, b_\nu]$, то ситуация несколько усложняется, но точки скачков x_k и величины скачков ρ_k находятся вполне конструктивно достаточно простым способом [6].

Таким образом, программа решения поставленной задачи состоит из следующих шагов. Сначала с привлечением численных методов находится решение прямой задачи о напряженном состоянии, формируются моментные функции. Затем строится аппроксимация моментных функций (в частности) многочленами.

На основе исследования полученной степенной (в частности) проблемы моментов делается вывод о достижимости или недостижимости заданного напряженного состояния в контролируемой области.

Аппроксимационный подход вносит некоторую погрешность в значения величин контролируемых параметров $\{s_k\}_{k=1}^n$. Оценим эту погрешность. Пусть $\varphi_k(x)=R_k(x)+\varepsilon_k(x)$, $\varepsilon:=\max\{\max|\varepsilon_k(x)|:x\in U,\ k=\overline{1,n}\}$, а $\sigma^*(x)$ – некоторое решение степенной проблемы моментов (2.1). Тогда, очевидно,

$$\left|\int\limits_U\varphi_k(x)d\sigma^*(x)-s_k\right|\leqslant\varepsilon\operatorname{Var}\sigma^*(x)=\varepsilon s_0$$

Следовательно, аппроксимация моментных функций и вносимая при этом погрешность могут изменить исходные значения параметров не более, чем на εs_0.

3. Пример. Рассмотрим подробнее задачу оптимизации коэффициентов интенсивности напряжений в анизотропной полуплоскости, ослабленной внутренним разрезом L. Пусть граница полуплоскости свободна от сил за исключением участка U, на котором действует нормальная нагрузка $P(x)$, а берега разрезов свободны от сил. Функция $P(x)$ является обобщенной функцией, точнее $P(x)dx=d\sigma(x)$, где $\sigma(x)$ – функция ограниченной вариации. В соответствии со сказанным выше рассмотрены две ситуации. В первой из них $d\sigma(x)\geqslant 0$, а во второй $d\sigma(x)\gtreqless 0$. Согласно [4, 7] коэффициенты интенсивности являются линейными функционалами

$$k_{\mathrm{I}}^{\pm}=\mp 2\sqrt{\pi s'(\pm 1)}\left\{\int\limits_{U}\operatorname{Im}\left[\bar{a}_1(\Psi_c)a_2(\Psi_c)\frac{\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1}{\mu_2-\bar{\mu}_2}\Omega_0(\pm,,x)\right]d\sigma(x)\right\}$$

$$a_k(\Psi_c)=\mu_k\cos\Psi_c-\sin\Psi_c,\qquad \Psi_c=\Psi(\beta)|_{\beta=\pm 1}\quad (k=1,\ 2) \tag{3.1}$$

U — подмножество из $(-\infty,\ \infty)$, на котором определена $\sigma(x)$, μ_k — характеристические числа [8], β — параметр в уравнении разреза $x=x(\beta)$, $y=y(\beta)$, $|\beta|\leqslant 1$. Замечание соответствует $\beta=\pm 1$ концам трещины, Ψ — угол между положительной нормалью к левому берегу и осью OX. Коэффициент интенсивности $k_{\mathrm{II}}^{\pm}$ задается формулой (3.1), в которой вместо $a_2(\Psi_c)$ берется $a_2(\Psi_c+\pi/2)$. Функция $\Omega_0'(\beta,\ x)$ является решением системы интегральных уравнений

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{\Omega_0(\beta,x)H(\beta,\beta_0)+\bar{\Omega}_0(\beta,x)H_*(\beta,\beta_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}\,d\beta+ \tag{3.2}$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}\frac{\Omega_0(\beta,x)}{(\beta-\beta_0)\sqrt{1-\beta^2}}d\beta=N(\beta_0,x),\qquad \int\limits_{-1}^{1}\frac{\Omega_0(\beta,x)}{\sqrt{1-\beta^2}}t_1'(\beta)\,d\beta=0$$

$$H(\beta,\beta_0)=\frac{1}{2}\frac{d}{d\beta}\left\{\ln\frac{(\bar{t}_2-\bar{t}_{20})(t_1-t_{10})}{(\beta-\beta_0)^2(t_1-\bar{t}_{20})(\bar{t}_2-t_{10})}+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{\mu_1-\bar{\mu}_2}{\mu_1-\mu_2}\right|^2\ln\frac{(t_1-\bar{t}_{20})(t_2-\bar{t}_{10})}{(t_2-\bar{t}_{20})(t_1-\bar{t}_{10})}\right\}t_1'(\beta)$$

$$H_*(\beta,\beta_0)=\frac{\bar{\mu}_1-\mu_2}{2(\mu_1-\mu_2)}\frac{d}{d\beta}\left\{\ln\frac{(\bar{t}_2-\bar{t}_{20})(\bar{t}_1-t_{10})(t_2-\bar{t}_{10})}{(\bar{t}_1-\bar{t}_{10})(\bar{t}_2-t_{10})(t_2-\bar{t}_{20})}\right\}t_1'(\beta)$$

$$N(\beta_0,x)=\frac{1}{4}\left\{\frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\frac{dt_{10}/d\beta_0}{t_{10}-x}-\frac{\bar{\mu}_1(\mu_2-\bar{\mu}_2)}{|\mu_1-\mu_2|^2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{dt_{20}/d\beta_0}{\bar{t}_{20}-x}-\frac{\bar{\mu}_2(\bar{\mu}_1-\mu_2)}{|\mu_1-\mu_2|^2}\cdot\frac{d\bar{t}_{10}/d\beta_0}{\bar{t}_{10}-x}\right\}$$

Для приближенно-аналитического решения системы (3.2) применим квадратурные формулы Гаусса с n узлами относительно веса $(1-\beta^2)^{-1/2}$. Имеем

$$\frac{\pi}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\Omega_0(\beta_\nu,x)}{\beta_\nu-\beta_0}+\frac{\pi}{n}\sum_{\nu=1}^{n}[H(\beta_\nu,\beta_0)\Omega_0(\beta_\nu,x)+$$

$$+H_*(\beta_\nu,\beta_0)\bar{\Omega}_0(\beta_\nu,x)]=N(\beta_0,x) \tag{3.3}$$

$$\frac{\pi}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\Omega_0(\beta_\nu,x)t_1'(\beta_\nu)=0,\qquad \beta_\nu=\cos\theta_\nu,\qquad \theta_\nu=\frac{2\nu-1}{2n}\pi.$$

Примем в (3.3) в качестве точек коллокации значения $\beta_0=\beta_{0\mu}=\cos(\mu\pi/n)$ $(\mu=\overline{1,\ n-1})$. Полученная система линейных уравнений позволяет приближенно представить значения $\Omega_0(\beta_\nu,\ x)$ в виде линейных комбинаций функций $N(\beta_{0\mu},\ x)$.

Задачу оптимизации можно сформулировать следующим образом: пусть заданы желательные значения коэффициентов интенсивности $k_{\mathrm{I},0}^{\pm}$,

$k_{\mathrm{II},0}^{\pm}$ в вершинах трещины L. В общем случае заданы «коридоры» $|k_{\mathrm{I}}^{\pm}-k_{\mathrm{I},0}^{\pm}|\leqslant\varepsilon_{\mathrm{I}}^{\pm}$, $|k_{\mathrm{II}}^{\pm}-k_{\mathrm{II},0}^{\pm}|\leqslant\varepsilon_{\mathrm{II}}^{\pm}$ для коэффициентов $k_{\mathrm{I}}^{\pm}$, $k_{\mathrm{II}}^{\pm}$. Внешнее воздействие $d\sigma(x)$, позволяющее управлять значениями коэффициентов интенсивности, находится из условия минимальности суммарного импульса $\mathrm{Var}\,\sigma(x)\to\min$.

Каждая из проблем моментов имеет вид (положим для сокращения записей $\varepsilon_{\mathrm{I},i}^{\pm}=0$):

$$\int\limits_U \varphi_{\mathrm{I}}^{\pm}(x)\,d\sigma(x)=k_{\mathrm{I}}^{\pm},\qquad \int\limits_U \varphi_{\mathrm{II}}^{\pm}(x)\,d\sigma(x)=k_{\mathrm{II}}^{\pm} \tag{3.4}$$

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{\pm}(x)=\mp2\sqrt{\pi s'(\pm1)}\,\mathrm{Im}\left[\bar{a}_1(\psi_c)a_2(\psi_c)\frac{\mu_2-\bar{\mu}_1}{\mu_2-\bar{\mu}_2}\Omega_0(\pm1,x)\right]$$

$$\varphi_{\mathrm{II}}^{\pm}(x)=\mp2\sqrt{\pi s'(\pm1)}\,\mathrm{Im}\left[\bar{a}_1(\psi_c)a_2\left(\psi_c+\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mu_2-\bar{\mu}_1}{\mu_2-\bar{\mu}_2}\Omega_0(\pm1,x)\right]$$

а $\Omega_0(\pm1,\ x)$ вычисляются в согласии с методом Гаусса как значения интерполяционного многочлена

$$\Omega_0(\pm1,x)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu+r}\Omega_0(\beta_\nu,x)\,\mathrm{tg}\left(\frac{2\nu-1}{4n}\pi+\rho_\pm\frac{\pi}{2}\right)$$

$$r_+=1,\quad r_-=n,\quad \rho_+=\pi/2,\quad \rho_-=0$$

Моментные функции $\varphi_i^{\pm}(x)$ $(i=\mathrm{I},\ \mathrm{II})$ аппроксимируем многочленами третьей степени

$$P_j^{\pm}(x)=\sum_{k=0}^{3}a_k(\pm1,j)x^k \tag{3.4}$$

Представление (3.4) тем точнее, чем «меньше» множество U. Подставим вместо функций φ их приближенное представление (3, 4) и из полученной системы линейных уравнений найдем степенные моменты $s_\nu=\int\limits_U x^\nu\,d\sigma(x)\qquad(\nu=\overline{0,3})$.

Если $U=[a,\ b]$, то о разрешимости задачи 1 (вариант классической проблемы моментов) можно судить по критерию (2.3), который вполне конструктивен. Остается неосвещенным вопрос о нахождении хотя бы одного экстремального решения $\sigma(x)$. Отметим, прежде всего, что $\mathrm{var}\,\sigma(x)=$ $=\int\limits_U d\sigma(x)=s_0$. Это означает, что аппроксимационный подход позволяет сразу найти оптимальное значение суммарного импульса $\mathrm{Var}\,\sigma(x)$. Чтобы найти величины импульсов ρ_k и точки их приложения $x_k\in U$ (см. (2.4)) можно воспользоваться следующим алгоритмом [2, 3]. Последовательность моментов $\{s_k\}_{k=0}^{3}$ дополняется моментом s_4 так, чтобы последовательность $\{s_k\}_{k=0}^{4}$ была сингулярно позитивна относительно множества U. После определения момента s_4 необходимо построить обычным способом систему ортогональных многочленов $P_j(x)$ степени j $(j=\overline{0,2})$ относительно ненегативного функционала I: $\mathrm{I}\{x^k\}=s_k$ $(k=\overline{0,4})$. В [2, 3] даны простые явные формулы для системы многочленов $P_j(x)$. Выбрав число λ так, чтобы среди корней многочлена $Q(x, \lambda):=P_2(x)+\lambda P_1(x)$ были концы интервала $U=[a, b]$ (в [3] в терминах индекса представления (2.4) изучена общая ситуация) и находя все корни многочлена $Q(x, \lambda)$, получаем весь набор точек $\{x_k\}$ из (2.4). Величины скачков определяются в таком случае как значения функционала I на специально построенном неотрицательном многочлене или как решение системы линейных уравнений $\Sigma\rho_i x_k^j=s_k$ $(k=\overline{0,3})$.

В задаче 2 с помощью аппроксимационного подхода приходим к степенной l-проблеме моментов, полный алгоритм решения которой с определением точек x_k и величин ρ_k изложен в [3].

На примере полуплоскости $y\geqslant 0$ иллюстрируем изложенное выше. Пусть внутренний разрез (в полуплоскости $y\geqslant 0$) – прямолинейный, $|x|\leqslant 0{,}2$, $y=1$, а бороэпоксидная полуплоскость имеет характеристики $\mu_1=5{,}12i$, $\mu_2=0{,}52i$. На участке границы $|x|\leqslant 0{,}1$ допускаются нагрузки $d\sigma(x)\geqslant 0$. Зададим симметричные значения коэффициентов интенсивности k_1^+, $k_1^-=-k_1^+$, k_2^+, $k_2^-=k_2^+$. Не выписывая очень громоздкие значения для моментных функций $\varphi_\nu^\pm(x)$, где

$$k_\nu^\pm=\int_{-0,1}^{0,1}\varphi_\nu^\pm(x)\,d\sigma(x)\quad(\nu=1,2);\qquad \varphi_1^-(x)=-\varphi_1^+(x),\qquad \varphi_2^-(x)=\varphi_2^+(x)$$

приведем их аппроксимации $R_1^+(x)=0{,}3077+0{,}2470x-0{,}8855x^2+0{,}5765x^3$; $R_2^+(x)=-0{,}1371+1{,}2887x+1{,}1549x^2+0{,}5114x^3$ с относительными погрешностями $\delta_1=0{,}15\%$, $\delta_2=0{,}4\%$ соответственно. Применив критерии разрешимости степенной проблемы моментов на $[-0{,}1;\ 0{,}1]$, получим, что для $k_1^\pm=\pm 0{,}3000$, $k_2^\pm=-0{,}1250$ существует обобщенная нагрузка $d\sigma(x)=0{,}5[\delta(x+0{,}1)+\delta(x-0{,}1)]$. Для $k_1^\pm=\pm 0{,}3034$, $k_2^\pm=-0{,}1313$ существует обобщенная нагрузка $d\sigma(x)=0{,}5[\delta(x+0{,}0707)+\delta(x-0{,}0707)]$, а для $k_1^\pm=\pm 0{,}2192$, $k_2^\pm=-0{,}0216$ нагрузки $d\sigma(x)\geqslant 0$ на участке $[-0{,}1;\ 0{,}1]$ не существует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959. 684 с.
2. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с ней. М.: Физматгиз, 1961. 310 с.
3. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. 551 с.
4. *Фильштинский Л. А.* Краевые задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости, ослабленной отверстием или разрезом // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 72–79.
5. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 407 с.
6. *Фильштинский В. А.* Степенная проблема моментов на всей оси при заданном конечном числе пустых интервалов в спектре // Зап. мех.-мат. фак. ХГУ и Харьковск. мат. о-ва. 1964. Т. 30. Сер. 4. С. 186–200.
7. *Фильштинский В. А., Фильштинский Л. А.* Об управлении разрушением тел с трещинами // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 1. С. 158–163.
8. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
9. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.

Москва, Сумы

Поступила в редакцию 13.IX.1990