

УДК 533.6.013.42

© 1992 г. В. С. КРУТИКОВ

## О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН СО СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ С УЧЕТОМ ПОДВИЖНОСТИ ГРАНИЦ

Вопросы взаимодействия ударных волн с деформируемыми преградами представляют интерес как в теоретическом плане, так и в практических приложениях [1, 2]. Это взаимодействие зачастую рассматривалось при задании граничных условий на поверхностях, которые считаются неподвижными [1]. Воздействие на упругую оболочку слабых ударных волн без учета движения границ исследовалось, например в [3]; действие на неподвижные стенки оболочки волн, излучаемых поверхностью, размеры которой изменяются во времени, рассмотрено в [4], при этом искомый потенциал определялся как сумма потенциала падающей волны (задается режимом работы источника) и потенциала возмущений, вносимых преградой. В настоящей работе делается попытка приближенного учета влияния на волновые процессы конечных перемещений границ, когда метод суперпозиции неприменим.

**1. Постановка задачи.** Рассматриваются поля скорости и давления при расширении полости в оболочке, заполненной и погруженной в идеальную сжимаемую жидкость (случай сферической симметрии). Величины перемещений, начальных радиусов и законы изменения скоростей движений границ полости и преграды — стенок оболочки произвольны. Расширение полости может быть вызвано, например, взрывом взрывчатых веществ или газовых смесей, электрическим разрядом, лазерным импульсом, выхлопом сжатого газа и так далее, что сопровождается значительными перемещениями границ, пренебречь которыми нельзя. Полагаем стенки полости и оболочки непроницаемыми (т. е. скорость перемещения границы равна скорости частиц жидкости, соприкасающихся с нею) и последние тонкими.

Движение тонкой сферической оболочки опишется уравнением

$$\begin{aligned} d^2 u/dt^2 + \alpha^2 u &= \beta [P_1(t) - P_2(t)] \\ \alpha &= 2E/((1-\mu)\rho_1 R^2), \quad \beta = 1/(\kappa\rho_1) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $u$ ,  $h$ ,  $R$  — радиальное перемещение, толщина стенки, радиус оболочки;  $\rho_1$ ,  $\mu$ ,  $E$  — плотность, коэффициент Пуассона, модуль упругости материала оболочки;  $P_{1,2}(t)$  — давление жидкости на внутренней и внешней стороне оболочки. Для одномерных случаев движение жидкости описывается полной системой [5] уравнений движения, сплошности и состояния для изоэнтропических процессов в форме Эгта, с соответствующими граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} v_r + vv_r + \rho^{-1} P_r &= 0, \quad \rho_r + (\rho v)_r + (v-1)r^{-1}\rho v = 0, \\ (P+B)/\rho^n &= (P_0+B)/\rho_0^n \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $B$ ,  $n$  — постоянные,  $P_0$ ,  $\rho_0$  — давление и плотность невозмущенной жидкости;  $v$  — показатель симметрии;  $r$ ,  $t$  — координата и время. Для потенциальных движений из первого уравнения системы (1.2) можно по-

лучить интеграл Коши — Лагранжа

$$\varphi_t + 0,5\varphi_r^2 + \int_{P_\infty}^P \frac{dP}{\rho} = F(t), \quad P - P_0|_{\rho \approx \rho_0} = -\rho_0\varphi_t - 0,5\rho_0\varphi_r^2 \quad (1.3)$$

где  $F(t)$  может быть без ограничения общности принята равной нулю. В (1.3) потенциал скорости  $\varphi$  определяется из уравнения

$$\varphi_{tt} - a_0^2\varphi_{rr} - a_0^2r^{-1}(\nu-1)\varphi_r + [2\varphi_r\varphi_{rt} + (n-1)\varphi_r^2\varphi_t + (n-1)r^{-1}\varphi_r\varphi_r(\nu-1)] + \\ + \left\{ \varphi_r^2\varphi_{rr} + \varphi_{rr}\varphi_r^2 \left( \frac{n+1}{2} \right) + \frac{(n-1)(\nu-1)}{2r} \varphi_r^2\varphi_r \right\} = 0$$

Его удалось решить только для частного случая расширения полости с постоянной скоростью в безграничной жидкости методом малого параметра [6].

В [7] показано, что в подобных задачах, когда энергия сжатия жидкости мала по сравнению с кинетической энергией, линеаризация уравнения движения (интеграла Коши — Лагранжа) не оправдана, что, однако, не препятствует линеаризации волнового уравнения для потенциала скорости. Величина  $0,5\rho_0\varphi_r^2$  достигает больших значений [8] и соизмерима с компонентой  $\rho_0\varphi_t$  в точках, где скорость частиц среды приближается или равна скорости подвижной поверхности. Неучет ее может привести к большим погрешностям.

Таким образом, при  $\rho \approx \rho_0$ , когда возмущения распространяются с постоянной скоростью  $a_0$ , функцию  $\varphi$  в (1.3) определяем из линейного волнового уравнения

$$\varphi_{tt} - a_0^2\varphi_{rr} - a_0^2(\nu-1)r^{-1}\varphi_r = 0 \quad (1.4)$$

Начальные условия полагаем нулевыми. Известны условия на подвижных границах полости  $R_1(t)$  и преграды  $R_2(t)$ :

$$R_{1,2}(t) = F_{1,2}(t) - \varphi_r = v|_{r=R_{1,2}(t)} = R_{1,2}'(t) \quad (1.5)$$

или условия в точках  $\tau_{1,2}$ , находящихся между движущимися границами полости и преграды

$$\rho_0\varphi_t|_{r=\tau_{1,2}} = P(r_{1,2}, t) = f_{1,2}(t) \quad (1.6)$$

Если известны условия (1.5), то это прямая задача, если только (1.6) и необходимо определить скорости и давления в других точках, включая подвижные границы, — обратная. При больших перемещениях полости и преграды условие постоянства плотности может выполняться при наличии истечения из объема, когда  $\rho \neq \rho_0$  в такой мере, что применяемое волновое уравнение еще не дает больших погрешностей, и в некоторых других случаях.

**2. Случай движения двух границ.** Даже если уравнение, описывающее исследуемый процесс, линейное, наличие подвижных границ делает задачу существенно нелинейной, что рассмотрено в [9, 10] для уравнений параболического типа. Покажем это для нашего случая с помощью формулы Тэйлора (расширение сферы с постоянной скоростью [8]):

$$P - P_0 = 2\rho_0 \frac{a^3 M^3}{1 - M^2} \left( \frac{at}{r} - 1 \right) = F(r, t) \frac{a^2 M^3}{1 - M^2}, \quad M = \frac{v}{a}$$

$$P_1(v_1=100) = 667F, \quad P_2(v_2=150) = 2280F, \quad P_3(v_1+v_2=250) = 10640F, \\ P_1 + P_2 \neq P_3$$

При излучении с поверхности сферы  $R = \text{const}$  давление имеет вид [8]:

$$P - P_0 = \rho_0 \frac{aR}{r} v \exp \left[ -aR^{-1} \left( t - \frac{r-R}{a} \right) \right]$$

$$P(v_1=100) + P(v_2=150) = P(v_1+v_2=250)$$

В первом случае, когда граница перемещалась, задача нелинейна и метод суперпозиции не работает, во-втором, при  $R = \text{const}$  задача линейна, сумма двух решений является решением. Методов точного аналитического решения подобных задач не было [9, 10]. В известном обобщении общего метода конечных интегральных преобразований [9] используется разложение по «мгновенным» собственным функциям, что приводит к решению бесконечной системы совокупных дифференциальных уравнений первого порядка. Для решения задач (1.4–1.6) предложен новый подход, заключающийся в нахождении зависимостей между значениями исследуемых функций на подвижных границах и в других точках с учетом реальных величин запаздываний.

Рассмотрим обратную задачу с двумя подвижными границами: полости и преграды. Ударная волна, возникающая при движении полости, достигнув преграды — стенки сосуда и приводя их в движение, отражается. Отраженная ударная волна, достигая поверхности движущейся полости, отражается и так далее. В моменты достижения ударными волнами движущихся границ или любых других точек на них скачком изменяются функции скорости  $v$ , давления  $P$  и плотности  $\rho$ . Применяя одностороннее преобразование Лапласа к волновому уравнению (1.4) при  $v=3$  с учетом нулевых начальных условий, получаем операторное уравнение, решением которого будет

$$\bar{\varphi}(r, s) = c_1(s) \exp(-sr/a_0) + c_2(s) \exp(sr/a_0) \quad (2.1)$$

индекс у  $a_0$  в дальнейшем опущен. С учетом (1.6) определяем  $c_{1,2}$  и переходя к оригиналам, имеем для компоненты давления и скорости в любой точке

$$P(r, t+2r_1/a) - P(r, t+2r_2/a) = \Phi_1(r, t) = -r_1/rf_1(t_1) + r_2/rf_2(t_2) + r_1/rf_1(t_3) - r_2/rf_2(t_4) \quad (2.2)$$

$$t_1 = t - (r - r_1 - 2r_2)/a, \quad t_2 = t - (r - r_2 - 2r_1)/a \quad (2.3)$$

$$t_3 = t + (r + r_1)/a, \quad t_4 = t + (r + r_2)/a$$

$$[v(r, t+2r_1/a) - v(r, t+2r_2/a)] \rho_0 r^2 = \Phi_2(r, t) =$$

$$= -r_1 \left[ \frac{r}{a} f_1(t_1) + \int_0^t f_1(t_1) dt \right] + r_2 \left[ \frac{r}{a} f_2(t_2) + \int_0^t f_2(t_2) dt \right] - \quad (2.4)$$

$$-r_1 \left[ \frac{r}{a} f_1(t_3) - \int_0^t f_1(t_3) dt \right] + r_2 \left[ \frac{r}{a} f_2(t_4) - \int_0^t f_2(t_4) dt \right]$$

на подвижных границах

$$P(R_{1,2}(t), t+2r_1/a) - P(R_{1,2}(t), t+2r_2/a) = \Phi_1(R_{1,2}(t), t) \quad (2.5)$$

$$[v(R_{1,2}(t), t+2r_1/a) - v(R_{1,2}(t), t+2r_2/a)] \rho_0 R_{1,2}^2(t) = \Phi_2(R_{1,2}(t), t)$$

Для решения обратных задач понадобится знание величин  $R_{1,2}(t)$  которые можно определить следующим образом. Интегрируя операционным методом (2.4) и переходя на подвижные границы, получаем

$$[R_{1,2}^3(t+2r_1/a) - R_{1,2}^3(t+2r_2/a) - r_{0,00}^3 (\sigma_0(t+2r_1/a) - \sigma_0(t+2r_2/a))] \rho_0/3 =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ -r_1 \left\{ \int_0^t \frac{r}{a} f_1(t_1) dt + \int_0^t \int_0^t f_1(t) dt dt \right\} + r_2 \left\{ \int_0^t \frac{r}{a} f_2(t_2) dt + \int_0^t \int_0^t f_2(t_2) dt dt \right\} - \right. \\
&\quad \left. -r_1 \left\{ \int_0^t \frac{r}{a} f_1(t_3) dt - \int_0^t \int_0^t f_1(t_3) dt dt \right\} + r_2 \left\{ \int_0^t \frac{r}{a} f_2(t_4) dt - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^t \int_0^t f_2(t_4) dt dt \right\} \right\}_{r=r_{1,2}(t)} \quad (2.6)
\end{aligned}$$

где  $r_{0,00}$  — начальные радиусы полости и преграды,  $f_{1,2}$  — произвольные функции, которые могут быть аппроксимированы различными способами: экспонентами, тригонометрическими или другими элементарными функциями и их комбинациями (см. п. 5). В общем случае произвольных законов движения границ и вида функций  $P(r_{1,2}, t)$  (1.6) удобно  $f_{1,2}$  представить в следующем виде

$$f_1(t) = \sum_{m=0, h=1}^{\infty} A_m^h (t - \alpha_h)^m \sigma_0(t - \alpha_h) - \sum_{m=0, h=1}^{\infty} A_m^h (t - \alpha_h)^m \sigma_0(t - \alpha_h) \sigma_0(t - \alpha_{h+1}) \quad (2.7)$$

$$f_2(t) = \sum_{m=0, h=1}^{\infty} B_m^h (t - \beta_h)^m \sigma_0(t - \beta_h) - \sum_{m=0, h=1}^{\infty} B_m^h (t - \beta_h)^m \sigma_0(t - \beta_h) \sigma_0(t - \beta_{h+1})$$

$$\alpha_1 = (r_1 - r_0)/a, \quad \beta_1 = (r_2 - r_0)/a$$

Здесь  $\alpha_h, \beta_h, A_m^h, B_m^h$  — постоянные;  $\sigma_0$  — единичная разрывная функция нулевого порядка,  $A_m^h, B_m^h$  — коэффициенты интерполяционного полинома Лагранжа степени  $m$ . Число  $m$  определяет количество точных значений решения и может быть сколь угодно большим [11];  $\alpha_h, \beta_h$  характеризуют моменты появления ударных волн в точках  $r_{1,2}$  и могут быть точно вычислены [8]. Подставляя в (2.2) — (2.6) вид функции из (2.7), с учетом интегрирования и дифференцирования разрывных функций с запаздыванием, получаем зависимости, аргументы которых будут следующими

$$\begin{aligned}
t_{11} &= t - \frac{r - r_1 - 2r_2}{a} - \alpha_h, & t_{12} &= t - \frac{r - r_1 - 2r_2}{a} - \alpha_{h+1} \\
t_{21} &= t - \frac{r - r_2 - 2r_1}{a} - \beta_h, & t_{22} &= t - \frac{r - r_2 - 2r_1}{a} - \beta_{h+1} \\
t_{31} &= t + \frac{r + r_1}{a} - \alpha_h, & t_{32} &= t + \frac{r + r_1}{a} - \alpha_{h+1} \\
t_{41} &= t + \frac{r + r_2}{a} - \beta_h, & t_{42} &= t + \frac{r + r_2}{a} - \beta_{h+1}
\end{aligned} \quad (2.8)$$

С началом движения преграды могут возникнуть значительные отрицательные давления, капельная жидкость кавитирует. Известно [1, 12], что вода при определенных условиях (чистота жидкости и поверхности преграды, степень удаления газов и т. д.) может выдерживать отрицательные давления  $8 \div 37$  кгс/см<sup>2</sup>. С началом кавитации волновые явления будут описываться другими уравнениями.

3. Случай движения одной границы, вторая неподвижна. Изменение радиуса полости  $R_1(t) = F_1(t)$ , где  $F_1$  — произвольная функция. Граница преграды — стенок оболочки неподвижна

$$R_2 = \text{const}, \quad v(R_2) = 0 \quad (3.1)$$

Начальные условия нулевые. Давление на преграду обозначим

$$P(R_2, t) = f(t), \quad f(t) = \sum_{m=0, h=1}^{\infty} A_m^h (t - \alpha_h)^m \sigma_0(t - \alpha_h) - \sum_{m=0, h=1}^{\infty} A_m^h (t - \alpha_h)^m \sigma_0(t - \alpha_h) \sigma_0(t - \alpha_{h+1}) \quad (3.2)$$

Определив функции  $c_{1,2}$  из (2.1) с учетом (3.1), (3.2), получим соответствующие формулы для скорости и компоненты давления в любой точке

$$v(r, t) 2\rho_0 r^2 / R_2 = \frac{r}{a} \{f(t_1) - f_2(t_2)\} + \left(1 - \frac{r}{R_2}\right) \left\{ \int_0^t f(t_1) dt + \int_0^t f(t_2) dt \right\} - \frac{a}{R_2} \left\{ \int_0^t \int_0^t f(t_1) dt dt - \int_0^t \int_0^t f(t_2) dt dt \right\} = \Phi_2(r, t) \quad (3.3)$$

$$P(r, t) = \frac{R_2}{2r} \left\{ f(t_1) - \frac{a}{R_2} \int_{R_2/2}^t f(t_1) dt \right\} + \frac{R_2}{2r} \left\{ f(t_2) + \frac{a}{R_2} \int_{R_2/2}^t f(t_2) dt \right\} = \Phi_1(r, t) \quad (3.4)$$

$$t_1 = t - (r - R_2)/a, \quad t_2 = t + (r - R_2)/a$$

на подвижной границе  $r = R_1(t)$ :

$$P(R(t), t) = \Phi_1(R(t), t) - 0,5\rho_0 v^2(R(t), t), \quad v(R(t), t) = \Phi_2(R(t), t) \quad (3.5)$$

$$[R_1^3(t) - r_0^3] 2\rho_0 / 3R_2 = \left\{ \frac{r}{a} \left\{ \int_0^t f(t_1) dt - \int_0^t f(t_2) dt \right\} + \left(1 - \frac{r}{R_2}\right) \left\{ \int_0^t \int_0^t f(t_1) dt dt - \int_0^t \int_0^t f(t_2) dt dt \right\} - \frac{a}{R_2} \left\{ \int_0^t \int_0^t \int_0^t f(t_1) dt dt dt - \int_0^t \int_0^t \int_0^t f(t_2) dt dt dt \right\} \right\}_{r=R_1(t)} \quad (3.6)$$

Подставляя в (3.3)–(3.6) вид функции  $f$  из (3.2), получим зависимости, аргументы которых будут следующими

$$t_{11} = t - \frac{r - R_2}{a} - \alpha_h, \quad t_{12} = t - \frac{r - R_2}{a} - \alpha_{h+1}; \quad t_{21} = t + \frac{r - R_2}{a} - \alpha_h; \quad t_{22} = t + \frac{r - R_2}{a} - \alpha_{h+1} \quad (3.7)$$

Как видим, расчет сводится к вычислению аргументов с запаздываниями типа (2.8), (3.7). Отметим симметричность конструкций полученных решений и тот факт, что подстановка их в уравнение (1.4) при  $v=3$  превращает его левую часть в нуль. Они пригодны для решения обратных и прямых задач.

4. **Случай движения одной границы в безграничной среде.** Соответствующие формулы можно получить из (2.2)–(2.6) при  $r_2 \rightarrow \infty$ :

$$P(r_1, t) = f\left(t - \frac{r_1 - r_0}{a}\right), \quad P(r, t) = \frac{r_1}{r} f\left(t - \frac{r - r_0}{a}\right) = F_3(r, t) \quad (4.1)$$

$$\frac{v(r, t)r^2\rho_0}{r_1} = \frac{r}{a} f\left(t - \frac{r - r_0}{a}\right) + \int_0^t f\left(t - \frac{r - r_0}{a}\right) dt = F_4(r, t) \quad (4.2)$$

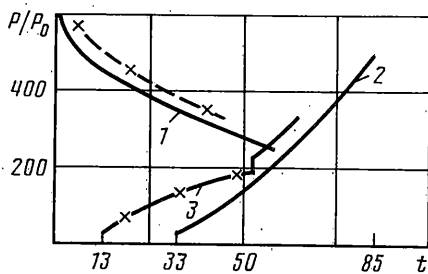
$$\frac{[R_{i+1}^3(t) - r_0^3]\rho_0}{3r_1} = \left[ \int_0^t \frac{r}{a} f\left(t - \frac{r - r_0}{a}\right) dt \right]_{r=R_i(t)} + \quad (4.3)$$

$$+ \left[ \int_0^t \int_0^t f\left(t - \frac{r - r_0}{a}\right) dt dt \right]_{r=R_i(t)}$$

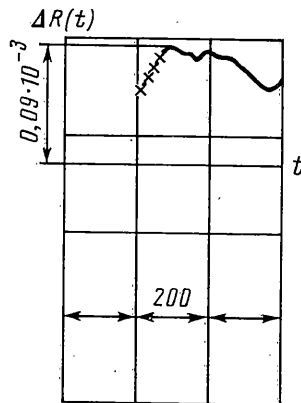
$$P(R(t), t) = F_3(R(t), t) - 0,5\rho_0 v^2(R(t), t); \quad v(R(t), t) = F_4(R(t), t) \quad (4.4)$$

индекс  $i$  в (4.3) введен для того, чтобы последовательными приближениями решать это кубическое уравнение (для обратных задач  $f$  известна и интегралы могут быть вычислены). Соотношения (2.6), (3.6), (4.3) обладают хорошей сходимостью и таким способом  $R(t)$  можно вычислить с любой степенью точности. Отметим, что при  $a \rightarrow \infty$  и после двухкратного дифференцирования (4.3) переходит в известную формулу  $P - P_0 = \rho_0/r(2RR'^2 + R^2R'')$  при  $r=r_1$  для несжимаемой жидкости.

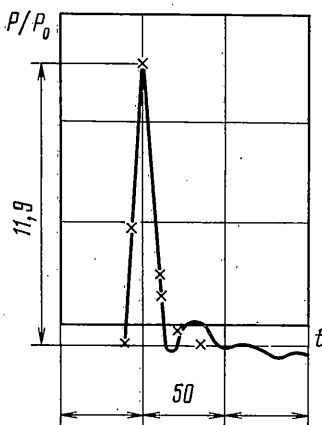
5. **Примеры сравнения результатов расчетов и эксперимента.** На фиг. 1 приведены результаты расчета по формулам (3.1)–(3.7) гидродинамических характеристик полости, расширяющейся по закону  $R_1(t) = r_0 + A\alpha^{-1}[1 - \exp(-\alpha t)]$  в оболочке радиуса  $R_2 = 0,05$  м = const,  $r_0 = 0,5 \cdot 10^{-3}$  м,  $A = 200$ ,  $\alpha = 5 \cdot 10^3$  с $^{-1}$ ,  $\rho_0 = 102$  кгс $^2$ /м $^4$ ,  $a = 1500$  м/с,  $m$  равно 0, 1, 2, 3, что достаточно для практического расчета; 1 – изменение во времени давления  $P(R(t), t)$  с учетом нелинейного члена  $0,5\rho_0 v^2(R(t), t)$  (величины компоненты  $\rho_0 \phi_i$  отмечены кружками), 2 – давление на преграде, 3 – давление в точке  $r = 0,02$  м; звездочками обозначены значения, вычисленные по известным формулам  $\phi = -V^*(t-r/a)/4\pi r$ ,  $P - P_0 = \rho_0(^3/2 RR'^2 + RR'')$ . Следует отметить важное обстоятельство для задач упругого взаимодействия. Как известно [1, 2], недостатком численных методов при их формальном использовании является то обстоятельство, что они не позволяют выявить месторасположения и интенсивность фронтовых разрывов (для выделения фронтовых разрывов требуется предварительный анализ решений, который в задачах упругого взаимодействия является сложной самостоятельной проблемой). В нашем случае моменты появления фронтовых разрывов определяются по методике [8] формулы (1.141), (1.142) и далее, величины скачков функций  $P$  и  $v$  определяются при вычислениях по соотношениям (2.2)–(2.8), (3.3)–(3.6) естественным образом. На фиг. 1 показаны месторасположение и величины фронтовых разрывов. К моменту прихода отраженной волны к расширяющейся полости ее радиус равен  $R_1(t) = 10,57 \cdot 10^{-3}$  м.



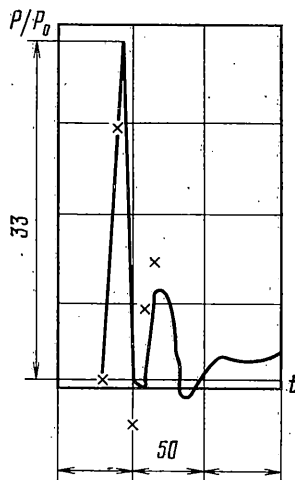
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

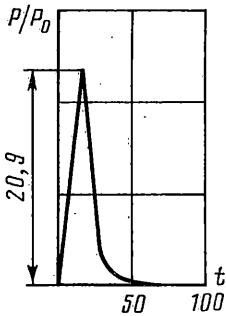
Экспериментальная проверка полученных формул представлена на фиг. 2–6. В стальной оболочке  $R=0,225$  м,  $h=2$  мм,  $\rho_1=800$  кгс<sup>2</sup>/м<sup>4</sup>,  $\mu=0,3$ ,  $E=2,1 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, заполненной и погруженной в воду, произведен электрический разряд [13]. Регистрировалось перемещение оболочки  $u$ , давление в точке  $r=0,395$  м вне и на расстоянии 1 см от внутренней поверхности оболочки — сплошные линии на фиг. 2, 3, 4 соответственно. Исходным для реконструкции принято давление в точке  $r=0,395$  м вне оболочки (фиг. 3), которое приближенно аппроксимировалось по участкам элементарными функциями

$$P(r_1, t) = B \left( t - \frac{r_1 - r_0}{a} \right) \sigma_0 \left( t - \frac{r_1 - r_0}{a} \right) - B \left( t - \frac{r_1 - r_0}{a} \right) \sigma_0 \left( t - \frac{r_1 - r_0}{a} \right) \times \\ \times \sigma_0 \left( t - \left( \alpha_1 + \frac{r_1 - r_0}{a} \right) \right) + A \exp \left[ -\alpha \left( t - \frac{r_1 - r_0}{a} \right) \right] \quad (5.1)$$

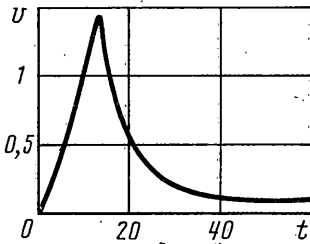
$$r_1 = 0,395 \text{ м}, a = 1500 \text{ м/с}, r_0 = R = 0,225 \text{ м}, A = 11,9 \text{ кгс/см}^2$$

$$\alpha = 0,17 \cdot 10^6, \alpha_1 = 13,5 \cdot 10^{-6} \text{ с}, (r_1 - r_0)/a = 113,3 \cdot 10^{-6} \text{ с}$$

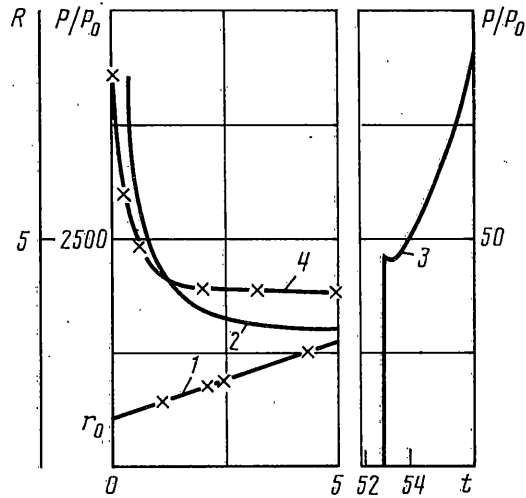
$$B = 0,8814 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2 \cdot \text{с}$$



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Подставляя (5.1) в (4.1)–(4.4), можно получить компоненту давления на внешней поверхности оболочки

$$P_z(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} \{ Bt_1 \sigma_0(t_1) - Bt_1 \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_1 - \alpha_1) + \\ + A \exp[-\alpha(t_1 - \alpha_1)] \sigma_0(t_1 - \alpha_1) \}; \quad t_1 = t - \frac{R(t) - r_0}{a}$$

В промежутке  $0 < t < 63,5 \cdot 10^{-6}$  с работает формула (5.1), так как на измеренное давление исключается влияние свободной поверхности, дна и стенок бассейна.

По формулам (4.1)–(4.4) находим также скорость оболочки

$$v(R(t), t) \rho_0 R^2(t) / r_1 = R(t) a^{-1} \{ Bt_1 \sigma_0(t_1) - Bt_1 \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_1 - \alpha_1) + \\ + A \exp[-\alpha(t_1 - \alpha_1)] \} + \{ 1/2 Bt_1^2 \sigma_0(t_1) - [1/2 Bt_1^2 \sigma_0(t_1 - \alpha_1) - \\ - 1/2 B \alpha_1^2 \sigma_0(\alpha_1) \sigma_0(t_1 - \alpha_1)] + A/\alpha [1 - \exp(-\alpha(t_1 - \alpha_1))] \sigma_0(t_1 - \alpha_1) \}$$

Радиус оболочки согласно формулам (4.1)–(4.4) изменяется по следующему закону

$$[R_{i+1}^3(t) - r_0^3] \rho_0 / 3r_1 = R_{i+1}(t) \{ 1/2 Bt_1^2 \sigma_0(t_1) - [1/2 Bt_1^2 \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_1 - \alpha_1) - \\ - 1/2 B \alpha_1^2 \sigma_0(\alpha_1) \sigma_0(t_1 - \alpha_1)] + A/\alpha [1 - \exp(-\alpha(t_1 - \alpha_1))] \sigma_0(t_1 - \alpha_1) \} / a + \\ + \{ [1/6 Bt_1^3 \sigma_0(t_1) - \{ 1/6 Bt_1^3 \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_1 - \alpha_1) - 1/6 B \alpha_1^3 \sigma_0(\alpha_1) \sigma_0(t_1 - \alpha_1) \} + \\ + 1/2 B \alpha_1^2 \sigma_0(\alpha_1) (t_1 - \alpha_1) \sigma_0(t_1 - \alpha_1) + A/\alpha (t_1 - \alpha_1) \sigma_0(t_1 - \alpha_1) - \\ - [A/\alpha^2 (1 - \exp(-\alpha(t_1 - \alpha_1))) \sigma_0(t_1 - \alpha_2)] \}, \quad t_1 = t - (R_i(t) - r_0) / a \quad (i=1, 2 \dots)$$

Скорость частиц жидкости при движении одной подвижной границы в безграничной среде в зависимости от давления в точке волновой зоны находится по формуле (4.2), откуда можно определить ускорение частиц жидкости. Ускорение частиц жидкости на поверхности оболочки равно ускорению оболочки. Тогда из (1.1) можно определить давление на внутренней поверхности оболочки, а по формулам (2.5), (3.5) мож-



но реконструировать скорость и давление на подвижной границе полости, расширяющейся в оболочке.

Реконструкция изменения радиуса (фиг. 2) и давления (фиг. 4) на внутренней поверхности оболочки обозначены; скорости (фиг. 6), давления (фиг. 5) на внешней поверхности оболочки — сплошными линиями.

Сравнение с результатами численного решения методом характеристик [13, 14] полной системы (1,2) показало хорошее совпадение результатов при скоростях расширения полости до 200 м/с, при этом ударная волна сразу отходит от подвижной границы со скоростью  $a = 1460$  м/с. При больших скоростях расширения начинает сказываться нелинейность среды. Этим определяются границы применимости волнового уравнения и полученных решений в расчетах гидродинамики расширяющейся полости. На фиг. 7 сплошные линии — расчет методом характеристик системы (1,2) расширения сферы по закону  $1 - R(t) = 1 \cdot 10^{-3} + 0,35[1 - \exp(-10^3 t)]$  м,  $2 - P(R(t), t)$ ;  $3 -$  давление в точке  $r = 0,08$  м взято для реконструкции; звездочками обозначены результаты восстановления радиуса  $R(t)$  и  $4 - P(R(t), t)$  по формулам (4.1—4.4).

Удовлетворительное согласование различных расчетных и экспериментальных данных свидетельствует о правомочности предложенного подхода к решению поставленной задачи с подвижными границами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горшков А. Г. Взаимодействие ударных волн с деформируемыми преградами // Итоги науки и техники. Механика деформируемого тела. М.: ВИНТИ, 1980. Т. 13. С. 105—186.
2. Вестяк А. В., Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой // Итоги науки и техники. Механика деформируемого тела. М.: ВИНТИ, 1983. Т. 15. С. 69—148.
3. Александрова Н. А. О воздействии на упругую сферическую оболочку слабых ударных волн // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 1. С. 176—182.
4. Бабаев А. Э. Действие внутренних акустических ударных волн, излучаемых поверхностью с переменной границей, на жесткие полости // Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 6. С. 36—44.
5. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967. 428 с.
6. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
7. Слепня Л. И. Об уравнениях динамики осесимметричной полости в идеальной сжимаемой жидкости // Докл. АН СССР, 1985. Т. 282. № 4. С. 809—813.
8. Крутиков В. С. Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами. Киев: Наук. думка, 1985. 125 с.
9. Гринберг Г. А. Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 193—203.
10. Вопросы математической физики/Под ред. Тучкевича В. М., Л.: Наука, 1976. 296 с.
11. Математическая энциклопедия/Гл. ред. Виноградов И. М., М.: Сов. энциклопедия, 1979. Т. 2. 1103 с.
12. Киэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. М.: Мир, 1974. 687 с.
13. Кривицкий Е. В., Шамко В. В. Переходные процессы при высоковольтном разряде в воде. Киев: Наук. думка, 1979. 207 с.
14. Иванюк А. В., Крутиков В. С. Определение гидродинамических характеристик потока при расширении поршня в жидкости // Электрогидравлический эффект и его применение. Киев: Наук. думка, 1981. С. 86—96.

Николаев

Поступила в редакцию  
12.VI.1989