МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1992

УДК 539.3

© 1992 г. В. В. ЗОЗУЛЯ

КОНТАКТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ ЧЕРЕЗ ТЕПЛОПРОВОДНЫЙ СЛОЙ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

При расчетах конструкций возникают задачи, когда их тонкостенные элементы взаимодействуют между собой или с твердыми телами через теплопроводный слой, не сопротивляющийся деформациям этих тел [1]. Тогда в процессе деформации толщина этого слоя изменяется, а следовательно изменяются и условия теплового контакта. В статье показано, что изменение условий теплообмена в процессе деформаций таких конструкций необходимо учитывать при выполнении практических расчетов, так как возникающие при этом эффекты влияют не только количественно, но иногда и качественно на характер происходящих процессов.

В статье дана постановка задачи о взаимодействии цилиндрической оболочки с твердым телом через теплопроводный слой в нестационарном температурном поле. Учтено, что толщина слоя изменяется при деформациях оболочки. В такой постановке задача сводится к связанной системе нелинейных уравнений термоупругости и теплопроводности оболочки. Причем связанность этой системы обусловлена не возникновением тепла при деформациях оболочки, а характером теплообмена ее с твердым телом. Задача решается сведением к интегральным уравнениям типа Гаммерштейна, а при наличии механического контакта и к уравнению Фредгольма 1-го рода, которое решается методом регуляризации. Разработан алгоритм решения задачи и выполнен анализ ее разрешимости. Приведен пример численного решения связанной термоупругой задачи по предложенной методике.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку диаметром $2r$, толщиной h и длиной l, находящуюся в нестационарном температурном поле. Внутри ее в начальном недеформированном состоянии вставлено с зазором h_0 твердое тело с гладкой поверхностью S. На наружной поверхности оболочки Ω^+ задана температура T^+, а на S — температура T^-. Теплообмен оболочки с твердым телом осуществляется за счет теплопроводности среды находящейся в зазоре. Величина зазора h_0 изменяется вследствие деформации оболочки и твердого тела. При этом оболочка и твердое тело могут вступить в контакт с образованием зоны плотного контакта $\Omega_c=\Omega^-\cap S$, в которой возникают неизвестные силы контактного взаимодействия q. Кроме этого на оболочку может действовать внешняя нагрузка p. К такой расчетной схеме приходим при рассмотрении некоторых технических задач [1]. Для упрощения изложения предполагаем, что задача осесимметрична.

Разложим двумерное нестационарное температурное поле в оболочке $T(x, z, t)$ и его производную по z $Q(x, z, t)$ в ряд по полиномам Лежандра. Следуя [2], ограничимся в разложении для T двумя, а для Q тремя членами. В результате получим два одномерных уравнения теплопроводности для коэффициентов разложения $T_1(x, t)$, $T_2(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}+\frac{r^2}{2h}(Q^+-Q^-)+rQ_1=\frac{1}{a}\frac{\partial T_1}{\partial t}$$
$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}+\frac{3r^2}{2h}(Q^+-Q^-)-\frac{3r^2}{2h}Q_1+rQ_2=\frac{1}{a}\frac{\partial T_2}{\partial t} \tag{1}$$

где Q^+ и Q^- — значения Q на лицевых поверхностях оболочки, a — коэффициент температуропроводности материала оболочки. Для определения Q_k ($k=1, 2$), Q^+ и Q^- используем условия идеального теплового контакта оболочки со средой, находящейся в зазоре и условия теплообмена на поверхностях Ω^+ и S. В результате получим

$$Q_1=(T^+-T_k)/2h, \quad Q_2=3(T^+-T_k)/2h-3T_1/h$$
$$Q^++Q^-=6(T^+-T_k)/h-10T_2/h, \quad Q^+-Q^-=3(T^++T_k)/h-6T_1/h$$
$$T_k=\frac{\lambda_1(h_0-w)T^++\lambda_*hT^-}{\lambda_1(h_0-w)+\lambda_*h} \tag{2}$$

Здесь λ_1 и λ_* — коэффициенты теплопроводности материала оболочки и среды в зазоре, w — прогиб оболочки.

Теперь уравнения (1) представим в виде

$$\frac{\partial^2T_1}{\partial x^2}-\frac{3r^2}{h^2}T_1+F_1=\frac{1}{a}\frac{\partial T_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2T_2}{\partial x^2}-\frac{15r^2}{h^2}T_2+F_2=\frac{1}{a}\frac{\partial T_2}{\partial t} \tag{3}$$
$$F_1=3r^2(T^++T_k)/2h^2+r(T^+-T_k)/2h$$
$$F_2=15r^2(T^+-T_k)/2h^2+3r(T^++T_k)/2h-3rT_1/h$$

Рассмотрение вариантов задания других тепловых условий на Ω^+ и S трудностей не вызывает.[1]

При рассмотрении термоупругих деформаций оболочки будем исходить из осесимметричных уравнений в перемещениях [2]:

$$d^4w/dx^4+4\beta^4w-\beta_1T_1+\beta_2d^2T_2/dx^2=(q-p)/D \tag{4}$$
$$\beta^4=3(1-\nu^2)/h^2/r^2/4, \quad \beta_1=3(1-\nu^2)\alpha/h^2/r$$
$$\beta_2=\alpha(1+\nu)/h, \quad D=2Eh^3/(1-\nu^2)/3$$

где E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки, α — линейный коэффициент температурного расширения.

К уравнениям (3) и (4) следует прибавить механические и тепловые граничные условия, которые зависят от условий теплообмена и закрепления на концах оболочки, а также начальные условия.

Кроме того должны выполняться следующие ограничения

$$w=h_0\Rightarrow q>0, \quad T_k=T^-, \quad \forall x\in\Omega_c \tag{5}$$
$$w>h_0\Rightarrow q=0, \quad \forall x\in\Omega^-/\Omega_c$$

Отметим особенность постановки задачи и полученной системы уравнений (3), (4). Исходная система уравнений термоупругости и теплопроводности оболочек (1), (4) квазистатическая несвязанная. Система же (3), (4) — связанная за счет слагаемого T_k, в которое w входит нелинейно. Его появление вызвано желанием учесть, что в процессе деформации оболочки изменяются условия ее теплообмена с поверхностью S. Этим система (3), (4) отличается от уравнений теплопроводности и термоупругости оболочек, полученных другими авторами. Следует заметить, что в [3] и других работах этих авторов рассматриваются задачи о тепловом контакте деформируемых тел через промежуточный слой в иной постановке.

Таким образом поставленная задача свелась к системе нелинейных дифференциальных уравнений (3), (4) с ограничениями (5). Неизвестными являются w, T_1, T_2, q и Ω_c.

[1] *Зозуля В. В., Бороденко Ю. Н.* Связанная задача о контакте цилиндрической оболочки с твердым телом в температурном поле при различных условиях теплообмена с внешней средой. Харьков, 1987. 27 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 23.02.88, № 531–Ук88.

Для решения задачи перейдем от системы уравнений (3), (4) к системе интегральных уравнений [4]. Построив функции Грина $G_1(x, t, \xi, \tau)$, $G_2(x, t, \xi, \tau)$, $G_3(x, \xi)$ для дифференциальных операторов

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{3r^2}{h^2}-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{15r^2}{h^2}-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{d^4}{dx^4}+4\beta^4$$

получим

$$\int_0^t\int_\Omega G_1(x, t, \xi, \tau)F_1(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau=T_1(x, t)$$

$$\int_0^t\int_\Omega G_2(x, t, \xi, \tau)F_2(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau=T_2(x, t) \qquad (6)$$

$$\int_\Omega G_3(x, \xi)F_3(\xi, t)\,d\xi+\frac{1}{D}\int_\Omega G_3(x, \xi)[q(\xi, t)-p(\xi, t)]\,d\xi=w(x, t)$$

$$F_3=\beta_2[15r^2(T^+-T_h)/2h^2+3r(T^++T_h)/2h-15r^2T_2/h^2]+(3\beta_2r/h-\beta_1r^2)T_1$$

Эту систему нелинейных интегральных уравнений будем решать используя шаговую по времени схему, в соответствии с которой решение находится последовательно через определенные временные интервалы, отсчитываемые от начального состояния $t=0$. На каждом временном шаге решается стационарная система нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна [5, 6] итерационным методом. На каждой итерации проверяется выполнение условий (5). Точки, в которых $w<h_0$, принадлежат Ω_c, в этих точках следует положить $w=h_0$. Тогда третье уравнение системы (6) превращается в интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода для определения q и Ω_c:

$$\frac{1}{D}\int_{\Omega_c} G_3(x, \xi)q(\xi, t)=h_0(x)+\int_\Omega G_3(x, \xi)\left[\frac{1}{D}p(\xi, t)-F_3(\xi, t)\right]d\xi \qquad (7)$$

Рассмотрим вопросы обоснования разрешимости системы интегральных уравнений (6), (7) с ограничениями (5). Интегрирование по времени в первых двух интегральных уравнениях (6) — линейная операция, поскольку время в F_i явно не входит. Поэтому сложностей при реализации шаговой схемы не возникает, а точность решения зависит от аппроксимации и величины шага по времени.

Для сокращения записи при исследовании условий разрешимости и сходимости итерационного процесса запишем систему интегральных уравнений (6) на k-м временном шаге в виде суперпозиции оператора

$$\mathbf{A}_i\circ F_i[u_i(x, t_i)]+\Phi_i(x, t_{k-1})=u_i(x, t_k) \qquad (i=1, 2, 3) \qquad (8)$$

Здесь $\mathbf{A}_i$ — линейные интегральные операторы, порожденные ядрами $G_i(x, t, \xi, \tau)$, F_i — операторы Немыцкого, определенные выше, Φ_i — функции, зависящие от решения задачи на предыдущих $(k-1)$ шагах по времени, $u_1=T_1$, $u_2=T_2$, $u_3=w$. В [5] показано, что система интегральных уравнений (8) имеет решение в пространстве функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу L^2 при выполнении следующих условий. Линейные операторы $\mathbf{A}_i$ должны быть положительно определенными, а функции, порождающие операторы Немыцкого должны возрастать не быстрее линейных функций, т. е.

$$(\mathbf{A}_i u_i, u_i)>0, \quad \forall u_i \neq 0, \quad |F_i(u_i, u_2, u_3)| \leqslant \alpha_i(x)+\beta_i \sum_{k=1}^{3} u_k \qquad (9)$$

Выражение в скобках обозначает скалярное произведение в пространстве L^2, $\alpha(x) \in L^2$. Для первых двух операторов (8) оно положительно в силу того, что

$$G_k(x, t, \xi, \tau)>0, \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^1, \quad \forall t, \tau \in \mathbb{R}^+ \quad (k=1, 2) \qquad (10)$$

где $\mathbb{R}^1$ — действительная числовая ось, $\mathbb{R}^+$ — положительная ее часть. Для третьего оператора скалярное произведение (9) с точностью до постоянной совпадает с выражением для энергии оболочки и поэтому также положительно. Можно проверить, что второе условие в (9) выполняется для всех F_i. Таким образом на каждом временном шаге система интегральных уравнений типа Гаммерштейна имеет решение в L^2. Если линейные операторы $\mathbf{A}_i$ из (8) положительны, а отношение F_i/u_i убывает на бесконечности, т. е.

$$A_i u_i>0, \quad \forall u_i>0, \quad \lim_{u_i \to \infty} \frac{F_i(u_1, u_2, u_3)}{u_i}=0 \quad (i=1, 2, 3) \qquad (11)$$

то система интегральных уравнений (8) может быть решена методом простых итераций [7]. Свойство (10) функций Грина обеспечивает положительность порождаемых ими линейных интегральных операторов. Очевидно, что второе условие в (11) выполняется для всех F_i. Для оператора $\mathbf{A}_3$ вопрос о его положительности не имеет однозначного решения. Применительно к нему первое условие (11) означает, что при положительной внешней нагрузке прогиб оболочки должен быть положительным. Как известно, в общем случае это не так, приложение положительных нагрузок в одном месте может вызвать отрицательные перемещения в других. Тем не менее для многих практически важных случаев это свойство имеет место. Например для коротких оболочек или бесконечных, если область определения оператора достаточно мала (длина $\Omega \leqslant 3\pi/4\beta$). Когда нагрузки не сильно отличаются от постоянных, то это ограничение можно значительно ослабить или вовсе снять. Численные расчеты показали, что в большинстве рассматриваемых случаев наблюдалась хорошая сходимость метода итераций.

Как известно [7], интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода принадлежат к классу некорректных. Решение интегрального уравнения (7) существует только в классе обобщенных функций [8]. При аппроксимации обобщенных решений классическими и проявляется некорректность задачи заключающаяся в том, что малые ошибки в $G_3(x, \xi)$ и правой части уравнения (7) приводят к большим ошибкам в $q(x)$. Так применение квадратурных формул приводит к тому, что при большом шаге разбиения Ω_e получаем устойчивое, но очень грубое решение, а с уменьшением шага, вместо уточнения решения с некоторого момента, получаем быстро осциллирующую функцию, не имеющую ничего общего с $q(x)$. Для решения таких задач применяются регуляризующие алгоритмы [7]. В [9] проанализированы различные методы регуляризации применительно к решению контактных задач теории оболочек. Там показано, что уравнение (7) наиболее эффективно решается методом регуляризации Лаврентьева, который заключается в преобразовании его к виду

$$\alpha_* q(x)+\int_{\Omega_e} G_3(x, \xi) q(\xi, t) d\xi=\Phi(x) \qquad (12)$$

Здесь $\Phi(x)$ — правая часть (7), α_* — параметр регуляризации, выбор и физический смысл которого подробно рассмотрен ранее [2].

Трудность решения уравнения Фредгольма 2-го рода [12] заключается в том, что область Ω_c заранее не известна. Для ее определения используется следующий алгоритм. Так как система интегральных уравнений (6), (7) решается численно, методом квадратурных формул, то условия плотного контакта удовлетворяются в отдельных n точках области Ω_c. Если в процессе решения системы уравнений (6) имеются точки, в которых $w(x)<h_0$, то в первом приближении принимаем $\Omega_1=\{x_i : w(x_i)=\min[w(x_j)],\ j=1,2,\dots,n\}$ и определяем $q(x_i)$ из уравнения (12). Затем с учетом $q(x_i)$ из третьего уравнения (7) определяем $w(x)$. Если $w(x)<h_0$ в точках x_{i-1} и x_{i+1}, то $\Omega_2=\{x_{i-1},x_i,x_{i+1}\}$. Процесс продолжается до тех пор пока $w(x)\geqslant h_0$ во всех точках Ω. Следует иметь в виду, что в некоторых точках зоны контакта Ω_k может оказаться $q<0$. В этих точках следует положить $q=0$ и переходить к следующему этапу определения Ω_c. Решение уравнения (12) найдено, если условие (5) выполняется во всех точках Ω.

Вопрос о сходимости этого метода определения Ω_c и q решается просто, если поверхность S выпукла или вогнута, а ее кривизна меньше кривизны деформированной срединной поверхности оболочки. В этом случае на основании свойства положительности (11) оператора $\mathbf{A}_3$ можно показать, что $\Omega_1\subset\Omega_2\subset\Omega_3\subset\dots\subset\Omega_m$, тогда

$$\Omega_c=\lim_{k\to\infty}\bigcup_{k=1}^{m}\Omega_k \tag{13}$$

В силу того, что последовательность множеств Ω_k замкнута и ограничена, а также свойства полноты действительных чисел заключаем, что предел в (13) существует и единственный. Если поверхность S не обладает указанными свойствами, то описанный алгоритм сходится, но доказательство сходимости становится более громоздким.

Изложенный подход применялся к решению конкретных задач термоупругости и теплопроводности оболочек. Расчеты показали, что даже в квазистационарном случае, когда температура изменяется не слишком быстро и в уравнениях (1), (3) можно положить $\partial T_k/\partial t=0$ $(k=1,2)$. Эффект связанности уравнений теплопроводности (3) и термоупругости (4) может оказать существенное влияние на напряженно-деформированное и температурное состояние оболочки.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим пример расчета оболочки по предложенной методике. Чтобы упростить расчеты рассмотрим бесконечную оболочку под действием только температурного поля. Будем считать, что ненапряженное и недеформированное состояние оболочки соответствует температуре $T^0(x,z)$. Пусть на поверхности S произошло квазистатическое изменение температуры по закону $T^-(x)=T_m^-\sin(\pi x/l)$, где l — зона возмущения температурной нагрузки. Геометрические параметры оболочки: $r=1$ м, $h=0{,}01$ м, $l=1$ м, $h_0=0{,}4h$. Механические и тепловые характеристики: $E=100$ ГПа, $\nu=0{,}25$, $\alpha=2{,}5\cdot10^{-5}$, $\lambda_i=50$ Вт/м·град, $\lambda_*=20$ Вт/м·град, $T_m^-=-500°$ С.

Результаты вычислений приведены в таблице. В числителе даны значения термоупругих параметров оболочки, рассчитанные без учета изменения условий теплообмена при деформациях, а в знаменателе — по изложенной методике. Из таблицы видно, что имеет место значительное различие в численных значениях напряжений, прогибов и температуры. Так, температура отличается в два раза, а напряжения еще больше. Более того,

[2] *Кантор Б. Я., Зозуля В. В.* Контактные задачи теории оболочек: математические аспекты проблемы. Харьков, 1988. 95 с.– Деп. в ВИНИТИ 16.02.88. № 1251–88.

	T^-	T_k	T_2	w/h_*	σ_x	σ_φ^+	σ_φ^-	q
1	−100	$\frac{-50{,}0}{-51{,}7}$	$\frac{25{,}0}{25{,}9}$	$\frac{0{,}003}{0{,}067}$	$\frac{-10{,}2}{-14{,}7}$	$\frac{1{,}28}{-23{,}3}$	$\frac{-3{,}84}{-2{,}63}$	$\frac{0{,}00}{0{,}00}$
2	−204	$\frac{-102}{-113}$	$\frac{50{,}9}{56{,}4}$	$\frac{0{,}165}{0{,}197}$	$\frac{92{,}1}{97{,}7}$	$\frac{-89{,}1}{-104}$	$\frac{86{,}4}{102}$	$\frac{0{,}00}{0{,}00}$
3	−300	$\frac{-150}{-191}$	$\frac{75{,}0}{95{,}4}$	$\frac{0{,}345}{0{,}431}$	$\frac{200}{263}$	$\frac{-189}{-238}$	$\frac{162}{245}$	$\frac{0{,}00}{0{,}00}$
4	−383	$\frac{-191}{-297}$	$\frac{95{,}7}{148}$	$\frac{0{,}494}{0{,}714}$	$\frac{286}{491}$	$\frac{-269}{-409}$	$\frac{227}{453}$	$\frac{0{,}00}{0{,}00}$
5	−446	$\frac{-223}{-407}$	$\frac{112}{209}$	$\frac{0{,}604}{0{,}932}$	$\frac{350}{746}$	$\frac{-330}{-560}$	$\frac{278}{731}$	$\frac{0{,}00}{0{,}00}$
6	−486	$\frac{-243}{-486}$	$\frac{121}{243}$	$\frac{0{,}673}{1{,}0}$	$\frac{390}{889}$	$\frac{-367}{-623}$	$\frac{311}{912}$	$\frac{0{,}00}{0{,}701}$
7	−500	$\frac{-250}{-500}$	$\frac{125}{250}$	$\frac{0{,}697}{1{,}0}$	$\frac{404}{918}$	$\frac{-380}{-631}$	$\frac{322}{953}$	$\frac{0{,}00}{1{,}096}$

расчеты по этим двум методикам приводят к качественно различным расчетным схемам: в первом случае оболочка деформируется свободно, во втором она вступает в контакт с поверхностью S и образуется зона плотного контакта Ω_c (точки 6 и 7 в таблице).

Таким образом, неучет изменения условий теплообмена в процессе деформации тонкостенных элементов конструкций, работающих в стесненных условиях при больших градиентах температуры, может привести к ошибкам в расчетах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лихачев Ю. И., Пупко В. Я.* Прочность тепловыделяющих элементов ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1975. 278 с.
2. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Контактные задачи теории тонких анизотропных оболочек. Киев: Наук. думка, 1980. 216 с.
3. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. Киев: Наук. думка, 1976. 310 с.
4. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
5. *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: Гостехиздат, 1956. 344 с.
6. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 155 с.
7. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 287 с.
8. *Иманалиев М. И.* Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода. Фрунзе: Илим, 144 с.
9. *Зозуля В. В., Кантор Б. Я.* Осесимметричные контактные задачи теории оболочек // Прикл. механика. 1989. Т. 25. N 10. С. 64–69.

Киев

Поступила в редакцию
13.VIII.1987