

УДК 539.3:534.1

© 1992 г. Г. И. ПШЕНИЧНОВ, А. В. СКОРИКОВ

**СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ  
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С УПРУГИМ КОНТУРОМ**

Рассматриваются свободные колебания ортотропной прямоугольной пластины, контур которой характеризуется четырьмя (по числу сторон) коэффициентами упругости. Методом декомпозиции получена приближенная формула для частоты основного тона, обладающая высокой точностью. Рассмотрены примеры использования этой формулы.

Рассмотрим свободные колебания ортотропной прямоугольной пластины, края которой упруго защемлены. Методом декомпозиции [1] получим приближенную формулу для частоты основного тона, обладающую высокой точностью.

Дифференциальное уравнение свободных установившихся колебаний ортотропной пластины в декартовой системе координат при общепринятых обозначениях имеет вид

$$D_1 \partial^4 w / \partial x^4 + 2D_3 \partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2 + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \Omega w = 0 \quad (1)$$

где  $\Omega = \rho h \omega^2$ ,  $\rho$  и  $h$  — плотность материала и толщина пластины,  $\omega$  — круговая частота свободных колебаний.

Пластина имеет прямоугольную форму с размерами  $a$  и  $b$  соответственно вдоль осей  $x$  и  $y$ .

Рассматриваются граничные условия, при которых на краях пластины прогиб равен нулю, а изгибающий момент линейно связан с углом поворота нормали

$$\begin{aligned} w=0, \quad M_x &= -r_1 \partial w / \partial x \quad (x=0) \\ w=0, \quad M_x &= r_2 \partial w / \partial x \quad (x=a) \\ w=0, \quad M_y &= -r_3 \partial w / \partial y \quad (y=0) \\ w=0, \quad M_y &= r_4 \partial w / \partial y \quad (y=b) \end{aligned} \quad (2)$$

где  $r_i$  ( $i=1, 4$ ) — коэффициенты упругости контура на соответствующих краях пластины (фигура). Введем безразмерные коэффициенты упругости  $k_i$  по формулам

$$\begin{aligned} k_1 &= D_1 / (D_1 + r_1 a), \quad k_2 = D_1 / (D_1 + r_2 a) \\ k_3 &= D_2 / (D_2 + r_3 b), \quad k_4 = D_2 / (D_2 + r_4 b) \end{aligned}$$

и запишем граничные условия (2) в виде

$$w = k_1 a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (1 - k_1) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (x=0)$$

$$\begin{aligned}
 w &= k_2 a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1+k_2) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (x=a) \\
 w &= k_3 b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (1-k_3) \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (y=0) \\
 w &= k_4 b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (1-k_4) \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (y=b)
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Значения  $k_i$ , равные 1 и 0, соответствуют шарнирно опертому и защемленному краю. В общем случае коэффициенты  $k_i$  зависят от искомой частоты  $\omega$ .

Требуется определить наименьшее собственное число  $\Omega$  краевой задачи (1), (3). Для этого воспользуемся методом декомпозиции, в соответствии с которым искомое решение  $w(x, y)$  задачи (1), (3) представляется в трех формах  $w^{(1)}$ ,  $w^{(2)}$ ,  $w^{(3)}$ . Для определения этих форм решения введем в рассмотрение три вспомогательные задачи, первые две из которых — краевые.

Первая задача: решение дифференциального уравнения

$$D_1 \partial^4 w^1 / \partial x^4 = f^{(1)}(x, y)$$

с учетом первых двух условий (3), в которых  $w = w^{(1)}$ .

Вторая задача: решение дифференциального уравнения

$$D_2 \partial^4 w^2 / \partial y^4 = f^{(2)}(x, y)$$

с учетом последних двух условий (3), в которых  $w = w^{(2)}$ .

Третья задача: решение дифференциального уравнения

$$2D_3 \frac{\partial^4 w^{(3)}}{\partial x^2 \partial y^2} - \Omega w^{(3)} = -f^{(1)}(x, y) - f^{(2)}(x, y)$$

Решение краевой задачи (1), (3) эквивалентно отысканию решения указанных вспомогательных задач с дальнейшим их подчинением следующим условиям

$$w = w^{(1)} = w^{(2)} = w^{(3)} \tag{4}$$

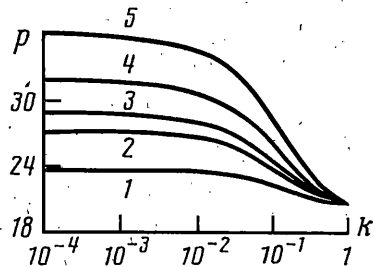
которые позволяют определить неизвестные функции  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$ .

Для отыскания приближенного решения задачи неизвестные функции представим в виде  $f^{(1)}(x, y) = f^{(1)}(y)$ ,  $f^{(2)}(x, y) = f^{(2)}(x)$ . Были получены решения первых двух вспомогательных задач  $w^{(1)}$  и  $w^{(2)}$ , зависящие соответственно от функций  $f^{(1)}(y)$  и  $f^{(2)}(x)$ . При выполнении равенства  $w^{(1)} = w^{(2)}$  эти функции были определены с точностью до постоянного множителя.

Для решения третьей задачи использовался метод Галеркина, а также условия (4). В результате получена следующая формула для определения частоты основного тона свободных колебаний ортотропной пластины

$$\Omega = 504 \frac{D_1 R_{12} G_{12}}{a^4 F_{12}} + 288 \frac{D_3 H_{12} H_{34}}{a^2 b^2 F_{12} F_{34}} + 504 \frac{D_2 R_{34} G_{34}}{b^4 F_{34}} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 R_{12} &= 1 + 3(k_1 + k_2) + 5k_1 k_2, & R_{34} &= 1 + 3(k_3 + k_4) + 5k_3 k_4, \\
 G_{12} &= 1 + 8(k_1 + k_2) + 55k_1 k_2, & G_{34} &= 1 + 8(k_3 + k_4) + 55k_3 k_4,
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 H_{12} &= 1 + 13(k_1 + k_2) + 58(k_1^2 + k_2^2) + 154k_1k_2 + 625(k_1^2k_2 + k_1k_2^2) + 2125k_1^2k_2^2 \\
 H_{34} &= 1 + 13(k_3 + k_4) + 58(k_3^2 + k_4^2) + 154k_3k_4 + 625(k_3^2k_4 + k_3k_4^2) + 2125k_3^2k_4^2 \\
 F_{12} &= 1 + 15(k_1 + k_2) + 60(k_1^2 + k_2^2) + 208k_1k_2 + \\
 &\quad + 765(k_1^2k_2 + k_1k_2^2) + 2575k_1^2k_2^2 \\
 F_{34} &= 1 + 15(k_3 + k_4) + 60(k_3^2 + k_4^2) + 208k_3k_4 + \\
 &\quad + 765(k_3^2k_4 + k_3k_4^2) + 2575k_3^2k_4^2
 \end{aligned}$$

Если придавать коэффициентам  $k_i$  значения, равные 0 и 1, из (5) можно получить формулы для частот колебаний пластинок при всех шести возможных комбинациях защемления и шарнирного опирания сторон. В случае изотропной пластины ( $D_1 = D_2 = D_3 = D$ ) сравнение с имеющимися точными решениями показало, что погрешность формулы (5) для этих шести случаев граничных условий составляет доли процента. Наибольшая погрешность формулы (0,5%) соответствует случаю, когда две соседние стороны пластины защемлены, а две другие — шарнирно оперты, причем пластина квадратная.

Было проведено сравнение решения (5) для некоторых промежуточных значений  $k_i$  (не равных 0 или 1) с численными решениями, полученными методом Рунге [2]. Эти результаты также хорошо согласуются.

Для ортотропной пластины сравнение формулы (5) проводилось в частных случаях: с точным решением для шарнирно опертой пластины и решением для полностью защемленной пластины, приведенным в [3]. Результаты практически совпали.

На фигуре представлены примеры зависимостей безразмерного параметра частоты  $p = a^2 \omega (\rho h / D)^{1/2}$  квадратной изотропной пластины от коэффициентов  $k_i$ :  $k_2 = k_3 = k_4 = 1$ ,  $k_1 = k$  (кривая 1);  $k_3 = k_4 = 1$ ,  $k_1 = k_2 = k$  (кривая 2);  $k_3 = k_4 = 1$ ,  $k_1 = k_2 = k$  (кривая 3);  $k_4 = 1$ ,  $k_1 = k_3 = k$  (кривая 4);  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$  (кривая 5).

В следующем примере на основании формулы (5) определена низшая частота свободных колебаний изотропной квадратной пластины, которая опирается на систему упругих колонн. Для нахождения коэффициента упругости контура рассматривались вынужденные колебания колонны постоянного поперечного сечения, нижний конец которой защемлен, а на другом опертом конце со стороны пластинки приложен изгибающий момент  $M \sin \omega t$ . Получена зависимость между амплитудными величинами момента  $M$  и угла поворота  $\varphi$  верхнего конца колонны

$$\frac{M}{\varphi} = \lambda EJ \frac{\operatorname{ch} \lambda l \sin \lambda l - \operatorname{sh} \lambda l \cos \lambda l}{1 - \operatorname{ch} \lambda l \cos \lambda l} \quad (6)$$

где  $\lambda = (m \omega^2 / EJ)^{1/2}$ ,  $l$ ,  $EJ$ ,  $m$  — длина, изгибная жесткость и масса единицы длины колонны соответственно.

Коэффициент упругости контура  $r$  такой системы определяется по формуле  $r = M / b \varphi$ , где  $b$  — шаг колонн вдоль контура пластины. Введем безразмерный коэффициент упругости

$$k = D / (D + a M / b \varphi) \quad (7)$$

где  $a$ ,  $D$  — длина стороны контура и цилиндрическая жесткость пластины. Заметим, что упругость контура зависит от искомой частоты  $\omega$ .

Рассматривалась система, состоящая из пластины размером  $10 \times 10$  м, толщиной 0,1 м и с коэффициентом Пуассона материала 0,16, опирающейся на колонны длиной 3,5 м, с главным радиусом инерции поперечного сечения  $8,66 \cdot 10^{-2}$  м и с постоянным шагом вдоль контура пластины 2,5 м. Модули упругости и плотности материалов пластины и колонн одинаковы.

Задача по определению частоты  $\Omega$  на основании формулы (5) и нелинейных зависимостей (6), (7) решалась методом последовательных приближений. В первом приближении было положено  $k^{(1)}=0,5$  (здесь и далее верхний индекс означает номер инерции) и это значение подставлено в формулу (5), позволившую определить  $\Omega^{(1)}$ . Далее, согласно выражениям (6), (7), найдено значение  $k^{(2)}$  и т. д. После третьей итерации значения  $k$  и  $\Omega$  практически не менялись. Следовательно,  $k \approx k^{(3)}=0,220$ ,  $\Omega \approx \Omega^{(3)}=604D$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишеничиов Г. И.* Метод декомпозиции решения уравнений и краевых задач // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 792–794.
2. *Warburton G. B., Edney S. L.* Vibrations of rectangular plates with elastically restrained edges. // J. Sound and Vibrat. 1984. V. 95. N 4. P. 537–552.
3. *Гонткевич В. С.* Собственные колебания пластинок и оболочек. Киев: Наук. думка, 1964. 288 с.

Москва

Поступила в редакцию  
3.V.1990