МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1992

УДК 531.386

 О. П. ФИЛАТОВ

О ДВИЖЕНИИ ГИРОСКОПА В НЕКОНТАКТНОМ ПОДВЕСЕ ПРИ МНОГОЗНАЧНОМ ВОЗМУЩЕНИИ ОСНОВАНИЯ

Рассматривается известная модель движения твердого тела в неконтактном подвесе, детально описанная в [1, § 12, 16], где можно найти определение всех величин, используемых ниже безоговорочно. В отличие от указанной работы, где исследовался случай гармонического движения основания, здесь рассматривается ситуация, когда фаза гармоники «плывет», причем известна лишь ее оценка скорости изменения. Показано, что в этом случае можно построить дифференциальные включения ε – аппроксимирующие данную систему соответственно сверху и снизу по медленным переменным на асимптотически большом промежутке времени $T(\mu)=[0,1/\mu]$, где μ – малый параметр задачи. В частности, если основание гироскопа движется гармонически, то указанные включения совпадают с системой дифференциальных уравнений, полученных в [1] методом усреднения.

1. Постановка задачи. Предполагается [1], что основание гироскопа движется поступательно вдоль неизменно ориентированной оси. В проекциях на оси ξ_1, ξ_2, ξ_3, жестко связанных с основанием, сила инерции, действующая на ротор гироскопа, задается равенствами

$$p_{\xi_1}=0, \qquad p_{\xi_2}=0, \qquad p_{\xi_3}=p\cos\gamma \tag{1.1}$$

где p – постоянная, $p>0$, а функция γ удовлетворяет дифференциальному включению

$$\gamma^{\cdot}\in[\omega_1, \omega_2], \qquad \gamma(0)=\gamma_0 \tag{1.2}$$

где ω_1, ω_2 – постоянные, $0<\omega_1<\omega_2$. Заметим, что функцию $\gamma(t)$ можно рассматривать как реализацию «управления, которое через ускорение (1.1) воздействует на ротор гироскопа».

В системе координат ζ_1, ζ_2, ζ_3, связанной с вектором кинетического момента, уравнения движения центра масс ротора гироскопа имеют вид [1, с. 143]:

$$\begin{gathered}
r_{\zeta_1}^{\cdot\cdot}=f_{\zeta_1}-p\sin\delta\cos\gamma, \qquad r_{\zeta_2}^{\cdot\cdot}=f_{\zeta_2} \\
r_{\zeta_3}^{\cdot\cdot}=f_{\zeta_3}+p\cos\delta\cos\gamma, \qquad f_{\zeta_j}=-q(D)(r_{\zeta_j}+e_{\zeta_j}) \qquad (j=1,2,3) \\
e_{\zeta_1}={}^1/_2\sin\chi[(1+\cos\theta)\cos(\varphi+\psi)+(1-\cos\theta)\cos(\psi-\varphi)]+ \\
+\cos\chi\sin\psi\sin\theta \\
e_{\zeta_2}={}^1/_2\sin\chi[(1+\cos\theta)\sin(\varphi+\psi)+(1-\cos\theta)\sin(\psi-\varphi)]- \\
-\cos\chi\cos\psi\sin\theta \\
e_{\zeta_3}=\sin\chi\sin\theta\sin\varphi+\cos\chi\cos\theta
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Далее рассматривается случай передаточной функции $q(D)=q_0(1+\tau_0 D)$, $D=d/dt$, где q_0 и τ_0 – положительные постоянные. К уравнениям (1.3) добавляются уравнения углового движения ротора

$$\begin{gathered}
\delta^{\cdot}=\mu m_{\zeta_1}/l, \qquad l^{\cdot}=\mu m_{\zeta_3} \\
\theta^{\cdot}=\mu(m_{\zeta_2}\cos\psi-m_{\zeta_1}\sin\psi)/l
\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
\sigma^{\cdot}=\mu m_{\zeta_2}/(l\sin\delta), \qquad \psi^{\cdot}=l-\mu m_{\zeta_2}\operatorname{ctg}\delta/l \\
\varphi^{\cdot}=-\nu+\mu(m_{\zeta_1}\cos\psi+m_{\zeta_2}\sin\psi)/(l\sin\theta) \\
\nu=l\varkappa\cos\theta/(1+\varkappa), \qquad m_{\zeta_1}=e_{\zeta_2}f_{\zeta_3}-e_{\zeta_3}f_{\zeta_2}
\end{gathered} \tag{1.4}
$$

m_{ζ_2} и m_{ζ_3} получаются циклической перестановкой индексов 1, 2, 3, $\varkappa$ — постоянная.

Решение порождающей системы ($\mu=0$) имеет вид $\psi=lt+\psi_0$, $\varphi=-\nu t+\psi_0$, $f_{\zeta_j}=f_{\zeta_j}^0+f_{\zeta_j}^1+f_{\zeta_j}^2$, $\gamma=\gamma(t)$ $(j=1,\ 2,\ 3)$. Здесь $f_{\zeta_j}{}^0$ — экспоненциально затухающие члены, $f_{\zeta_j}{}^1$ — члены не зависящие от решений включения (1.2) (исключая $f_{\zeta_j}{}^0$, которые не зависят от γ также) [1, с. 172]. Наконец

$$
f_{\zeta_1}{}^2=-(q_0p\sin\delta/\beta)I_\gamma, \qquad f_{\zeta_2}{}^2=0, \qquad f_{\zeta_3}{}^2=(q_0p\cos\delta/\beta)I_\gamma
$$

$$
I_\gamma=\exp(-\alpha t)\int_0^t\exp(\alpha\tau)\sin[\beta(t-\tau)+\gamma_1]\cos\gamma(\tau)\,d\tau
$$

Указанное решение линейной системы получено при условии $4q_0-(q_0\tau_0)^2>0$ определяющем колебательный характер установившегося движения ротора при $\mu=0$. В этом случае $\alpha=q_0\tau_0/2$, $\beta=[4q_0-(q_0\tau_0)^2]^{1/2}/2$, постоянная γ_1 зависит от α и β: $\cos\gamma_1=(\alpha^2-\beta^2)/(\alpha^2+\beta^2)$, $\sin\gamma_1=-2\alpha\beta/(\alpha^2+\beta^2)$. Правые части уравнений (1.3), (1.4) по переменным $x=(\delta, l, \theta)$ будем рассматривать в области $D_3=\{x\in R^3\colon\ |\sin\delta|>\rho_1,\ |\sin\theta|>\rho_2,\ l>\rho_3\}$, где постоянные ρ_1, ρ_2, $\rho_3>0$.

Таким образом исходная система (1.2)—(1.4) может быть записана в виде

$$
\begin{aligned}
&z^{\cdot}=\mu F(x,\ y,\ \gamma), && z(0)=z_0 \\
&y^{\cdot}=G(x,\ y,\ \mu), && y(0)=y_0 \\
&\gamma^{\cdot}\in[\omega_1,\ \omega_2], && \gamma(0)=\gamma_0
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

где $z=(x,\ \sigma)$ — медленные переменные, все остальные $y=(r_{\zeta_1}, r_{\zeta_2}, r_{\zeta_3}, r_{\zeta_1}^{\cdot}, r_{\zeta_2}^{\cdot}, r_{\zeta_3}^{\cdot}, \psi, \varphi)$, а также γ — быстрые.

Системе (1.5) сопоставим два дифференциальных включения

$$
z^{\cdot}\in\mu F_1(x), \qquad z(0)=z_0 \tag{1.6}
$$

$$
z^{\cdot}\in\mu F_2(x), \qquad z(0)=z_0 \tag{1.7}
$$

где $F_j(x)$, $j=1,\ 2$,— непустое выпуклое множество из пространства переменных z, R^4. Под решением дифференциального включения будем понимать абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую включению почти всюду по t в некотором промежутке.

Будем говорить, что включение (1.6) ε-аппроксимирует систему (1.5) снизу, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\mu_0>0$ такое, что для любого μ, $0<\mu\leqslant\mu_0$, и произвольного решения включения (1.6) найдется решение системы (1.5) z, y, γ, для которого $\|z_1(t)-z(t)\|<\varepsilon$ при любом $t\in T(\mu)$. Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Аналогично включение (1.7) ε-аппроксимирует систему (1.5) сверху, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\mu_0>0$ такое, что для любого μ, $0<\mu\leqslant\mu_0$, и произвольного решения системы (1.5) найдется решение задачи (1.7) z_2 для которого выполняется неравенство $\|z(t)-z_2(t)\|<\varepsilon$ в промежутке $T(\mu)$.

2. Усреднение опорных функций. Для получения правых частей ε-аппроксимирующих включений опорную функцию множества $F=F(x,\ y,\ \gamma)$ (в данном случае сводящегося к точке) на решениях порождающей системы представим в виде

$$c(F;\eta)=\sum_{j=1}^{4}F^j\eta^j=c_0(x,y,\eta)+c_1(x,y,\eta)+c_2(x,y,\gamma,\eta) \qquad (2.1)$$

$$\eta=(\eta^1,\eta^2,\ldots,\eta^4),\qquad F=(F^1,F^2,\ldots,F^4),\qquad m_{\zeta_1}{}^j=e_{\zeta_2}f_{\zeta_3}{}^j-e_{\zeta_3}f_{\zeta_2}{}^j$$

$$c_j=\eta^1 m_{\zeta_1}{}^j/l+\eta^2 m_{\zeta_2}{}^j/(l\sin\delta)+\eta^3 m_{\zeta_3}{}^j+$$
$$+\eta^4(m_{\zeta_2}{}^j\cos\psi-m_{\zeta_1}{}^j\sin\psi)/l\qquad (j=0,1,2)$$

Выражения $m_{\zeta_2}{}^j$ и $m_{\zeta_3}{}^j$ получаются циклической перестановкой индексов 1, 2, 3 из $m_{\zeta_1}{}^j$. Далее будем предполагать, что параметр $\varkappa$ в системе (1.5), равный I_3/I_1-1, где I_1, I_3 — моменты инерции ротора гироскопа относительно соответствующих главных осей инерции тела (ось x_3 направлена по оси динамической симметрии) удовлетворяет неравенству $\varkappa>0$. В таком случае отсутствуют внутренние резонансы частот и существует предел

$$\lim_{\Delta\to\infty}\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta c_1(x,\bar y(t),\eta)\,dt=c_1{}^\circ(x,\eta)$$

вдоль решения порождающей системы. Поскольку

$$\lim_{\Delta\to\infty}\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta c_0(x,\bar y(t),\eta)\,dt=0$$

то из (2.1) следует

$$\overline{\lim_{\Delta\to\infty}}\sup_{\gamma}\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta c(F;\eta)\,dt=c_1{}^\circ(x,\eta)+$$

$$+\overline{\lim_{\Delta\to\infty}}\sup_{\gamma}\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta c_2(x,\bar y(t),\gamma(t),\eta)\,dt \qquad (2.2)$$

Опорная функция $c_1{}^\circ(x,\eta)$ определяет однозначное отображение f_0: $D_3\to R^4$, $x\to f_0(x)$, которое в случае $\varkappa>0$ может быть получено из системы [(16.6), 1, с. 173] усреднением правых частей уравнений по переменной α. Именно

$$f_0{}^1(x)=f_0{}^4(x)=0,\qquad f_0{}^2(x)=-[(1-\cos\theta)^2\operatorname{Im}w(il+i\nu)+$$
$$+(1+\cos\theta)^2\operatorname{Im}w(il-i\nu)]\sin^2\chi/4-\sin^2\theta\operatorname{Im}w(il)\cos^2\chi$$
$$f_0{}^3(x)=\{\sin^2\chi[(1+\cos\theta)\operatorname{Im}w(il-i\nu)+(1-\cos\theta)\operatorname{Im}w(il+i\nu)+$$
$$+2\operatorname{Im}w(i\nu)]/2+2\cos\theta\operatorname{Im}w(il)\cos^2\chi\}\sin\theta/(2l)$$

Для оценки второго слагаемого в (2.2) потребуются некоторые результаты, которые приводятся без доказательства ниже.

3. Леммы. *Лемма 3.1.* Пусть $k=\omega_2/\omega_1$. Тогда равномерно по

$$\gamma_0\in R\qquad J(k)\equiv\overline{\lim_{\Delta\to\infty}}\sup_{\gamma}\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta\sin\gamma(t)\,dt=2(k-1)/[\pi(k+1)]Q(k)$$

где $Q(k)$ — монотонно возрастающая функция, $1\leqslant Q(k)<\pi/2$, $Q(1)=1$, $Q(k)\to\pi/2$ $(k\to\infty)$.

Лемма 3.2. Для любых $\omega \in R$ и $\chi \in R$:

$$\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta \sin(\omega t+\chi) I_\gamma(t)\,dt = g(\omega)\frac{2}{\Delta}\int_0^\Delta \sin(\omega t+\chi+\gamma_2)\cos\gamma(t)\,dt + O(1/\Delta)$$

$$g(\omega)=1/(a^2+b^2)^{1/2}, \qquad a=a^-\cos y^- - a^+\cos y^+$$
$$b=a^-\sin y^- + a^+\sin y^+, \qquad a^\pm = 1/[\alpha^2+(\beta\pm\omega)^2]^{1/2}$$
$$y^+=\gamma_1+\chi_0^+, \qquad y^-=\gamma_1+\chi_0^-, \qquad \cos\chi_0^\pm=\alpha/[\alpha^2+(\beta\pm\omega)^2]^{1/2}$$
$$\sin\chi_0^\pm=(\beta\pm\omega)/[\alpha^2+(\beta\pm\omega)^2]^{1/2}, \qquad \sin\gamma_2=a/(4g(\omega))$$
$$\cos\gamma_2=b/(4g(\omega))$$

постоянная γ_1 определена выше.

Лемма 3.3. Функцию c_2 из (2.1) можно представить в виде

$$c_2(x,y,\gamma,\eta)=(q_0p/\beta)I_\gamma\sum_{j=1}^{5}a_j^{1/2}(x,\eta)\sin\alpha_j$$

$$\alpha_j=\beta_j t+\chi_j, \qquad j=1,2,\ldots,5, \qquad \beta_1=l-\nu, \qquad \beta_2=l+\nu$$
$$\beta_3=l, \qquad \beta_4=-\nu, \qquad \beta_5=0$$

фазы $\chi_1,\ldots,\chi_4$ зависят от x, η, φ_0, ψ_0, $\chi_5=-\pi/2$, а неотрицательные квадратичные формы $a_j(x,\eta)$ относительно аргумента $\eta\in R^4$ определяются соответствующими симметричными матрицами $A_m=(a_{ij})$, $i,j=1,2,\ldots,4$, $m=1,2,\ldots,5$. Элементы матрицы A_1:

$$a_{11}=[\sin\chi(1+\cos\theta)\cos\delta/(2l)]^2$$
$$a_{12}=[\sin\chi(1+\cos\theta)/2]^2\sin2\delta/(2l)$$
$$a_{13}=-\sin^2\chi(1+\cos\theta)\sin\theta\sin2\delta/(8l^2)$$
$$a_{14}=a_{24}=a_{34}=0, \qquad a_{22}=[\sin\chi(1+\cos\theta)\sin\delta/2]^2$$
$$a_{23}=-\sin^2\chi(1+\cos\theta)\sin\theta\sin^2\delta/(4l)$$
$$a_{33}=[\sin\delta\sin\chi\sin\theta/(2l)]^2, \qquad a_{44}=[\operatorname{ctg}\delta\sin\chi(1+\cos\theta)/(2l)]^2$$

Элементы матрицы A_2 получаются из соответствующих элементов матрицы A_1 заменой $\cos\theta$ на $(-\cos\theta)$, $\sin\theta$ на $(-\sin\theta)$, а элементы матрицы A_3 заменой $\sin\theta$ на $(2\cos\theta)$, $(1+\cos\theta)$ на $(-2\sin\theta)$ и $\sin\chi$ на $\cos\chi$. Все элементы матрицы A_4 равны нулю, кроме $a_{44}=(\sin\chi\sin\theta/l)^2$, $a_{33}=(\cos\delta\sin\chi/l)^2$.

Матрица A_5 имеет единственный отличный от нуля элемент $a_{44}=(\cos\chi\cos\theta/l)^2$.

Пусть $D_3^1=\{x\in R^3\colon\ |\sin\delta|>\rho,\ l_1<l<l_2,\ \rho<|\sin\theta|<1-\rho\}$, где l_1, $\rho>0$. Кроме того

$$\omega_1>l_2(1+2\varkappa)/(1+\varkappa) \tag{3.1}$$

Используя леммы 3.1—3.3 можно доказать следующее утверждение.

Лемма 3.4. Пусть параметр $\varkappa$ системы (1.5) удовлетворяет неравенствам $0<\varkappa<1$ и выполняется условие (3.1). Тогда в области D_3^1:

$$\Phi_1(x,\eta)\leqslant\overline{\lim_{\Delta\to\infty}}\sup_\gamma\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta c_2(x,\bar{y}(t),\gamma(t),\eta)\,dt\leqslant\Phi_2(x,\eta)$$

$$\Phi_1(x,\eta)=\max_{1\leqslant j\leqslant5}\{\Phi_{1,j}(x,\eta)\}, \qquad \Phi_2(x,\eta)=\sum_{j=1}^{5}\Phi_{2,j}(x,\eta)$$

$$\Phi_{1,j}=sd_{1,j}a_j^{1/2}(x,\ \eta),\qquad \Phi_{2,j}=sd_{2,j}a_j^{1/2}(x,\ \eta)\qquad (j=1,\ 2,\dots,\ 5)$$

$$d_{1,j}=g(\beta_j)\max\left\{\frac{Q(k_{2j-1})}{(\omega_1^{2j-1}+\omega_2^{2j-1})},\ \frac{Q(k_{2j})}{(\omega_1^{2j}+\omega_2^{2j})}\right\}\qquad (j=1,2,\dots,4)$$

$$d_{1,5}=\frac{\beta Q(\omega_2/\omega_1)}{(\alpha^2+\beta^2)(\omega_1+\omega_2)},\qquad s=\frac{2q_0p(\omega_2-\omega_1)}{\pi\beta}$$

$$d_{2,j}=g(\beta_j)\left[\frac{Q(k_{2j-1})}{(\omega_1^{2j-1}+\omega_2^{2j-1})}+\frac{Q(k_{2j})}{(\omega_1^{2j}+\omega_2^{2j})}\right]\qquad (j=1,2,\dots,4)$$

$$d_{2,5}=d_{1,5};\qquad \omega_1^1=\omega_1+\beta_1,\qquad \omega_1^2=\omega_1-\beta_1,\qquad \omega_1^3=\omega_1+\beta_2$$
$$\omega_1^4=\omega_1-\beta_2,\qquad \omega_1^5=\omega_1+\beta_3,\qquad \omega_1^6=\omega_1-\beta_3,\qquad \omega_1^7=\omega_1+\beta_4$$
$$\omega_1^8=\omega_1-\beta_4;\qquad \omega_2^j=\omega_1^j-\omega_1+\omega_2\qquad (j=1,\ 2,\dots,\ 8)$$

4. Основные утверждения. Функции Φ_1 и Φ_2 из леммы 3.4, рассматриваемые как опорные функции при фиксированном x, однозначно определяют выпуклые множества $H_1(x)$ и $H_2(x)$ соответственно. Положим $F_1(x)=f_0(x)+H_1(x)$, $F_2(x)=f_0(x)+H_2(x)$. Используя лемму 3.4, можно доказать основное утверждение.

Теорема 4.1. Пусть параметр $\varkappa$ удовлетворяет неравенствам $0<\varkappa<1$ и выполняется условие (3.1). Тогда включения (1.6) и (1.7) ε-аппроксимируют соответственно снизу и сверху систему (1.5).

Покажем теперь, что множества скоростей $F_1(x)$ и $F_2(x)$, $F_1(x)\subset F_2(x)$, принадлежат некоторой гиперплоскости пространства медленных переменных R^4, зависящей от точки x.

Лемма 4.1. Пусть $R^3(x)$ — ортогональное дополнение к вектору $e(x)=(l\sin\delta,\ -\cos\delta,\ 0,\ 0)$ в пространстве R^4. Тогда для любого x имеем $H_2(x)\subset R^3(x)$.

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\Phi_2(x, e(x))\equiv\Phi_2(x,\ -e(x))\equiv 0$. По определению опорной функции это означает, что множество $H_2(x)$ лежит в подпространстве $R^3(x)$. Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что гиперплоскость $f_0(x)+R^3(x)$ действительно содержит множество $F_2(x)$. Из свойств опорных функций следует, что множество $H_2(x)$ является алгебраической суммой множеств $H_{2,1}(x),\dots,\ H_{2,5}(x)$, определяемых соответственно опорными функциями $\Phi_{2,1}(x),\dots,\ \Phi_{2,5}(x)$. Нетрудно показать, что каждое из указанных множеств представляет из себя либо эллипс либо отрезок. Однако для быстрой оценки множества $H_2(x)$ можно воспользоваться следующей леммой.

Лемма 4.2. Минимальный по размерам параллелепипед

$$P_2(x)=\{f\in R^3(x) : |f^i|\leqslant b_i(x),\ i=1,\ 2,\ 3\}$$

содержащий множество $H_2(x)$, определяется равенствами

$$b_i(x)=s\sum_{j=1}^{5}d_{2,j}(a_{ii}^j)^{1/2}\qquad (i=1,2,3)$$

где a_{ii}^j $(j=1,2,\dots,5,$ — диагональные элементы матрицы A_j сужения квадратичной формы на подпространство $R^3(x)$ в базисе $h_1=(1/\|e(x)\|)\times(\cos\delta, l\sin\delta, 0, 0)$, $h_2=(0,0,1,0)$, $h_3=(0,0,0,1)$, а f^1, f^2, f^3 — координаты вектора $f\in R^3(x)$ в этом базисе.

Доказательство следует из определения опорной функции и равенств $b_i(x)=\Phi_2(x, h_i)=\Phi_2(x,\ -h_i)$.

5. Некоторые качественные выводы. *Теорема 5.1. В области* D_3^1 включение (1.7) не имеет стационарного по части переменных δ и l (δ, l, μ) — слабо устойчивого по Ляпунову решения (даже в промежутке $T(\mu)$).

Доказательство. Воспользуемся леммой 4.1. Поскольку $F_2(x) \subset R^3(x)$, то вдоль любого решения включения (1.7) имеет место равенство $\langle z^{\cdot}, e(x)\rangle = \mu\langle f_0(x), e(x)\rangle$. Правая часть этого соотношения равна $\mu f_0^2(x)(-\cos\delta)$, а левая $-\delta^{\cdot}(l\sin\delta) - l^{\cdot}\cos\delta = -d(l\cos\delta)/dt$. Отсюда следует $d(l\cos\delta)/dt = \mu f_0^2(x)\cos\delta$. Поскольку в области $D_3^1 f_0^2(x) \leqslant -c$, где $c > 0$, то отсюда получаем заключение теоремы.

Замечание. Для дифференциальных включений (δ, l, μ) — слабая устойчивость в точке (δ_0, l_0) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\mu_0 > 0$ и $\rho > 0$ такие, что если начальное условие по переменным (δ, l) берется в ρ-окрестности точки (δ_0, l_0), а $\mu \leqslant \mu_0$, то найдется хотя бы одно решение включения, которое по переменным δ и l не покидает ε-окрестность точки (δ_0, l_0) при $t \geqslant 0$.

Поскольку включение (1.7) ε-аппроксимирует сверху систему (1.5), то в качестве следствия получим, что заключение теоремы 5.1 верно и для системы (1.5).

Заметим теперь, что множество $H_1(x)$ (как и $H_2(x)$), будучи симметричным относительно начала координат R^4, при любом x содержит нулевой вектор. Поэтому решение системы

$$z^{\cdot} = \mu f_0(x), \quad z(0) = z_0 \tag{5.1}$$

является решением включения (1.6). Учтем теперь, что $f_0^1 = f_0^4 = 0$. Отсюда следует

Теорема 5.2. Система (1.5) (δ, σ, μ) — слабо устойчива по Ляпунову в промежутке $T(\mu)$ в любой точке (δ_0, σ_0), $\sigma_0 \in [0, 2\pi]$, $\rho < |\sin\delta_0| < 1 - \rho$, $\rho > 0$.

Отметим, что система (1.5) не является (δ, σ, μ)-устойчивой по Ляпунову (сильная устойчивость) ни в одной точке (δ_0, σ_0). Отметим также, что если $\omega_1 = \omega_2$, то $F_1(x) = F_2(x) = \{f_0(x)\}$ и включения (1.6), (1.7) совпадают с системой дифференциальных уравнений, описывающей эволюцию медленных переменных [1, с. 173—174]. Поскольку параметр s пропорционален $\omega_2 - \omega_1$, то при достаточно малой величине $\omega_2 - \omega_1$ любое решение включений (1.6), (1.7) мало отличается от решения задачи (5.1) в промежутке $T(\mu)$ при достаточно малом μ. Если сравнить качественные характеристики движения гироскопа при гармоническом движении основания (модель А) и в рассматриваемом случае (модель В) с точки зрения анализа усредненной эволюции медленных переменных в промежутке $T(\mu)$, то можно сделать следующие выводы (при указанных выше ограничениях на параметры).

Во-первых, все движения в модели *А* реализуются и в модели *В*. Во-вторых, в модели *А* величина вектора кинетического момента ротора l уменьшается (поскольку $\delta = \text{const}$), а в модели *В*, как следует из теоремы 5.1, заведомо убывает величина проекции вектора кинетического момента на ось ξ_3 при любых движениях гироскопа. В-третьих, в модели А $\delta = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$, в то время как в модели В можно наблюдать изменение этих величин.

Используя ε-аппроксимирующие включения можно получить и другие утверждения о движениях гироскопа на асимптотически большом промежутке времени. Обоснование ряда утверждений, затрагиваемых в данной работе, можно найти в [2—4]. Необходимые сведения о дифференциальных включениях и их свойствах приведены в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мартыненко Ю. Г.* Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
2. *Филатов О. П., Хапаев М. М.* О взаимной ε-аппроксимации решений системы дифференциальных включений и усредненного включения // Мат. заметки. 1990. Т. 47. Вып. 5. С. 127–134.
3. *Филатов О. П., Хапаев М. М.* Усреднение дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными // Мат. заметки. 1990. Т. 47. Вып. 6. С. 102–109.
4. *Филатов О. П.* Об оценках опорных функций усредненных дифференциальных включений // Мат. заметки. 1991. Т. 50. Вып. 3. С. 135–142.
5. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.VI.1990