МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1992

УДК 531.384

© 1992 г. **В. Н. ТХАЙ**

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ОДНОРОДНОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ НА АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

Показано, что при вращении эллипсоида вокруг оси, не совпадающей с осью симметрии, в данной обратимой системе возникает критический случай двух нулевых корней с одной группой решений (при прочих чисто мнимых) и движение неустойчиво.

1. Постановка задачи. Уравнения движения тяжелого однородного эллипсоида на абсолютно шероховатой плоскости имеют вид [1]:

$$x^{\cdot}=yr-zp+\Phi_1,\quad p^{\cdot}=\Delta_p/\Delta$$
$$y^{\cdot}=zp-xr+\Phi_2,\quad q^{\cdot}=\Delta_q/\Delta$$
$$z^{\cdot}=xq-yp+\Phi_3,\quad r^{\cdot}=\Delta_r/\Delta \tag{1.1}$$

$$\Phi_1=\frac{a^2-c^2}{a^2c^2}(x^2-a^2)zq+\frac{b^2-a^2}{b^2a^2}(x^2-a^2)yr+\frac{c^2-b^2}{c^2b^2}xyzp$$

$$\Delta_p=\{BC+m[B(x^2+y^2)+C(x^2+z^2)]+mx^2r_\mu^2\}F_1+$$
$$+mxy(C+mr_\mu^2)F_2+mxz(B+mr_\mu^2)F_3$$

$$F_1=(B-C)qr+m\Phi_1(px+qy+rz)-mp(xx^{\cdot}+yy^{\cdot}+zz^{\cdot})+mg\Delta_*^{-1}a^2(c^2-b^2)yz$$

$$\Delta=ABC+m^2r_\mu^2(Ax^2+By^2+Cz^2)+m[AB(x^2+y^2)+AC(x^2+z^2)+BC(y^2+z^2)]$$

$$\Delta_*=b^4c^4x^2+a^4c^4y^2+b^4a^4z^2,\quad r_\mu^2=x^2+y^2+z^2$$

где a, b, c — полуоси эллипсоида, m — его масса, A, B, C — моменты инерции относительно осей эллипсоида, g — ускорение свободного падения, p, q, r — проекции угловой скорости эллипсоида на оси жестко связанной с телом системы координат с началом в центре масс тела и осями, направленными по осям эллипсоида; x, y, z — суть координаты точки контакта эллипсоида и плоскости. Остальные функции Φ_2, Φ_3, F_2, F_3, Δ_q, Δ_r получаются из приведенных одновременной циклической перестановкой переменных и индексов.

Уравнения (1.1) допускают частное решение

$$x=y=0,\quad p=q=0,\quad z=-c,\quad r=\omega(\mathrm{const}) \tag{1.2}$$

в котором эллипсоид совершает вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z, совпадающей с вертикалью.

Задача об устойчивости этих движений в случае симметричного эллипсоида ($a=b$), вращающегося вокруг оси симметрии, решена в [2, 3]. Для произвольных значений a, b и c получены условия устойчивости линейной системы [1], а также неустойчивости по Ляпунову в случае резонансов низших порядков [4, 5]. Ниже исследуем случай $a=c\neq b$, когда в (1.2) вращение симметричного эллипсоида происходит вокруг оси, не являющейся осью симметрии.

Система (1.1) не меняется при замене M: $t\to -t$, $(x,p)\to(x,p)$, $(y,q)\to(-y,-q)$, $(z,r)\to(z,r)$, иначе является обратимой системой с указанным линейным автоморфизмом M. Уравнения возмущенного движения в окрестности решения (1.2) выводятся из (1.1) заменой z на $z-c$ и r на $r+\omega$. Следовательно, они также имеют автоморфизм M.

Характеристическое уравнение системы линейного приближения

$$x^\cdot=c^2\omega y/b^2+cq,\quad p^\cdot=5(c\omega^2+g)\alpha y/b^2-\alpha\omega q$$
$$y^\cdot=-b^2\omega x/c^2-b^2p/c,\quad q^\cdot=\omega\beta x/c+\beta p$$
$$z^\cdot=0,\quad r^\cdot=0;\quad \alpha=(b^2-c^2)/(b^2+6c^2),\quad \beta=5(b^2-c^2)\omega/7c^2$$

имеет два нулевых корня с одной группой решений и пару чисто мнимых корней $\pm i\omega_*$:

$$\omega_*{}^2=\omega^2-5\frac{g}{c}\frac{c^2-b^2}{b^2+6c^2}$$

если

$$\omega^2>5\frac{g}{c}\frac{c^2-b^2}{b^2+6c^2}\tag{1.3}$$

а переменные z и r исключены с помощью интегралов энергии и геометрического

$$m[(qz-ry)^2+(rx-pz)^2+(py-qx)^2]+Ap^2+Bq^2+Cr^2-2mga^2b^2c^2\Delta_*^{-1/2}=h$$
$$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$$

(h — произвольная постоянная).

Критический случай двух нулевых корней с одной группой решений при отсутствии чисто мнимых корней исследован А. М. Ляпуновым [6] и позднее Г. В. Каменковым [7]. Оказывается, для обратимой системы, к которой и относится система уравнений возмущенного движения для эллипсоида, выводы [6, 7] о неустойчивости остаются в силе.

2. Неустойчивость обратимой системы. Рассмотрим обратимую систему вида

$$\begin{gathered}\mathbf{u}^\cdot=\mathbf{U}(\mathbf{u},\mathbf{v}),\quad \mathbf{v}^\cdot=\mathbf{V}(\mathbf{u},\mathbf{v});\quad \mathbf{u}\in\mathbf{R}^l,\quad \mathbf{v}\in\mathbf{R}^n\\ \mathbf{U}(u,-v)=-\mathbf{U}(\mathbf{u},\mathbf{v}),\quad \mathbf{V}(\mathbf{u},-\mathbf{v})=\mathbf{V}(\mathbf{u},\mathbf{v})\end{gathered}\tag{2.1}$$

с голоморфными правыми частями. Система линейного приближения необходимо имеет вид

$$\mathbf{u}^\cdot=\mathbf{A}_*\mathbf{v},\quad \mathbf{v}^\cdot=\mathbf{B}_*\mathbf{u}\tag{2.2}$$

($\mathbf{A}_*$, $\mathbf{B}_*$ — постоянные матрицы). Пусть $\operatorname{rank}A_*=l_1$, $\operatorname{rank}B_*=n_1$. Тогда система (2.2) приводится к виду

$$\mathbf{u}_1^\cdot=0,\quad \mathbf{u}_2^\cdot=\mathbf{A}_2{}^*\mathbf{v}_2{}^*,\quad \mathbf{v}_1^\cdot=0,\quad \mathbf{v}_2^\cdot=\mathbf{B}_2{}^*\mathbf{u}_2{}^*$$
$$\mathbf{u}_1\in\mathbf{R}^{l-l_1};\quad \mathbf{u}_2,\ \mathbf{v}_2{}^*\in\mathbf{R}^{l_1};\quad \mathbf{v}_1\in\mathbf{R}^{n-n_1};\quad \mathbf{v}_2,\ \mathbf{u}_2{}^*\in\mathbf{R}^{n_1};\quad \mathbf{u}_2{}^*\in\mathbf{R}^l$$

($\mathbf{A}_2{}^*$, $\mathbf{B}_2{}^*$ — постоянные матрицы). Значит, характеристическое уравнение имеет не менее $(n+l)-(n_1+l_1)$ нулевых корней. Если $n_1=l_1$, то всем нулевым корням отвечают простые элементарные делители, в противном случае — элементарные делители непростые. В случае $n_1=l_1=n$ имеем $m=l-n$ нулевых корней и n пар чисто мнимых корней (в случае устойчивости линейной системы); в этом случае система, как правило, формально устойчива [8].

Следующими по степени вырождения являются случаи: а) $l_1=n$, $n_1=n-1$, б) $l_1=n-1$, $n_1=n$, которые и приводят к двум дополнительным нулевым корням с одной группой решений. Эти нулевые корни являются определяющими в смысле свойства устойчивости. Поэтому ниже, для простоты, будем считать, что $m=0$, а все ненулевые корни являются чисто мнимыми и равны $\pm i\omega_s$, $\omega_s>0$.

Рассмотрим сначала случай а). Здесь $\det \mathbf{A}_*\neq 0$ и линейная система (2.2) приводится к виду

$$\mathbf{u}^{\cdot\cdot}=\mathbf{C}_*\mathbf{u}, \quad \mathbf{v}=\mathbf{A}_*^{-1}\mathbf{u}^{\cdot}, \quad \mathbf{C}_*=\mathbf{A}_*\mathbf{B}_* \tag{2.3}$$

Линейное преобразование

$$\xi=\sum_{j=1}^{n}p_{1j}u_j, \quad \eta=\sum_{j=1}^{n}p_{1j}u_j^{\cdot}, \quad \zeta_s=\omega_s\sum_{j=1}^{n}p_{sj}u_j,$$

$$\zeta_s^*=\sum_{j=1}^{n}p_{sj}u_j^{\cdot} \quad (s=2,\ldots,n) \tag{2.4}$$

с действительными постоянными p_{sj} преобразуют систему (2.3) в

$$\xi^{\cdot}=\eta, \quad \eta^{\cdot}=0, \quad \zeta_s^{\cdot}=\omega_s\zeta_s^*, \quad \zeta_s^{*\cdot}=-\omega_s\zeta_s \quad (s=2,\ldots,n) \tag{2.5}$$

Если среди чисел ω_s $(s=2,\ldots,n)$ нет равных между собой, то преобразование (2.4) невырождено и обратное преобразование имеет вид

$$u_s=\sum_{j=1}^{n}\frac{d_{sj}}{\lambda_j}y_j, \quad u_s^{\cdot}=\sum_{j=1}^{n}d_{sj}z_j \quad (s=1,\ldots,n) \tag{2.6}$$

$$\lambda_1=1, \quad \lambda_k=\omega_k, \quad y_1=\xi, \quad y_k=\zeta_k, \quad z_1=\eta, \quad z_k=\zeta_k^* \quad (k=2,\ldots,n)$$

(d_{sj} — действительные постоянные). Нахождение матрицы $P^*=\|p_{sj}\|$ требует решения n систем линейных однородных уравнений

$$\begin{gathered}(c_{11}+\omega_s^2)p_{s1}+c_{21}p_{s2}+\ldots+c_{n1}p_{sn}=0\\ c_{12}p_{s1}+(c_{22}+\omega_s^2)p_{s2}+\ldots+c_{n2}p_{sn}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c_{1n}p_{s1}+c_{2n}p_{s2}+\ldots+(c_{nn}+\omega_s^2)p_{sn}=0 \quad (s=1,\ldots,n)\end{gathered}$$

($\mathbf{C}_*=\|c_{ij}\|$, $\omega_1=0$) с определителями, совпадающими с характеристическим многочленом и равными нулю.

В результате линейного преобразования (2.6) исходная система (2.1) приобретает вид

$$\begin{gathered}\xi^{\cdot}=\eta, \quad \eta^{\cdot}=\Phi(\xi,\eta,\zeta,\zeta^*), \quad \zeta_s^{\cdot}=\omega_s\zeta_s^*+\Psi_s(\xi,\eta,\zeta,\zeta^*)\\ \zeta_s^{*\cdot}=-\omega_s\zeta_s+\Psi_s^*(\xi,\eta,\zeta,\zeta^*) \quad (s=2,\ldots,n)\end{gathered} \tag{2.7}$$

Система (2.7) имеет линейный автоморфизм M_1: $t\to -t$, $\xi\to\xi$, $\eta\to-\eta$, $\zeta\to\zeta$, $\zeta^*\to-\zeta^*$, в который перешел линейный автоморфизм M системы (2.1). Наличие автоморфизма M_1 позволяет немедленно вывести условия на нелинейные члены уравнений в (2.7), а именно

$$\Psi_s(\xi,0,\zeta,0)\equiv 0 \quad (s=2,\ldots,n)$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right|_*=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_j^*}\right|_*=\left.\frac{\partial\Psi_s^*}{\partial\eta}\right|_*=\left.\frac{\partial\Psi_s^*}{\partial\zeta_j^*}\right|_*\equiv 0 \quad (s,j=2,\ldots,n) \tag{2.8}$$

где звездочка означает, что производные вычислены при $\eta=0$, $\zeta=\zeta^*=0$.

В случае б) линейное преобразование

$$\xi=\sum_{j=1}^{n}p_{1j}v_j, \quad \eta=\sum_{j=1}^{n}p_{1j}v_j^{\cdot}, \quad \zeta_s=\omega_s\sum_{j=1}^{n}p_{sj}v_j,$$

$$\zeta_s^* = \sum_{j=1}^{n} p_{sj} v_j^* \qquad (s=2,\ldots,n)$$

приводит систему (2.1) также к виду (2.7). Однако, в этом случае автоморфизм M_2: $t\to -t$, $\xi\to-\xi$, $\eta\to\eta$, $\zeta\to-\zeta$, $\zeta^*\to\zeta^*$ дает иные, чем (2.8), условия на правые части в (2.7).

В обеих случаях а) и б) система (2.7) посредством трех последовательных нелинейных преобразований, сохраняющих автоморфизм M_1 или M_2 и опущенных здесь из-за громоздкости, приводится к виду

$$\xi^{\cdot} = \eta + \sum_{j=2}^{n} [\zeta_j f_j^0(\xi) + \zeta_j^* \varphi_j^0(\xi)]$$

$$\eta^{\cdot} = \Phi_0(\xi) + \eta\Phi_1(\xi) + \sum_{j,k=1}^{2n-1} \Phi_{jk}(\xi,\eta,\zeta,\zeta^*) w_j w_k \tag{2.9}$$

$$\zeta_s^{\cdot} = [\omega_s + \mu_s(\xi)]\zeta_s^* + \varepsilon_s(\xi)\zeta_s + \Psi_{s0}(\xi) + \sum_{j,k=1}^{2n-1} \Psi_{sjk}(\xi,\eta,\zeta,\zeta^*) w_j w_k$$

$$\zeta_s^{*\cdot} = -[\omega_s + \nu_s(\xi)]\zeta_s + \varkappa_s(\xi)\zeta_s^* + \Psi_{s0}^*(\xi) + \sum_{j,k=1}^{2n-1} \Psi_{sjk}^*(\xi,\eta,\zeta,\zeta^*) w_j w_k$$

$$(s=2,\ldots,n)$$

где через w обозначены переменные η, ζ, ζ^*, все функции являются голоморфными от указанных аргументов, а

$$\mu_s(0) = \varepsilon_s(0) = \nu_s(0) = \varkappa_s(0) = f_s^0(0) = \varphi_s^0(0) = 0$$
$$\Psi_{s0}(\xi) = \varphi_s(\xi)\Phi_0(\xi), \quad \Psi_{s0}^*(\xi) = \theta_s(\xi)\Phi_0(\xi);$$
$$\varphi_s(0) = \theta_s(0) = 0 \quad (s=2,\ldots,n)$$

Кроме того, в силу сохранения автоморфизмов, в случае а)

$$f_s^0(\xi) \equiv 0, \quad \Phi_1(\xi) \equiv 0, \quad \varepsilon_s(\xi) = \varkappa_s(\xi) \equiv 0 \quad (s=2,\ldots,n)$$

а в случае б):

$$\Phi_0(-\xi) = -\Phi_0(\xi), \quad \Phi_1(-\xi) = -\Phi_1(\xi), \quad \varepsilon_s(-\xi) = \varepsilon_s(\xi)$$
$$\varkappa_s(-\xi) = -\varkappa_s(\xi), \quad \mu_s(-\xi) = \mu_s(\xi), \quad \nu_s(-\xi) = \nu_s(\xi)$$

Пусть $\Phi_0(\xi) = a_0\xi^p + \ldots$, $\Phi_1(\xi) = b_0\xi^k + \ldots$ (a_0, b_0 — const). Тогда функция

$$V = \xi\left\{ (1+\alpha^*\xi)\left[\eta - \int_0^\xi \Phi_1(\xi)\,d\xi\right]^2 - \right.$$
$$\left. -\beta^* \sum_{s=2}^{n} [(\omega_s + \nu_s(\xi))\zeta_s^2 + (\omega_s + \mu_s(\xi))\zeta_s^{*2}] \right\}$$

при надлежащем выборе положительных постоянных α^* и β^* является функцией Четаева для системы (2.9) в следующих случаях: 1) p — четное; $\varepsilon_s(\xi)$, $\varkappa_s(\xi)=0(\xi^{p-1})$, 2) p — нечетное, $a_0>0$, $\varepsilon_s(\xi)$, $\varkappa_s(\xi)=0(\xi^{p-1})$, 3) $\Phi_0(\xi)\equiv 0$, k — нечетное; $\varepsilon_s(\xi)$, $\varkappa_s(\xi)=0(\xi^k)$, 4) $\Phi_0(\xi)\equiv 0$, k — четное, $b_0>0$; $\varepsilon_s(\xi)$, $\varkappa_s(\xi)=0(\xi^k)$, 5) $\Phi_0(\xi)=\Phi_1(\xi)\equiv 0$, $\varepsilon_s(\xi)=\varkappa_s(\xi)\equiv 0$ $(s=2,\ldots,n)$.

Для каждого из случаев а) и б) нелинейные преобразования дают алгоритм нахождения функций $\Phi_0(\xi)$, $\Phi_1(\xi)$, $\varepsilon_s(\xi)$, $\varkappa_s(\xi)$. Так, в случае а): $\Phi_0(\xi)=\Phi(\xi, 0, \mathbf{f}(\xi), 0)$, где функции $\mathbf{f}(\xi)$ определяются из системы

$$\omega_s f_s(\xi)=\Psi_s^*(\xi, 0, \mathbf{f}(\xi), 0) \quad (s=2,\ldots,n) \tag{2.10}$$

3. Устойчивость перманентных вращений. В соответствии с обозначениями в (2.2), в данной задаче имеем

$$\mathbf{A}_* = \begin{Vmatrix} c^2\omega/b^2 & c \\ 5(c\omega^2+g)\alpha/b^2 & -\alpha\omega \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{B}_* = \begin{Vmatrix} -b^2\omega/c^2 & -b^2/c \\ \omega\beta/c & \beta \end{Vmatrix}, \mathbf{u}=\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix} y \\ q \end{pmatrix}$$

Ясно, что $\operatorname{rank}\mathbf{A}_*=2$, $\operatorname{rank}\mathbf{B}_*=1$ и имеем случай а).

Найдем матрицу $\mathbf{P}^*$ линейного преобразования (2.5), для чего положим

$$\begin{gathered} \xi=p_{11}x+p_{12}p, \quad \eta=p_{11}x^{\cdot}+p_{12}p^{\cdot} \\ \zeta=\omega_*(p_{21}x+p_{22}p), \quad \zeta^*=p_{21}x^{\cdot}+p_{22}p^{\cdot} \end{gathered} \tag{3.1}$$

Так как в системе (2.3):

$$C_* = \begin{Vmatrix} (\beta-\omega)\,\omega & (\beta-\omega)\,c \\ -\omega\gamma/c & -\gamma \end{Vmatrix}, \quad \gamma=\beta\omega+5g\alpha/c^2$$

то подстановка (3.1) в (2.5) дает

$$p_{11}(\beta-\omega)c=p_{12}\gamma, \quad p_{21}(\beta-\omega)c=p_{22}(\beta-\omega)\omega$$

Откуда

$$\begin{gathered} p_{11}=\gamma, \quad p_{12}=(\beta-\omega)c, \quad p_{21}=\omega, \quad p_{22}=c \\ x=[\omega_*\xi-(\beta-\omega)\zeta]/\omega_*^3, \quad p=(\gamma\zeta-\omega\omega_*\xi)/(\omega_*^3c) \end{gathered} \tag{3.2}$$

Далее

$$\begin{gathered} \eta^{\cdot}=(p_{11}b^{-2}c^2\omega+5p_{12}b^{-2}(c\omega^2+g)\alpha)y^{\cdot}+(p_{11}c-p_{12}\omega\alpha)q^{\cdot} \\ \zeta^{*\cdot}=(p_{21}b^{-2}c^2\omega+5p_{22}b^{-2}(c\omega^2+g)\alpha)y^{\cdot}+(p_{21}c-p_{22}\omega\alpha)q^{\cdot} \end{gathered}$$

и уравнения возмущенного движения в новых переменных имеют вид

$$\begin{gathered} \xi^{\cdot}=\eta \\ \eta^{\cdot}=\frac{c^2}{b^2}[\omega_*^2\beta+5\omega^2(\beta-\omega)]Y+c\left[\omega_*^2+\frac{7c^2}{b^2+6c^2}\omega(\beta-\omega)\right]Q \\ \zeta^{\cdot}=\omega_*\zeta^*+\omega_*(\omega X+cP) \\ \zeta^{*\cdot}=-\omega_*\zeta+\frac{c^2}{b^2}(\omega_*^2+5\omega^2\alpha)Y+\frac{7c^2\omega}{b^2+6c^2}Q \end{gathered} \tag{3.3}$$

где через X, P, Y, Q обозначены нелинейные члены в уравнениях для x, p, y, q соответственно.

Ограничимся рассмотрением изоэнергетических движений, для которых постоянная интеграла энергии равна значению в невозмущенном движении. Тогда в возмущенном движении

$$\begin{gathered} 2C\omega r+m[(cq+\omega y)^2+(cp+\omega x)^2]+Ap^2+Bq^2-mgcb^{-4}(b^2-c^2)p^2+\ldots=0 \\ z={}^1/_2c(x^2/a^2+y^2/b^2)+\ldots; \quad A=C={}^1/_5m(b^2+c^2), \quad B={}^2/_5mc^2 \end{gathered} \tag{3.4}$$

Подстановка z и r, определенных из этих соотношений, в функции X, P, Y, Q показывает, что эти функции начинаются с членов не ниже третьего порядка. Следовательно, порядок функции Ψ^* в (2.9) также не ниже третьего, как и функции $f(\xi)$.

Из преобразований (3.1) и системы (3.3) видно, что переменные y и q не зависят от ξ, а нелинейные члены уравнений для η и ζ^* определяются функциями Y и Q. Поэтому для вычисления функции $\Phi_0(\xi)$ достаточно выбрать члены, зависящие только от x и p и положить в них, согласно (3.2):

$$x=\xi/\omega_*^2, \quad p=-\omega\xi/(\omega_*^2 c) \tag{3.5}$$

Соответствующие члены в Y и Q имеют вид

$$Y=-b^2c^{-2}rx+b^2c^{-3}x^2p/2+\ldots$$
$$Q=\beta(\omega^{-1}pr+2c^{-1}xr-\omega c^{-3}x^3/2-2c^{-2}x^2p)+\ldots \tag{3.6}$$

где, согласно (3.4):

$$r=-\frac{5}{2\omega(b^2+c^2)}(\omega x+cp)^2-\frac{p^2}{2\omega}+\ldots \tag{3.7}$$

После подстановки этого выражения и (3.5) в (3.6) получим $Y=$ $=0\cdot\xi^3+\ldots$, $Q=\omega\beta\xi^2/(c^3\omega_*^6)+\ldots$.

Порядок искомой функции $f(\xi)$ в (2.10) не ниже третьего, значит, форма третьего порядка в $\Phi_0(\xi)$ определяется только правой частью уравнения для η и

$$\Phi_0(\xi)=a_0\xi^3+\ldots, \qquad a_0=\frac{25(b^2-c^2)^2\omega^2}{7c^4\omega_*^6}\left[\frac{\omega_2}{7c^2}+\frac{5g}{c(b^2+6c^2)}\right]$$

При $b\neq c$ и $\omega\neq 0$ имеем $a_0>0$ и из п. 2 следует неустойчивость рассматриваемых движений. Суммируя этот вывод с неустойчивостью по первому приближению при $\omega^2<5g(c^2-b^2)c^{-1}/(b^2+6c^2)$ получим следующее утверждение.

Теорема. Перманентные вращения тяжелого однородного эллипсоида вращения на абсолютно шероховатой плоскости вокруг оси эллипсоида, не являющейся осью симметрии, неустойчивы в случаях, когда эллипсоид не вырождается в шар, а угловая скорость $\omega\neq 0$, $(5g(c^2-b^2)c^{-1}/(b^2+$ $+6c^2))^{1/2}$.

Замечание. При вращении вокруг наименьшей оси $(c<b)$ условие (1.3) выполнено и вращение с ненулевой угловой скоростью всегда неустойчиво. При $c>b$ неустойчивость равновесия $(\omega=0)$ следует из анализа линейной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркеев А. П.* К геометрической интерпретации Пуансо движения твердого тела в случае Эйлера // Проблемы механики управляемого движения. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1982. С. 123–131.
2. *Миндлин И. П., Пожарицкий Г. К.* Об устойчивости стационарных движений тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 742–745.
3. *Карапетян А. В.* Об устойчивости стационарных движений систем некоторого вида // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 2. С. 45–52.
4. *Поликша В. В.* Исследование устойчивости стационарного вращения эллипсоида на шероховатой плоскости в случае внутреннего резонанса второго порядка // Аналитические и численные методы исследования механических систем. М.: МАИ, 1989. С. 20–23.
5. *Поликша В. В.* Об устойчивости вращения эллипсоида на шероховатой плоскости в нелинейной постановке // Устойчивость и колебания нелинейных систем. М.: МАИ, 1987. С. 18–21.
6. *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Мат. сб., 1893. Т. 17. № 2. С. 253–333.
7. *Каменков Г. В.* Устойчивость и колебания нелинейных систем. Избр. тр. Т. 2. М.: Наука, 1972. 214 с.
8. *Тхай В. Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.

Москва

Поступила в редакцию 14.XI.1990