МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1992

УДК 531.35

 О. В. ХОЛОСТОВА

ОБ ЭВОЛЮЦИИ БЫСТРЫХ ВРАЩЕНИЙ ТЕЛА С УПРУГОВЯЗКОЙ МЕМБРАНОЙ НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

Рассматривается система, состоящая из несущего твердого тела и упруговязкой круглой мембраны, закрепленной в теле по своему контуру так, что ее ось симметрии совпадает с одной из главных центральных осей инерции недеформированной системы. Система движется в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой орбите. Считается, что мембрана достаточно жесткая, а диссипативные силы малы по сравнению с упругими силами. В рамках линейной теории упругости составлена система дифференциальных уравнений движения системы в квазистатическом режиме. При помощи метода усреднения исследуется эволюция быстрых вращений системы относительно центра масс. Показано, что ось симметрии мембраны в зависимости от соотношения между моментами инерции недеформированной системы стремится совпасть или стать ортогональной вектору кинетического момента системы; при этом последний с течением времени стремится расположиться в плоскости орбиты.

1. Об упругих колебаниях мембраны. Рассмотрим движения системы, состоящей из несущего твердого тела и упруговязкой круглой мембраны, закрепленной в теле по своему контуру. Ось симметрии мембраны совпадает с одной из главных центральных осей инерции системы в недеформированном состоянии. Будем считать, что система движется в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой орбите и ее движение относительно центра масс не влияет на движение самого центра масс.

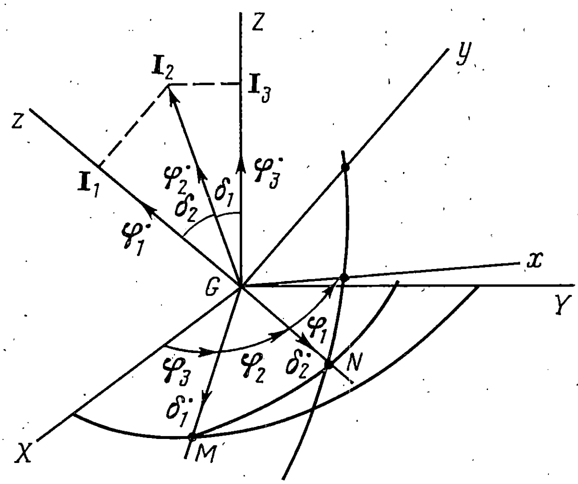
В процессе движения мембрана может совершать упругие колебания. Предполагаем, что упругие смещения мембраны перпендикулярны ее плоскости и описываются в рамках линейной теории упругости. Величину u упругого смещения мембраны запишем в виде ряда по ортонормированной системе собственных функций $U_{mn}'(r, \alpha)$ и $U_{mn}''(r, \alpha)$ ее свободных упругих колебаний (r, α — полярные координаты в плоскости недеформированной мембраны) [1, 2]:

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} q_{mn}'(t)\,U_{mn}'(r,\alpha)+q_{mn}''(t)\,U_{mn}''(r,\alpha)$$

где $q_{mn}'(t)$ и $q_{mn}''(t)$ — соответствующие обобщенные координаты, $U_{mn}'(r, \alpha)=c_{mn}J_n(k_{mn}r)\cos n\alpha$, $U_{mn}''(r, \alpha)=c_{mn}J_n(k_{mn}r)\sin n\alpha$, $J_n(k_{mn}r)$ — функция Бесселя n-го порядка, k_{mn} — m-й корень уравнения $J_n(ka)=0$, $c_{mn}=(\pi a^2\sigma J_n'^2(k_{mn}a)/2)^{-1/2}$, a — радиус мембраны, σ — ее поверхностная плотность. Каждому значению параметра k_{mn} соответствует частота $\omega_{mn}=ak_{mn}$ ($n=0, 1, 2, \ldots$; $m=1, 2, \ldots$) свободных упругих колебаний мембраны.

Кинетическая и потенциальная энергия упругих деформаций мембраны записываются в виде [1]:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(\dot q_{mn}'^2+\dot q_{mn}''^2),\qquad \Pi=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\omega_{mn}^2(q_{mn}'^2+q_{mn}''^2)\qquad(1.1)$$



Фиг. 1

Считаем, что система обладает внутренней вязкостью и соответствующие диссипативные силы описываются при помощи функции Рэлея вида [3]:

$$\Psi=\chi b\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\omega_{mn}^{2}\left(\dot{q}_{mn}'^{2}+\dot{q}_{mn}''^{2}\right)$$

где b — положительная постоянная, χ — безразмерный параметр.

2. Уравнения движения. Уравнения движения системы (несущее тело и мембрана) запишем в виде уравнений Рауса, взяв переменные Андуайе φ_i, I_i $(i=1, 2, 3)$ [4] в качестве гамильтоновой части переменных Рауса, а в качестве лагранжевой части — обобщенные координаты q_{mn}', q_{mn}''.

Пусть $Ox_1y_1z_1$ — система координат с началом в центре масс O недеформированной системы и осями, направленными вдоль ее главных центральных осей инерции в недеформированном состоянии. Рассматриваемую систему будем считать динамически симметричной относительно оси Oz_1. Ось симметрии мембраны совпадает с этой осью, а центр мембраны отстоит от центра масс O на расстоянии l. Можно показать, что центр масс G деформированной системы лежит на оси Oz_1. Введем еще систему координат $Gxyz$ с осями, параллельными осям системы $Ox_1y_1z_1$, и $GXYZ$ — кенигову систему координат, ось GZ которой перпендикулярна плоскости орбиты, а оси GX и GY лежат в плоскости орбиты и имеют неизменные направления.

На фиг. 1 показаны системы координат $Gxyz$ и $GXYZ$, $\mathbf{I}_2$ — вектор кинетического момента системы относительно центра масс G, I_1 и I_3 — его проекции соответственно на оси Gz и GZ. Плоскость GMN перпендикулярна $\mathbf{I}_2$; угловые переменные φ_1, φ_2, φ_3 указаны на фиг. 1. Углы δ_1 и δ_2 задаются равенствами

$$\cos\delta_1=I_3/I_2,\quad \cos\delta_2=I_1/I_2 \tag{2.1}$$

Пусть $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор, направленный по радиусу-вектору центра масс G системы относительно притягивающего центра. Можно показать, что его проекции γ_1, γ_2, γ_3 на оси системы координат $Gxyz$ суть

$$\gamma_1=l_1\cos\varphi_1-l_2\sin\varphi_1,\quad \gamma_2=-l_1\sin\varphi_1-l_2\cos\varphi_1$$
$$l_1=\cos\beta\cos\varphi_2-\sin\beta\sin\varphi_2\cos\delta_1,\quad \beta=\varphi_3-\omega_0 t \tag{2.2}$$

$$l_2=(\cos\beta\sin\varphi_2+\sin\beta\cos\varphi_2\cos\delta_1)\cos\delta_2-\sin\beta\sin\delta_1\sin\delta_2$$
$$\gamma_3=(\cos\beta\sin\varphi_2+\sin\beta\cos\varphi_2\cos\delta_1)\sin\delta_2+\sin\beta\sin\delta_1\cos\delta_2$$
где ω_0 — среднее движение центра масс.

Опираясь на вычисления, проведенные в [5], можно получить следующее выражение для функции Рауса рассматриваемой системы

$$R={}^1/_2(C^{-1}-A^{-1})I_1^2+I_2^2/(2A)+{}^3/_2\omega_0^2(C-A)\gamma_3^2-T+\Pi+$$
$$+\left(\sum_{m=1}^{\infty}b_m\dot{q}_{m0}'\right)^2\Big/M-[(I_2^2-I_1^2)/A-\omega_0^2(1-3\gamma_3^2)]\sum_{m=1}^{\infty}b_m l q_{m0}'+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\{[I_1(I_2^2-I_1^2)^{1/2}/(AC)+3\omega_0^2\gamma_3 l_2](q_{m1}'\sin\varphi_1+q_{m1}''\cos\varphi_1)- \tag{2.3}$$
$$-3\omega_0^2\gamma_3 l_1(q_{m1}'\cos\varphi_1-q_{m1}''\sin\varphi_1)+(I_2^2-I_1^2)^{1/2}/A\,(\dot{q}_{m1}'\cos\varphi_1-\dot{q}_{m1}''\sin\varphi_1)\}+R_*$$

Здесь A и C — моменты инерции недеформированной системы относительно осей Ox_1 и Oz_1, M — масса системы,

$$a_m=\pi\sigma c_{m1}\int_0^a J_1(k_{m1}r)r^2\,dr,\qquad b_m=2\pi\sigma c_{m0}\int_0^a J_0(k_{m0}r)r\,dr$$

Выражения для T и Π определены в (1.1); R_* — линейная по $\dot{q}_{mn}'$, $\dot{q}_{mn}''$ квадратичная форма относительно q_{mn}', q_{mn}'', $\dot{q}_{mn}'$, $\dot{q}_{mn}''$ с коэффициентами — функциями переменных Андуайе и времени, ее явный вид в дальнейшем не потребуется.

Уравнения движения системы имеют вид

$$\dot{\varphi}_i=\partial R/\partial I_i,\quad \dot{I}_i=-\partial R/\partial\varphi_i\quad(i=1,2,3) \tag{2.4}$$
$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot{q}_{mn}'}\right)+\frac{\partial R}{\partial q_{mn}'}=-\frac{\partial\Psi}{\partial\dot{q}_{mn}'},\qquad -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot{q}_{mn}''}\right)+\frac{\partial R}{\partial q_{mn}''}=-\frac{\partial\Psi}{\partial\dot{q}_{mn}''},$$
$$(n=0,1,2,\ldots;\ m=1,2,\ldots) \tag{2.5}$$

3. Квазистатический режим движения. Рассмотрим движение системы (несущее тело и мембрана) в квазистатическом режиме [6, 7], вводя дополнительные физические допущения. Полагаем, что характерное время затухания свободных упругих колебаний мембраны много больше характерного периода упругих колебаний, но много меньше периода T_0 обращения центра масс по орбите, а угловая скорость вращения системы как целого велика по сравнению со средним движением центра масс. Считая $T_0\sim1$, введем малые параметры $\varepsilon=\omega_0/\Omega_1$ и $\mu=A\omega_0/I_{20}$ (Ω_1 — наименьшая частота свободных упругих колебаний мембраны, I_{20} — начальное значение величины кинетического момента). Между параметрами χ, ε и μ в силу сделанных допущений имеют место следующие неравенства: $\chi\ll\varepsilon\ll1\ll\mu^{-1}$. В дальнейшем полагаем $\chi\sim\varepsilon^{\delta+1}$, $0<\delta<1$.

Используя (2.3), (2.5), можно показать, что в квазистатике приближенные значения обобщенных координат q_{mn}', q_{mn}'' (на интервалах времени, превышающих характерное время движения системы как целого относительно центра масс) определяются по формуле [7]:

$$q_{mn}=\varepsilon^2\lambda_{mn}^{-2}[Q_{mn}-2\chi b\dot{Q}_{mn}]+O(\varepsilon^4)\quad(\lambda_{mn}=\varepsilon\omega_{mn}) \tag{3.1}$$
$$Q_{m0}'=b_m l[(I_2^2-I_1^2)/A-\omega_0^2(1-3\gamma_3^2)]$$
$$Q_{m1}'=a_m(C-2A)A^{-1}[I_1(I_2^2-I_1^2)^{1/2}A^{-1}C^{-1}\sin\varphi_1-3\omega_0^2\gamma_1\gamma_3]$$
$$Q_{m1}''=a_m(C-2A)A^{-1}[I_1(I_2^2-I_1^2)^{1/2}A^{-1}C^{-1}\cos\varphi_1-3\omega_0^2\gamma_2\gamma_3]\quad(m=1,2,\ldots)$$

В квазистатическом режиме уравнения (2.4) при подстановке в них вместо $q_{mn}^{\prime}$, $q_{mn}^{\prime\prime}$ выражений (3.1) имеют вид (вместо переменной φ_3 введена переменная β, определенная в (2.2))

$$
\begin{aligned}
\dot{I}_1 = {} & \varkappa_1\varepsilon^2(2A-C)A^{-1}\{2\chi b[I_1(I_2^2-I_1^2)^{1/2}A^{-1}C^{-1}+3\omega_0^2\gamma_3 l_2]\times \\
& \times[3\omega_0^2 d(\gamma_3 l_1)/dt+(C-A)A^{-1}C^{-1}I_1(I_1(I_2^2-I_1^2)^{1/2}A^{-1}C^{-1}+3\omega_0^2\gamma_3 l_2)]+ \\
& +18\omega_0^4\chi b\gamma_3 l_1[{}^1/_2(C-A)A^{-1}C^{-1}I_1I_2(I_2^2-I_1^2)^{-1/2}\partial\gamma_3^2/\partial\varphi_2+ \\
& +(C-A)A^{-1}C^{-1}I_1\gamma_3 l_1-d(\gamma_3 l_2)/dt]-A^{-1}(I_2^2-I_1^2)^{1/2}\{3\omega_0^2[-(C-A)A^{-1}C^{-1}I_1\times \\
& \times(\gamma_3 l_1+{}^1/_2 I_2(I_2^2-I_1^2)^{-1/2}\partial\gamma_3^2/\partial\varphi_2+d(\gamma_3 l_2)/dt]+ \\
& +2\chi b[3\omega_0^2(C-A)A^{-1}C^{-1}I_1 d(2\gamma_3 l_1+{}^1/_2 I_2(I_2^2-I_1^2)^{-1/2}\partial\gamma_3^2/\partial\varphi_2)/dt- \\
& -3\omega_0^2 d^2(\gamma_3 l_2)/dt^2+(C-A)^2A^{-2}C^{-2}I_1^2(A^{-1}C^{-1}I_1(I_2^2-I_1^2)^{1/2}+3\omega_0^2\gamma_3 l_2)]\}\}
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{I}_2 = {} & -{}^3/_2\omega_0^2(C-A)\partial\gamma_3^2/\partial\varphi_2+3\omega_0^2\varkappa_0 l^2\varepsilon^2(\partial\gamma_3^2/\partial\varphi_2)\{[(I_2^2-I_1^2)A^{-2}- \\
& -\omega_0^2(1-3\gamma_3^2)]-6\chi b\omega_0^2[d\gamma_3^2/dt-(C-A)A^{-2}I_2\partial\gamma_3^2/\partial\varphi_2]\}+ \\
& +3\omega_0^2\varkappa_1\varepsilon^2(2A-C)A^{-1}\{(\partial(\gamma_3 l_1)/\partial\varphi_2)[3\omega_0^2\gamma_3 l_1-2\chi b[3\omega_0^2 d(\gamma_3 l_1)/dt+ \\
& +(C-A)A^{-1}C^{-1}I_1(I_1(I_2^2-I_1^2)^{1/2}A^{-1}C^{-1}+3\omega_0^2\gamma_3 l_2)]]+(\partial(\gamma_3 l_2)/\partial\varphi_2)\times \\
& \times[(I_1(I_2^2-I_1^2)^{1/2}A^{-1}C^{-1}+3\omega_0^2\gamma_3 l_2)+6\chi b\omega_0^2({}^1/_2(C-A)A^{-1}C^{-1}I_1I_2\times \\
& \times(I_2^2-I_1^2)^{-1/2}\partial\gamma_3^2/\partial\varphi_2+(C-A)A^{-1}C^{-1}I_1\gamma_3 l_1-d(\gamma_3 l_2)/dt)]\}
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{I}_3 = {} & -{}^3/_2\omega_0^2(C-A)\partial\gamma_3^2/\partial\beta+3\omega_0^2\varkappa_0 l^2\varepsilon^2(\partial\gamma_3^2/\partial\beta)\{[(I_2^2-I_1^2)A^{-2}- \\
& -\omega_0^2(1-3\gamma_3^2)]-6\chi b\omega_0^2[d\gamma_3^2/dt-(C-A)A^{-2}I_2\partial\gamma_3^2/\partial\varphi_2]\}+ \\
& +3\omega_0^2\varkappa_1\varepsilon^2(2A-C)A^{-1}\{(\partial(\gamma_3 l_1)/\partial\beta)[3\omega_0^2\gamma_3 l_1-2\chi b[3\omega_0^2 d(\gamma_3 l_1)/dt+ \\
& +(C-A)A^{-1}C^{-1}I_1(I_1(I_2^2-I_1^2)^{1/2}A^{-1}C^{-1}+3\omega_0^2\gamma_3 l_2)]]+(\partial(\gamma_3 l_2)/\partial\beta)\times \\
& \times[(I_1(I_2^2-I_1^2)^{1/2}A^{-1}C^{-1}+3\omega_0^2\gamma_3 l_2)+6\chi b\omega_0^2({}^1/_2(C-A)A^{-1}C^{-1}I_1I_2\times \\
& \times(I_2^2-I_1^2)^{-1/2}\partial\gamma_3^2/\partial\varphi_2+(C-A)A^{-1}C^{-1}I_1\gamma_3 l_1-d(\gamma_3 l_2)/dt)]\}
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi}_1 = {} & -(C-A)A^{-1}C^{-1}I_1+2\varkappa_0 l^2\varepsilon^2 I_1(I_2^2-I_1^2)A^{-2}-\varkappa_1\varepsilon^2(2A-C)I_1\times \\
& \times A^{-3}C^{-2}[I_2^2-(3A-C)A^{-1}I_1^2]+O(\varepsilon^2\mu^2)
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

$$
\dot{\varphi}_2 = I_2/A-2\varkappa_0 l^2\varepsilon^2 I_2(I_2^2-I_1^2)A^{-3}-\varkappa_1\varepsilon^2(2A-C)^2A^{-4}C^{-2}I_1^2I_2+O(\varepsilon^2\mu^2)
$$

$$
\dot{\beta} = -\omega_0+O(\varepsilon^2\mu^2), \qquad \varkappa_0 = \sum_{m=1}^{\infty} b_m^2/\lambda_{m0}^2, \qquad \varkappa_1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2/\lambda_{m1}^2
$$

В уравнениях (3.2)—(3.5) отброшены члены порядка ε^4 и выше. Отметим, что, хотя функция Рауса системы (2.3), а следовательно, и уравнения движения (2.4), (2.5), а также приближенные значения обобщенных координат (3.1) содержат угол φ_1, в правых частях уравнений (3.2)—(3.5) движения системы в квазистатическом режиме эта переменная отсутствует.

4. Быстрая диссипативная эволюция. На интервале времени $\tau_1 \sim (\varepsilon^2\chi)^{-1}$ действием на систему гравитационного момента можно пренебречь. Система эволюционирует вокруг вектора кинетического момента, который можно считать постоянным по величине и направлению в абсолютном пространстве. Уравнения, описывающие эту быструю диссипативную эволюцию, получаются из (3.2)—(3.5), если в них отбросить слагаемые порядка μ^2 и выше. Имеем уравнения

$$
\dot{I}_1 = \frac{2\varkappa_1\varepsilon^2\chi b(2A-C)^2 I_1^3(I_2^2-I_1^2)(C-A)}{A^5C^3}, \qquad \dot{I}_2 = 0, \qquad \dot{I}_3 = 0
$$

и уравнения (3.5), в которых отброшены группы слагаемых $O(\varepsilon^2\mu^2)$. Решения этой приближенной системы уравнений аппроксимируют решения системы (3.2)—(3.5) с погрешностью порядка $\mu^2(\varepsilon^2\chi)^{-1}$.

Указанная система имеет два стационарных решения: $I_1=0$, $I_1=\pm I_2$. Первое из них асимптотически устойчиво при $A>C$ и неустойчиво при $A<C$, второе асимптотически устойчиво при $A<C$ и неустойчиво при $A>C$. Система эволюционирует так, что при $A>C$ ее предельным на данном этапе эволюции движением является быстрое вращение вокруг оси, перпендикулярной оси мембраны. При $A<C$ предельным движением является вращение вокруг оси мембраны.

5. Медленная диссипативная эволюция (A>C). Будем считать быструю диссипативную эволюцию законченной. Пусть $A>C$. Положим в системе (3.3)–(3.5) $I_1=0$ и рассмотрим подсистему уравнений для I_2, I_3, φ_2, β.

Усредним уравнения для I_2, I_3 по переменным φ_2, β и отбросим слагаемые, пропорциональные $\varepsilon^2\chi\mu^6$. Усредненные уравнения имеют вид

$$I_2^{\cdot}=-\alpha_1 I_2[\varkappa_0 l^2(^3/_8+{}^1/_4\cos^2\delta_1+{}^3/_8\cos^4\delta_1)+{}^1/_2\varkappa_1(1+\cos^2\delta_1)] \tag{5.1}$$
$$I_3^{\cdot}=-\alpha_1 I_3[{}^1/_2\varkappa_0 l^2(1+\cos^2\delta_1)+\varkappa_1],\quad \alpha_1=9A^{-2}(2A-C)\omega_0^4\varepsilon^2\chi b>0.$$

Решения уравнений (5.1) аппроксимируют величины I_2, I_3 с погрешностью порядка μ на интервале времени $\tau_2\sim(\varepsilon^2\chi\mu^4)^{-1}$[1]. Уравнения (5.1) описывают медленную диссипативную эволюцию вектора кинетического момента рассматриваемой системы. Характерное время эволюции τ_2.

Из (2.1) и (5.1) получим следующее усредненное уравнение для δ_1 — угла между кинетическим моментом и нормалью к плоскости орбиты

$$\delta_1^{\cdot}={}^1/_8\alpha_1\sin\delta_1\cos\delta_1[\varkappa_0 l^2(1+3\cos^2\delta_1)+4\varkappa_1] \tag{5.2}$$

Уравнение (5.2) имеет неустойчивые особые точки $\delta_1=0$; π и асимптотически устойчивую точку $\delta_1=\pi/2$. Можно показать, что с возрастанием времени угол δ_1 стремится к $\pi/2$, т. е. вектор кинетического момента стремится расположиться в плоскости орбиты.

Следовательно, при $A>C$ предельным является движение, когда система совершает быстрые вращения вокруг оси, лежащей в плоскости орбиты и ортогональной оси мембраны.

6. Медленная диссипативная эволюция ($A<C$). Пусть $A<C$. После завершения быстрой диссипативной эволюции в уравнениях (3.3)–(3.5) можно положить $I_1=\pm I_2$. Рассмотрим подсистему уравнений для I_2, I_3, φ_2, β.

Усреднив, как в п. 5, уравнения для I_2, I_3 по переменным φ_2 и β, получим уравнения

$$I_2^{\cdot}=-\alpha_2 I_2\sin^2\delta_1(1+3\cos^2\delta_1),\quad I_3^{\cdot}=-4\alpha_2 I_3\sin^2\delta_1 \tag{6.1}$$
$$\alpha_2={}^9/_4A^{-1}C^{-1}(2A-C)\omega_0^4\varepsilon^2\chi b\varkappa_1>0$$

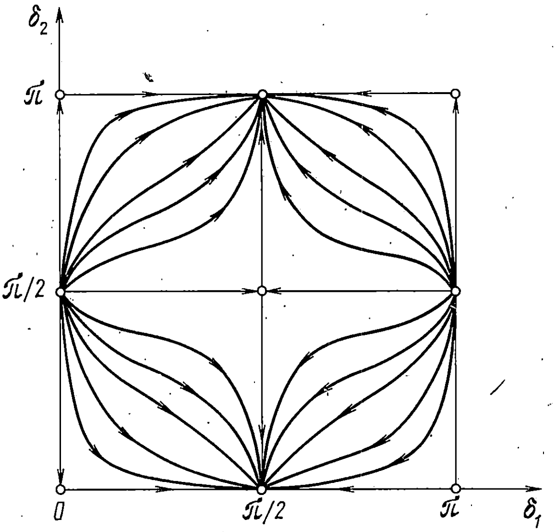
аппроксимирующие величины I_2, I_3 с погрешностью порядка μ на интервале времени τ_2. Из (2.1) и (6.1) получим следующее усредненное уравнение для угла δ_1:

$$\delta_1^{\cdot}=3\alpha_2\cos\delta_1\sin^3\delta_1 \tag{6.2}$$

Его особые точки $\delta_1=0$; π неустойчивы, а $\delta_1=\pi/2$ асимптотически устойчива. Анализ уравнения (6.2) показывает, что точка $\delta_1=\pi/2$ является предельной, т. е. вектор кинетического момента системы с возрастанием времени стремится расположиться в плоскости орбиты, как и в п. 5. Таким образом, при $A<C$ медленная диссипативная эволюция рассматриваемой системы заканчивается ее быстрым вращением вокруг оси мембраны, лежащей в плоскости орбиты.

7. Эволюция движения при $A=C$. При $A=C$ этап быстрой диссипативной эволюции отсутствует. Усредняя уравнения (3.2)–(3.4) по перемен-

[1] См., например, *Сидоренко В. В.* Эволюция быстрых вращений упругого кольца в гравитационном поле: Препринт № 93. М.: Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1987.



Фиг. 2

ным φ_2 и β и переходя при помощи (2.1) от переменных I_1, I_2, I_3 к углам δ_1 и δ_2, будем иметь следующие усредненные уравнения

$$\begin{gathered}
\delta_1^{\cdot} = {}^9/_8 A^{-1}\varepsilon^2\chi b\omega_0^4 \sin\delta_1\cos\delta_1\{\varkappa_0 l^2 \sin^2\delta_2[\sin^2\delta_2(1+3\cos^2\delta_1)+ \\
+12\sin^2\delta_1\cos^2\delta_2]+\varkappa_1[\sin^2\delta_2(1+3\cos^2\delta_1)(1+\cos^2\delta_2)+ \\
+3\sin^2\delta_1(\cos^2\delta_2+\cos^2 2\delta_2)]\} \\
\delta_2^{\cdot} = -{}^9/_8 A^{-1}\varepsilon^2\chi b\omega_0^4 \sin\delta_2\cos\delta_2\{\varkappa_0 l^2[\sin^2\delta_2(3\cos^4\delta_1+2\cos^2\delta_1+3)+ \\
+4\sin^2\delta_1\cos^2\delta_2(1+3\cos^2\delta_1)]+\varkappa_1[\cos^2\delta_2(3\cos^4\delta_1+2\cos^2\delta_1+3)+ \\
+\sin^2\delta_1(1+3\cos^2\delta_1)(1-2\cos 2\delta_2)]\}
\end{gathered} \tag{7.1}$$

аппроксимирующие решения системы (3.2)–(3.4) с погрешностью порядка μ на интервале времени τ_2. Система (7.1) имеет девять особых точек (δ_1, δ_2) вида $(k\pi/2, l\pi/2)$ $(k, l=0, 1, 2)$, причем две из них $(\pi/2, 0)$ и $(\pi/2, \pi)$ асимптотически устойчивы, а остальные неустойчивы. Траектории системы (7.1) изображены на фиг. 2. Предельным является движение, когда система совершает быстрые вращения вокруг оси мембраны, лежащей в плоскости орбиты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стрэтт Дж. В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Т. 1. М.–Л.: Гостехиздат, 1940. 499 с.
2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, Т. 2. М.: Гостехиздат, 1956. 628 с.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
4. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
5. *Холостова О. В.* О движении твердого тела с упруговязкой мембраной в гравитационном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 1. С. 3–13.
6. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 34–42.
7. *Маркеев А. П.* К динамике упругого тела в гравитационном поле // Космич. исследования. 1989. Т. 27. Вып. 2. С. 163–175.

Москва

Поступила в редакцию
3.XII.1990