МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1992

УДК 539.3:534.1

 Т. Д. СОФРОНОВА, Ф. Н. ШКЛЯРЧУК

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОТСЕКОВ К РАСЧЕТУ КОЛЕБАНИЙ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ТОНКОСТЕННЫМИ ШПАНГОУТАМИ

Для расчета колебаний осесимметричных оболочечных конструкций, подкрепленных шпангоутами, может быть использован метод численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (после отделения окружной координаты) с ортогонализацией решений в ряде отдельных точек [1]. Этот метод является весьма трудоемким, особенно при определении собственных частот колебаний, когда приходится по много раз решать краевую задачу, задаваясь значениями частот в определенном диапазоне.

При использовании метода конечных элементов (МКЭ) ширина кольцевых конечных элементов, на которые делится оболочка вращения [2], для обеспечения необходимой точности аппроксимации должна быть значительно меньше длины зоны изгибного краевого эффекта. В результате для удлиненных тонкостенных конструкций, состоящих из большого числа отсеков тонких оболочек вращения, система уравнений МКЭ имеет очень высокий порядок и является плохо обусловленной, что сильно усложняет получение устойчивого решения.

В публикуемой работе для расчета колебаний осесимметричных конструкций, имеющих отсеки цилиндрических оболочек и тонкостенные шпангоуты с произвольной формой поперечного сечения используется метод отсеков [3]. Конструкция поперечными сечениями делится на отсеки, которые рассматриваются как укрупненные конечные элементы или суперэлементы. Длина каждого отсека при этом должна превышать длину зоны простого краевого эффекта, равную, например, в случае изотропной цилиндрической оболочки $\sim 2{,}5(Rh)^{1/2}$, где R и h – радиус и толщина оболочки. Для отсека круговой цилиндрической оболочки используется квазистатическая аппроксимация перемещений, которые определяются на основании точного решения по безмоментной теории с учетом продольного изгиба вблизи краев в виде простого краевого эффекта. При вычислении потенциальной энергии оболочки отсека учитывается также окружной изгиб.

Для кольцевых тонкостенных шпангоутов с произвольной формой недеформируемого поперечного сечения матрицы жесткости и инерции получены на основании точного решения с учетом депланации поперечных сечений. Учитываются эксцентриситеты соединения упругих шпангоутов с краями оболочек.

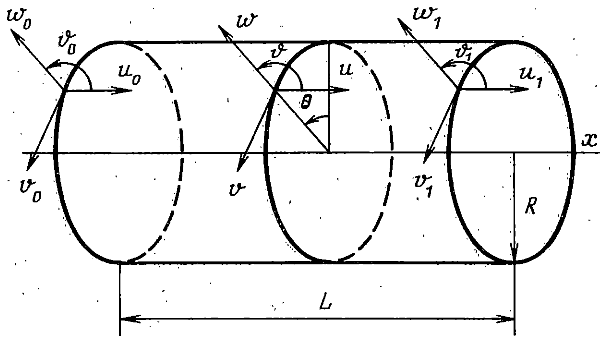
Перемещения оболочек и шпангоутов представляются в виде разложений в тригонометрические ряды по окружной координате. В качестве обобщенных координат рассматриваются амплитудные значения перемещений и углов закручивания шпангоутов или линий соединения соседних отсеков.

1. Отсек цилиндрической оболочки с безмоментными краями. Рассмотрим отсек ортотропной цилиндрической оболочки, (фиг. 1). Перемещения оболочки представим в виде разложений по окружной координате

$$\{u, w\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{u^{(n)}, w^{(n)}\} \cos n\theta, \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} v^{(n)} \sin n\theta$$

Угол поворота определяется из соотношения

$$R\vartheta = \frac{1}{l}\frac{dw}{d\alpha}, \quad \alpha = \frac{x}{L}, \quad l = \frac{L}{R} \tag{1.1}$$



Фиг. 1

В качестве обобщенных координат, представляющих перемещения оболочки, будем рассматривать их амплитудные значения на краях отсека: $w^{(n)}$, $R\vartheta^{(n)}$, $u^{(n)}$, $v^{(n)}$ для моментной оболочки; $u^{(n)}$, $v^{(n)}$ для безмоментной или полубезмоментной оболочки. Далее результаты приведем только для одной n-й гармоники ($n=0, 1, 2, \ldots$) и для упрощения записи верхний индекс n будем опускать.

Перемещения в пределах длины отсека, полученные на основании точного решения однородной статической задачи для безмоментной оболочки [4], выражаются через перемещения на краях отсека u_0, v_0, u_1, v_1 в виде

$$
\begin{gathered}
u=u_0\chi_0(\alpha)+u_1\chi_1(\alpha)+(v_1-v_0)\chi_{01}(\alpha)\\
v=u_0\psi_0(\alpha)+u_1\psi_1(\alpha)+(v_1-v_0)\psi_{01}(\alpha)+v_0\\
w=-\left(nv+\frac{\mu_x}{l}\frac{du}{d\alpha}\right),\quad \chi_0(\alpha)=1-(3\varkappa_n+1)\alpha+3\varkappa_n\alpha^2\\
\chi_1(\alpha)=(1-3\varkappa_n)\alpha+3\varkappa_n\alpha^2,\quad \chi_{01}(\alpha)=-\frac{6\varkappa_n}{nl}(\alpha-\alpha^2)\\
\psi_0(\alpha)=\frac{nl}{2}[(1+\varkappa_n)\alpha-(3\varkappa_n+1)\alpha^2+2\varkappa_n\alpha^3]\\
\psi_1(\alpha)=\frac{nl}{2}[(\varkappa_n-1)\alpha+(1-3\varkappa_n)\alpha^2+2\varkappa_n\alpha^3]\\
\psi_{01}(\alpha)=(1-\varkappa_n)\alpha+3\varkappa_n\alpha^2-2\varkappa_n\alpha^3\\
\varkappa_n=\left[1+\frac{12}{n^2}\frac{R^2}{L^2}\frac{E_x}{G}\right]^{-1}
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

Здесь E_x, E_θ, μ_x, μ_θ — приведенные модули упругости и коэффициенты Пуассона ортотропной оболочки в продольном и окружном направлениях, G — модуль сдвига в срединной поверхности оболочки.

Далее для упрощения записи перейдем к матричной форме. Обозначим

$$
\mathbf{X}=\begin{Vmatrix}u_0\\v_0\\u_1\\v_1\end{Vmatrix},\quad \mathbf{a}=\begin{Vmatrix}1\\\alpha\\\alpha^2\\\alpha^3\end{Vmatrix},\quad \mathbf{a}'=\begin{Vmatrix}0\\1\\2\alpha\\3\alpha^2\end{Vmatrix}=\mathbf{Pa},\quad \mathbf{P}=\begin{Vmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\end{Vmatrix}
\tag{1.3}
$$

Тогда выражения (1.2) запишутся в виде

$$
u=\mathbf{a}^T\mathbf{AX},\qquad v=\mathbf{a}^T\mathbf{BX},\qquad w=\mathbf{a}^T\mathbf{CX},\qquad R\vartheta=l^{-1}\mathbf{a}'^T\mathbf{CX}
\tag{1.4}
$$

$$
\mathbf{A}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -(1+3\varkappa_n) & -\dfrac{6\varkappa_n}{nl} & 1-3\varkappa_n & \dfrac{6\varkappa_n}{nl} \\ 3\varkappa_n & \dfrac{6\varkappa_n}{nl} & 3\varkappa_n & -\dfrac{6\varkappa_n}{nl} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}
$$

$$
\mathbf{B}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{nl}{2}(1+\varkappa_n) & \varkappa_n-1 & -\dfrac{nl}{2}(1-\varkappa_n) & 1-\varkappa_n \\ -\dfrac{nl}{2}(1+3\varkappa_n) & -3\varkappa_n & \dfrac{nl}{2}(1-3\varkappa_n) & 3\varkappa_n \\ nl\varkappa_n & 2\varkappa_n & nl\varkappa_n & -2\varkappa_n \end{Vmatrix}
$$

$$
\mathbf{C}=-\|n\mathbf{B}+(\mu_x/l)\,\mathbf{P}^T\mathbf{A}\|
$$

Используя полученные решения в форме (1.4), запишем выражения для потенциальной и кинетической энергий отсека безмоментной оболочки в обобщенных координатах

$$
\Pi_\delta=1/2\mathbf{X}^T\mathbf{K}_\delta\mathbf{X},\qquad T_\delta=1/2\dot{\mathbf{X}}^T\mathbf{M}_\delta\dot{\mathbf{X}} \tag{1.5}
$$

$$
\mathbf{K}_\delta=\varepsilon_n\frac{\pi E_x h}{l}\begin{Vmatrix} 3\varkappa_n+1 & \dfrac{6\varkappa_n}{nl} & 3\varkappa_n-1 & -\dfrac{6\varkappa_n}{nl} \\ \dfrac{6\varkappa_n}{nl} & -\dfrac{12\varkappa_n}{n^2l^2} & \dfrac{6\varkappa_n}{nl} & -\dfrac{12\varkappa_n}{n^2l^2} \\ 3\varkappa_n+1 & \dfrac{6\varkappa_n}{nl} & 3\varkappa_n-1 & -\dfrac{6\varkappa_n}{nl} \\ -\dfrac{6\varkappa_n}{nl} & -\dfrac{12\varkappa_n}{n^2l^2} & -\dfrac{6\varkappa_n}{nl} & \dfrac{12\varkappa_n}{n^2l^2} \end{Vmatrix}
$$

$$
\mathbf{M}_\delta=\varepsilon_n\pi R m_0 L\,[\mathbf{A}^T\mathbf{D}\mathbf{A}+\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}+\mathbf{C}^T\mathbf{D}\mathbf{C}] \tag{1.6}
$$

$$
\mathbf{D}=\|d_{ij}\|,\quad d_{ij}=\frac{1}{i+j-1},\quad (i,j=1,2,3,4)
$$

где $\mathbf{K}_\delta$ — матрица жесткости, $\mathbf{M}_\delta$ — матрица инерции, h — толщина, m_0 — удельная масса оболочки; $\varepsilon_n=2$ при $n=0$, и $\varepsilon_n=1$ при $n\geqslant1$.

Учтем дополнительно потенциальную энергию окружного изгиба отсека оболочки

$$
\Pi_u={}^1/_2\varepsilon_n\pi RD_0L\int_0^1\varkappa_\theta^2\,d\alpha \tag{1.7}
$$

$$
\varkappa_\theta=n(v+nw)/R^2
$$

где D_0 — цилиндрическая жесткость ортотропной оболочки на изгиб в окружном направлении.

Выражение (1.7) с учетом (1.4) записывается в виде

$$
\Pi_u={}^1/_2\mathbf{X}^T\mathbf{K}_u\mathbf{X}
$$

$$
\mathbf{K}_u=\varepsilon_n n^2\pi D_0LR^{-3}\,[\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}+n\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{C}+n(\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{C})^T+n^2\mathbf{C}^T\mathbf{D}\mathbf{C}] \tag{1.8}
$$

Таким образом с учетом окружного изгиба потенциальная энергия отсека оболочки будет

$$
\Pi=\Pi_\delta+\Pi_u={}^1/_2\mathbf{X}^T\mathbf{K}\mathbf{X},\qquad \mathbf{K}=\mathbf{K}_\delta+\mathbf{K}_u \tag{1.9}
$$

При $n\geqslant 1$ можно положить $\mu_x=0$ и тогда (1.9) будет соответствовать полубезмоментной теории цилиндрической оболочки.

2. Отсек оболочки с одним моментным и другим безмоментным краями. Рассмотрим сначала случай, когда оболочка отсека подвергается продольному изгибу вблизи левого края $x=0$, а правый край $x=L$ остается безмоментным. Продольный изгиб тонкой оболочки при небольших значениях n определим приближенно на основе теории простого краевого эффекта (для изотропной цилиндрической оболочки это возможно при $n^2\leqslant 12(R/h)^{1/2}$ [4]). Тогда перемещения u, v будут такими же как для безмоментной оболочки (1.2), а нормальное перемещение равно

$$w=e^{-\lambda\alpha}(b_1\cos\lambda\alpha+b_2\sin\lambda\alpha)-\left(nv+\mu_x l^{-1}\frac{du}{d\alpha}\right),\quad (\lambda^4=E_0hL^4/(4D_xR^2))\qquad(2.1)$$

где D_x — цилиндрическая жесткость ортотропной оболочки на изгиб в продольном направлении; b_1, b_2 — произвольные константы. Для удобства вычислений (2.1) запишем в виде

$$w=e^{-\lambda\alpha}(b_1\cos\lambda\alpha+b_2\sin\lambda\alpha)+C_0+C_1\alpha+C_2\alpha^2+C_3\alpha^3\qquad(2.2)$$

где константы C_0, C_1, C_2, C_3 совместно с b_1, b_2 представляют вектор $\mathbf{f}=\{b_1b_2C_0C_1C_2C_3\}^T$.

Деформация отсека с моментным левым и безмоментным правым краями характеризуется вектором обобщенных координат $\mathbf{Y}_0=\{w_0R\vartheta_0u_0v_0u_1v_1\}^T$, где в данном случае по сравнению с вектором X для безмоментной оболочки введено две дополнительных обобщенных координаты w_0 и $R\vartheta_0$, представляющих нормальное перемещение и умноженный на радиус угол поворота на левом краю отсека. Из сравнения (2.1) и (2.2) с учетом (1.2) получим следующее соотношение между векторами $\mathbf{f}$ и $\mathbf{Y}_0$:

$$\mathbf{f}=\mathbf{\Phi Y}_0,\qquad \mathbf{\Phi}=\left\|\begin{array}{c|c}\multicolumn{2}{c}{\mathbf{\Omega}}\\ \hline 0_{2\times4} & \mathbf{C}\end{array}\right\|\qquad(2.3)$$

$$\mathbf{\Omega}=\left\|\begin{matrix}1 & 0 & -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} & -c_{14}\\ 2 & \dfrac{1}{\lambda} & -\left(c_{11}+\dfrac{c_{21}}{\lambda}\right) & -\left(c_{12}+\dfrac{c_{22}}{\lambda}\right) & -\left(c_{13}+\dfrac{c_{23}}{\lambda}\right) & -\left(c_{14}+\dfrac{c_{24}}{\lambda}\right)\end{matrix}\right\|$$

где $\mathbf{C}$ — матрица (1.3) порядка 4×4, а c_{ij} — ее элементы.

Потенциальная энергия безмоментной деформации Π_6^0 записывается также как (1.5). Потенциальная энергия изгиба оболочки вблизи левого края будет $\Pi_k^0={}^1/_2\varepsilon_n\pi E_\theta hl(b_1^2+b_2^2)/(2\lambda)$ или с учетом преобразования (2.3)

$$\Pi_k^0={}^1/_2\mathbf{Y}_0^T\mathbf{K}_k^0\mathbf{Y}_0,\qquad \mathbf{K}_k^0=\varepsilon_n\pi E_\theta hl\mathbf{\Omega}^T\mathbf{\Omega}/(2\lambda)\qquad(2.4)$$

Потенциальная энергия окружного изгиба оболочки (1.7) с учетом (2.2) и (2.3) запишется в виде

$$\Pi_u^0={}^1/_2\mathbf{Y}_0^T\mathbf{K}_u^0\mathbf{Y}_0,\qquad(2.5)$$

$$\mathbf{K}_u^0=\varepsilon_n\pi n^2D_\theta LR^{-3}[\mathbf{B}^{0T}\mathbf{D}\mathbf{B}^0+n\mathbf{B}^{0T}\mathbf{H\Phi}+n(\mathbf{B}^{0T}\mathbf{H\Phi})^T+n^2\mathbf{\Phi}^T\mathbf{S\Phi}]$$

$$\mathbf{H}=\|\mathbf{A}^T\,\vdots\,\mathbf{D}\|,\quad \mathbf{S}=\left\|\begin{array}{c|c}\mathbf{\Gamma} & \mathbf{A}\\ \hline \mathbf{A}^T & \mathbf{D}\end{array}\right\|,\quad \mathbf{\Gamma}=\frac{1}{8\lambda}\left\|\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\|$$

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2\lambda}\left\|\begin{matrix}1 & 0 & -\lambda^{-2} & -3\lambda^{-3}\\ 1 & \lambda^{-1} & \lambda^{-2} & 0\end{matrix}\right\|\qquad(2.6)$$

где $\mathbf{B}^0$ — матрица размерностью 6×4, которая получается путем добавления в матрице $\mathbf{B}$ первых двух нулевых столбцов.

В результате потенциальная энергия отсека ортотропной оболочки с учетом окружного изгиба и продольного изгиба в районе левого края ($\alpha=0$) записывается в виде $\Pi^\circ=\Pi_\delta^\circ+\Pi_u^\circ+\Pi_k^\circ$ или

$$\Pi^\circ={}^1/_2\mathbf{Y}_0^T\mathbf{K}^\circ\mathbf{Y}_0; \quad \mathbf{K}^\circ=\mathbf{K}_\delta^\circ+\mathbf{K}_u^\circ+\mathbf{K}_k^\circ \tag{2.7}$$

где $\mathbf{K}_\delta^\circ$ — матрица жесткости безмоментной оболочки, соответствующая вектору $\mathbf{Y}_0$; она получается из матрицы $\mathbf{K}_\delta$ путем окаймления ее слева двумя нулевыми столбцами и сверху двумя нулевыми строками.

Кинетическая энергия отсека с моментным левым краем

$$T^\circ={}^1/_2\dot{\mathbf{Y}}_0^T\mathbf{M}^\circ\dot{\mathbf{Y}}_0, \qquad \mathbf{M}^\circ=\varepsilon_n\pi m_0 R[\mathbf{A}^{\circ T}\mathbf{D}\mathbf{A}^\circ+\mathbf{B}^{\circ T}\mathbf{D}\mathbf{B}^\circ+\mathbf{\Phi}^T\mathbf{S}\mathbf{\Phi}] \tag{2.8}$$

где $\mathbf{A}^\circ$ — матрица размерностью 6×4, которая получается путем добавления к матрице $\mathbf{A}$ первых двух нулевых столбцов (также как $\mathbf{B}^\circ$ получается из $\mathbf{B}$).

Если отсек оболочки подвергается продольному изгибу на правом краю $\alpha=l$, а левый край считается безмоментным, то для него все результаты могут быть получены из предыдущего случая путем следующих замен: $w_0\Rightarrow w_1$, $R\vartheta_0\Rightarrow -R\vartheta_1$, $u_0\Rightarrow -u_1$, $v_0\Rightarrow v_1$, $u_1\Rightarrow -u_0$, $v_1\Rightarrow v_0$, $\alpha\Rightarrow l-\alpha$. В этом случае вектор $\mathbf{Y}_0$ следует заменить на вектор $\mathbf{Y}_1$ как

$$\mathbf{Y}_0\to\mathbf{N}\mathbf{Y}_1 \tag{2.9}$$

$$\mathbf{Y}_1=\begin{Vmatrix} u_0\\ v_0\\ w_1\\ R\vartheta_1\\ u_1\\ v_1\end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{N}=\begin{Vmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ -1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\end{Vmatrix}$$

Тогда выражения потенциальной и кинетической энергий отсека с безмоментным левым и моментным правым краями будут

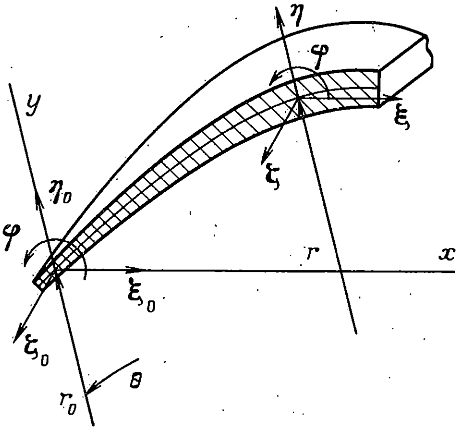
$$\Pi^1={}^1/_2\mathbf{Y}_1^T\mathbf{K}^1\mathbf{Y}_1, \qquad T^1={}^1/_2\dot{\mathbf{Y}}_1^T\mathbf{M}^1\dot{\mathbf{Y}}_1$$
$$\mathbf{K}^1=\mathbf{N}^T\mathbf{K}^\circ\mathbf{N}, \qquad \mathbf{M}^1=\mathbf{N}^T\mathbf{M}^\circ\mathbf{N} \tag{2.10}$$

Если у оболочки оба края моментные, то при условии, что ее длина превышает длину зоны краевого эффекта, эту оболочку можно разделить поперечным сечением на два отсека и края, совпадающие с данным сечением, рассматривать как безмоментные. К этим отсекам можно применить полученные выше результаты.

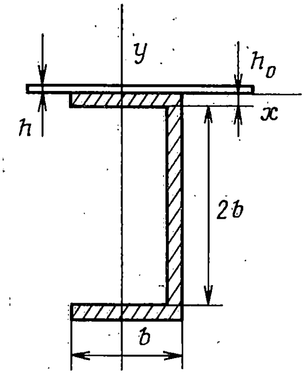
3. Тонкостенный шпангоут. Рассмотрим упругое тонкостенное кольцо с произвольным недеформируемым контуром поперечного сечения (фиг. 2). Осевое, радиальное и окружное перемещения (ξ, η, и ζ) на некоторой произвольно выбранной окружности радиуса r_0, которая проходит через начало координат $0xy$ в поперечном сечении кольца, и угол закручивания φ представляются в виде разложений

$$\{\xi_0,\eta_0,\varphi\}=\sum_{n=0}^{\infty}\{\xi_0^{(n)},\eta_0^{(n)},\varphi^{(n)}\}\cos n\theta, \quad \zeta_0=\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_0^{(n)}\sin n\theta \tag{3.1}$$

В качестве обобщенных координат будем рассматривать амплитудные значения этих перемещений и угла закручивания, умноженного на r_0. Вектор этих обобщенных координат обозначим через $\mathbf{q}_0=\{\eta_0^{(n)}r_0\varphi^{(n)}\xi_0^{(n)}\zeta_0^{(n)}\}^T$. Вектор амплитудных значений перемещений и угла закручивания на окружности радиуса $r_i=r_0+y_i$ с координатами $x=x$, $y=y$ (фиг. 2) будет $\mathbf{q}_i=\{\eta_i^{(n)}r_i\varphi^{(n)}\xi_i^{(n)}\zeta_i^{(n)}\}^T$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Для тонкостенного кольца с недеформируемым поперечным сечением с учетом его депланации согласно [5] получим

$$\mathbf{q}_i=\mathbf{C}_i\mathbf{q}_0 \tag{3.2}$$

$$\mathbf{C}_i=\begin{Vmatrix} 1 & \dfrac{x_i}{r_0} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{r_i}{r_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{y_i}{r_0} & 1 & 0 \\ n\dfrac{y_i}{r_0} & n\dfrac{\omega_i}{r_0^2} & n\left(\dfrac{x_i}{r_0}+\dfrac{\omega_i}{r_0^2}\right) & \dfrac{r_i}{r_0} \end{Vmatrix}, \qquad \omega=rr_0\int\limits_0^s \frac{1}{r^2}(x\,dy-y\,dx)$$

где s — координата, отсчитываемая вдоль срединной линии профиля ($s=0$, при $x=y=0$).

Выражения потенциальной и кинетической энергий кольца для n-ой гармоники, вычисленные при использовании разложения $r^{-1}=(r_0+y)^{-1}$ по степеням y до членов, содержащих обычные геометрические характеристики поперечного сечения (как в теории прямолинейных тонкостенных стержней [6]) записываются в виде

$$\Pi_0={}^1/_2\mathbf{q}_0{}^T\mathbf{K}_0\mathbf{q}_0, \qquad T_0={}^1/_2\mathbf{q}_0^{\cdot T}\mathbf{M}_0\mathbf{q}_0^{\cdot} \tag{3.3}$$

Коэффициенты матриц жесткости кольца $\mathbf{K}_0=\|k_{ij}\|_{4\times4}$ и инерции $\mathbf{M}=\|m_{ij}\|_{4\times4}$ вычисляются по следующим формулам ($k_{ij}=k_{ji}$, $m_{ij}=m_{ji}$):

$$\begin{gathered}
k_{11}=\varepsilon_n\pi E_1r_0^{-3}[Fr_0^2+(2n^2-1)S_xr_0+(n^2-1)^2I_x]\\
k_{12}=\varepsilon_n\pi E_1r_0^{-4}[n^2(n^2-1)I_{y\omega}+(n^2-1)I_{xy}r_0+n^2S_\omega r_0+S_yr_0^2]\\
k_{13}=\varepsilon_n\pi E_1r_0^{-4}n^2[(n^2-1)(I_{xy}r_0+I_{y\omega})+S_yr_0^2+S_\omega r_0]\\
k_{14}=\varepsilon_n\pi E_1r_0^{-2}n[Fr_0+n^2S_x]\\
k_{22}=\varepsilon_n\pi E_1r_0^{-5}[n^4I_\omega+2n^2I_{x\omega}r_0+I_yr_0^2]+\varepsilon_n\pi r_0^{-3}n^2GJ_k\\
k_{23}=\varepsilon_n\pi E_1r_0^{-5}n^2[(n^2+1)I_{x\omega}r_0+n^2I_\omega+I_yr_0^2]+\varepsilon_n\pi r_0^{-3}n^2GJ_k\\
k_{24}=\varepsilon_n\pi E_1r_0^{-3}n[n^2S_\omega+S_yr_0]\\
k_{33}=\varepsilon_n\pi E_1r_0^{-5}n^4[I_yr_0^2+2I_{x\omega}r_0+I_\omega]+\varepsilon_n\pi r_0^{-3}n^2GJ_k\\
k_{34}=\varepsilon_n\pi E_1r_0^{-3}n^3[S_yr_0+S_\omega]\\
k_{44}=\varepsilon_n\pi E_1r_0^{-2}n^2[Fr_0+S_x]
\end{gathered} \tag{3.4}$$

$$
\begin{gathered}
m_{11}=\varepsilon_n\pi\rho r_0^{-1}[Fr_0^2+S_xr_0+n^2I_x]\\
m_{12}=\varepsilon_n\pi\rho r_0^{-2}[S_yr_0^2+I_{xy}r_0+n^2I_{y\omega}]\\
m_{13}=\varepsilon_n\pi\rho r_0^{-2}n^2[I_{xy}r_0+I_{y\omega}]\\
m_{14}=\varepsilon_n\pi\rho r_0^{-1}n[S_xr_0+2I_x]\\
m_{22}=\varepsilon_n\pi\rho r_0^{-3}[I_xr_0^2+I_yr_0^2+n^2I_\omega]\\
m_{23}=\varepsilon_n\pi\rho r_0^{-3}[-S_xr^3-I_xr_0^2+n^2I_{x\omega}r_0+n^2I_\omega]\\
m_{24}=\varepsilon_n\pi\rho r_0^{-2}n[S_\omega r_0+2I_{y\omega}]\\
m_{33}=\varepsilon_n\pi\rho r_0^{-3}[Fr_0^4+S_xr^3+n^2I_yr_0^2+2n^2I_{x\omega}r_0+n^2I_\omega]\\
m_{34}=\varepsilon_n\pi\rho r_0^{-2}n[S_yr_0^2+S_\omega r_0+2I_{xy}r_0+2I_{y\omega}]\\
m_{44}=\varepsilon_n\pi\rho r_0^{-1}[Fr_0^2+3S_xr_0+3I_x]
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

$$
GJ_k=G\frac{r_0^3}{3}\int\limits_s\frac{h_0^3}{r^3}ds\approx G\frac{1}{3}\int\limits_s h_0^3\,ds;\quad G=\frac{E}{2(1+\mu)},\quad E_1=\frac{E}{(1-\mu^2)}
$$

где E, μ, $h_0(s)$, ρ — модуль упругости, коэффициент Пуассона, толщина и плотность кольца.

В формулах (3.4), (3.5) F, S, и I с соответствующими индексами обозначают обычные геометрические характеристики (площадь, статические моменты и моменты инерции) поперечного сечения тонкостенного кольца с учетом депланации [6]. Коэффициенты в форме (3.4), (3.5) при соответствующем выборе функции депланации ω также справедливы для колец с замкнутым тонкостенным и сплошным поперечным сечением. Для них депланация может быть принята в виде $\omega\approx xy$ или может не учитываться [6].

Условия кинематического сопряжения упругого шпангоута с левым и правым моментными краями соседних отсеков по линиям с координатами x_i, y_i и x_j, y_j, соответственно записываются в виде

$$
\mathbf{Y}_0=\mathbf{q}_i=\mathbf{C}_i\mathbf{q}_0,\qquad \mathbf{Y}_1=\mathbf{q}_j=\mathbf{C}_j\mathbf{q}_0 \tag{3.6}
$$

где матрицы $\mathbf{C}_i$ и $\mathbf{C}_j$ имеют вид (3.2). Таким образом векторы перемещений краев отсеков с помощью преобразований (3.6) выражаются через вектор перемещений кольца, компоненты которого далее рассматриваются в качестве основных обобщенных координат.

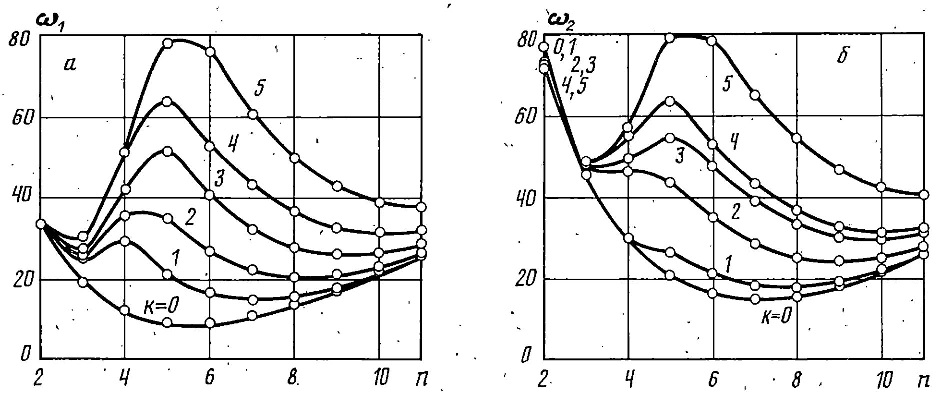
Уравнения колебаний конструкции как системы отсеков и шпангоутов составляются в обобщенных координатах по методу Лагранжа.

4. Примеры расчета и оценки точности. Для численного исследования сходимости метода, а также для целей сравнения результатов расчета с данными, полученными аналитическим путем, были проведены некоторые параметрические расчеты.

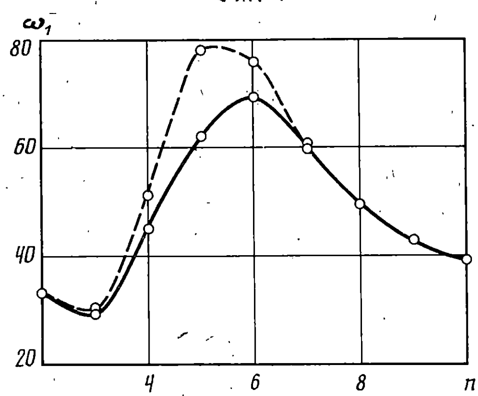
В табл. 1 приведены результаты расчетов безразмерной низшей частоты собственных колебаний $\sigma_1=\omega_1 10^2 R[\rho(1-\mu^2)/E]^{1/2}$ свободноопертой безмоментной изотропной цилиндрической оболочки со следующими параметрами $L/R=4$, $E/G=2{,}7$, $R/h=200$, $\mu=0{,}3$. Результаты даны в зависимости от числа отсеков N, на которые делилась оболочка, при $n=2$, 4, 8. Точные значения низшей собственной частоты σ_1^* получены при учете только инерции в направлении нормали к оболочке. Видно, что решение сходится по числу отсеков для каждой окружной гармоники и хорошо согласуется с точным решением.

Таблица 1

n	σ_1 $N=4$	σ_1 $N=6$	σ_1 $N=10$	σ_1^*
2	11,05	11,01	10,98	11,40
4	3,401	3,395	3,394	3,435
8	0,9014	0,9008	0,9007	0,9035



Фиг. 4



Фиг. 5

В табл. 2 приведены результаты расчетов безразмерной низшей частоты колебаний $\sigma_1 = \omega_1 10^2 R[\rho(1-\mu^2)/E]^{1/2}$ гладкой цилиндрической оболочки с учетом окружного изгиба и продольного краевого изгиба при различных условиях закрепления торцов и для различных геометрических параметров оболочки. Оболочка разбивалась на десять ($N=10$) одинаковых отсеков. Здесь же приведены значения низшей частоты σ_1^*, полученные аналитическим путем [7]. В табл. 2 используются следующие обозначения для условий закрепления на краю (Г) : s—s — оба края свободно оперты; c—c — оба края жестко защемлены.

Были проведены расчеты собственных частот колебаний изотропной цилиндрической оболочки, защемленной по обоим краям и подкрепленной с внутренней сто-

Таблица 2

Г	L/R	R/h	n	σ_1	σ_1^*
s—s	2	300	7	6,420	6,669
c—c	2	300	8	9,091	9,366
s—s	8	300	3	1,686	1,736
c—c	8	300	4	2,377	2,438
s—s	8	800	4	1,025	1,049
c—c	8	800	5	1,519	1,545
s—s	8	100	3	2,663	2,930
c—c	8	100	3	3,864	4,068
s—s	6	200	4	2,610	2,759
c—c	6	200	4	3,875	3,991

роны шпангоутами ($R/L=6$, $R/h=500$, $E/G=2{,}6$, $\mu=0{,}3$, $R=1$ м). Поперечное сечение шпангоута постоянной толщины h_0 изображено на фиг. 3. Для него принято: $h_0=2h$, $b=5h_0$. Оболочка и шпангоут сделаны из одного материала ($E/\rho=12\cdot10^{10}$ м^2/с^2). На фиг. 4 *а*, *б* представлены зависимости первой и второй частот от n при различном числе шпангоутов k, разделяющих оболочку на одинаковые отсеки. Эти результаты получены без учета депланации поперечных сечений шпангоутов (их число указано на фиг. 4 *а*, *б*). Влияние депланации на низшую частоту колебаний оболочки с пятью шпангоутами показано на фиг. 5 (штриховая линия — без учета депланации, сплошная — с учетом депланации).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мяченков В. И., Григорьев И. В.* Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ. Справочник. М.: Машиностроение, 1981, 212 с.
2. *Вольмир А. С., Куранов Б. А., Турбаивский А. Т.* Статика и динамика сложных структур. Прикладные многоуровневые методы исследований. М.: Машиностроение, 1989, 247 с.
3. *Образцов И. Ф., Булычев Л. А., Васильев В. В. и др.* Строительная механика летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1986, 536 с.
4. *Бидерман В. Л.* Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977, 489 с.
5. *Джанелидзе Г. Ю.* Теория тонкостенных криволинейных стержней, обладающих в поперечном сечении недеформируемым контуром // ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 1. С. 25–32.
6. *Власов В. З.* Избранные труды. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 507 с.
7. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник в трех томах / Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Т. 3. 567 с.

Москва

Поступила в редакцию 18.XII.1990