

УДК 539.3

© 1992 г. Л. А. ШАПОВАЛОВ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

При построении теорий слоистых конструкций из материалов с различными механическими свойствами вводится понятие жестких и мягких слоев, отличающихся энергетическим вкладом в упругий потенциал пакета [1]. Закон изменения деформаций поперечного сдвига по толщине каждого из слоев обычно задается. Чаще всего предполагается параболическое, линейное, либо постоянное распределение поперечных сдвигов в отдельном слое [1-3].

Хотя известно, что определенный произвол при аппроксимации сдвигов не вносит существенных погрешностей в напряженно-деформированное состояние конструкции [2], представляет интерес определение действительного закона изменения деформаций сдвига по толщине путем расчета, в зависимости от механических характеристик слоя. Этой цели посвящена предлагаемая работа, в которой распределение трансверсальных деформаций и напряжений находится на примере точного решения задачи об изгибе ортотропной полосы, а также приближенного решения при кубическом законе изменения продольных перемещений.

Для обоих случаев показано, что постоянство касательных напряжений по толщине асимптотически справедливо для материалов с исчезающе малым модулем сдвига. Параболический закон распределения реализуется лишь для предельного случая, когда модуль сдвига принимает неограниченно большие значения. Последний вывод согласуется с классической теорией изгиба балок, основанной на гипотезах прямой нормали.

1. Точное решение. Пусть h , l , b — высота, длина и толщина полосы, свободно опертой по торцам и отнесенной к декартовой системе координат x , z (фиг. 1). Рассматривается задача об изгибе полосы под действием постоянной погонной нагрузки q , приложенной к стороне $z=h$.

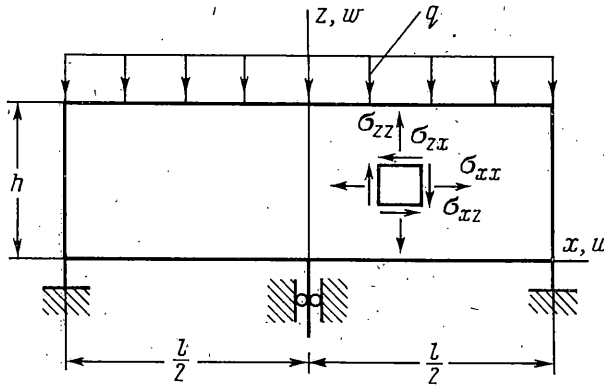
Будем предполагать, что полоса изготовлена из гипотетического ортотропного материала, модуль упругости которого в поперечном направлении неограниченно велик. Анализируя физические уравнения для такого материала

$$e_{xx} = \sigma_{xx}/E_x - \nu_{zx}\sigma_{zz}/E_z, \quad e_{zz} = -\nu_{xz}\sigma_{xx}/E_x + \sigma_{zz}/E_z \\ e_{xz} = \sigma_{xz}/G_{xz}$$

можно установить, что при $E_z \rightarrow \infty$ и отличных от нуля конечных значениях постоянных E_x , G_{xz} , ν_{zx} указанные уравнения будут непротиворечивыми при $\nu_{xz} \rightarrow 0$ и конечных напряжениях σ_{xx} , σ_{zz} , σ_{xz} . Физические уравнения подобного ортотропного материала, объединенные с соответствующими геометрическими зависимостями, существенно упрощаются и при $E_x = E$, $G_{xz} = G$ имеют вид

$$e_{xx} = \sigma_{xx}/E = \partial u / \partial x, \quad e_{zz} = \partial w / \partial z = 0 \\ e_{xz} = \sigma_{xz}/G = \partial u / \partial z + \partial w / \partial x \quad (1.1)$$

В рассматриваемом случае плоская задача теории упругости для полосы сводится к интегрированию дифференциального уравнения [4]:



Фиг. 1

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (1.2)$$

где Φ — функция напряжений, $a^{(2)} = E/G$.

Краевые условия к уравнению (1.2):

$$\begin{aligned} x=l/2: \sigma_{xx} = \partial^2 \Phi / \partial z^2 = 0 \\ z=0: \sigma_{zz} = \partial^2 \Phi / \partial x^2 = 0, \quad \sigma_{zx} = -\partial^2 \Phi / \partial x \partial z = 0 \\ z=h: \sigma_{zz} = \partial^2 \Phi / \partial x^2 = -q/b, \quad \sigma_{zx} = -\partial^2 \Phi / \partial x \partial z = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Разыскивая решение дифференциального уравнения (1.2) методом разделения переменных и полагая

$$\Phi(x, z) = \Psi(x)\chi(z) \quad (1.4)$$

придем к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям для функций Ψ и χ :

$$\Psi'' + \lambda^2 \Psi = 0, \quad \chi'''' + (a\lambda)^2 \chi'' = 0 \quad (1.5)$$

Здесь λ — неопределенный множитель, $\partial/\partial x(\dots) = (\dots)'$, $\partial/\partial z(\dots) = (\dots)''$.

С учетом краевых условий (1.3), функция $\Psi(x)$ на торцах полосы должна удовлетворять равенствам

$$x=l/2: \sigma_{xx} = \Psi \chi'' = 0, \quad \Psi(\pm l/2) = 0 \quad (1.6)$$

Уравнения (1.5), (1.6) представляют собой формулировку краевой задачи Штурма — Лиувилля для функции $\Psi(x)$. Ее решение определяет собственные формы Ψ_n и собственные значения параметра $\lambda = \lambda_n$:

$$\Psi_n = \cos(n\pi x/l), \quad \lambda_n = n\pi/l \quad (n=1, 3, 5, \dots) \quad (1.7)$$

В свою очередь, решение однородного дифференциального уравнения (1.5) для функции $\chi(z)$ при $\lambda_n = n\pi/l$ дает

$$\chi_n = C_{1n} + C_{2n}z + C_{3n} \operatorname{sh} n\pi z/l + C_{4n} \operatorname{ch} n\pi z/l \quad (1.8)$$

Учитывая (1.4), (1.7), (1.8), в качестве общего решения основного дифференциального уравнения плоской задачи получим

$$\Phi(x, z) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \Psi_n(x)\chi_n(z) \quad (1.9)$$

Интегрируя зависимости (1.1) с учетом (1.2) и (1.9), найдем составляющие вектора смещения

$$u = \frac{1}{E} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{l}{n\pi} \frac{d^2 \chi_n}{dz^2} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad w = -\frac{1}{E} \sum_{n=1,3,5,\dots} a^2 C_{2n} \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (1.10)$$

При получении формул (1.10) предполагалось, что полоса закреплена от осевых перемещений в плоскости симметрии (фиг. 1). Граничные условия для перемещений $u(0)=0$, $w(\pm l/2)=0$.

Раскладывая постоянную внешнюю нагрузку q на интервале $(-l/2, +l/2)$ с периодом $2l$ в бесконечный ряд по собственным функциям χ_n (1.7) и пользуясь краевыми условиями (1.3), представим граничные условия для функции $\chi_n(z)$ с учетом (1.9) в форме

$$\chi_n(0)=0, \quad \chi_n'(0)=0, \quad \chi_n'(h)=0 \quad (1.11)$$

$$(n\pi/l)^2 \chi_n(h) - (4q/n\pi b)^{(n-1)/2} = 0$$

Реализация зависимостей (1.11) для функции $\chi_n(z)$ (1.8) приводит к системе алгебраических уравнений для постоянных интегрирования C_{kn} ($k=1, 4$):

$$\begin{aligned} C_{1n} + C_{4n} &= 0, & C_{2n} + C_{3n} a \lambda_n \operatorname{ch} a h \lambda_n + C_{4n} a \lambda_n \operatorname{sh} a h \lambda_n &= 0 \\ C_{2n} + C_{3n} a \lambda_n &= 0, & C_{1n} + C_{2n} h + C_{3n} \operatorname{sh} a h \lambda_n + C_{4n} \operatorname{ch} a h \lambda_n &= q_n \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$q_n = 4q(-1)^{(n-1)/2} / n\pi b \lambda_n^2$$

Система уравнений (1.12) имеет решение

$$C_{4n} = -C_{1n} = q(\operatorname{ch} \alpha - 1) / (2 + \alpha \operatorname{sh} \alpha - 2 \operatorname{ch} \alpha) \quad (1.13)$$

$$C_{2n} = -C_{3n} a \lambda_n = q_n \alpha \operatorname{sh} \alpha / h(2 + \alpha \operatorname{sh} \alpha - 2 \operatorname{ch} \alpha), \quad \alpha = a h \lambda_n$$

Соотношения (1.2), (1.9) вместе с формулами (1.7–1.10) и (1.13) позволяют вычислить основные характеристики напряженно-деформированного состояния. В частности, для интересующих нас касательных напряжений и прогибов, найдем

$$\sigma_{xz}(x, z) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{n\pi}{l} \left\{ \frac{\alpha \operatorname{sh} \alpha}{h} + \frac{n\pi a}{l} \left[\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{l}(z-h) - \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{l} z \right] \right\} \frac{q_n}{A_n} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$w(x) = - \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{q_n}{E h^3} \left(\frac{l}{n\pi} \right)^2 F(\alpha) \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad A_n = 2(1 - \operatorname{ch} \alpha) + \alpha \operatorname{sh} \alpha \quad (1.14)$$

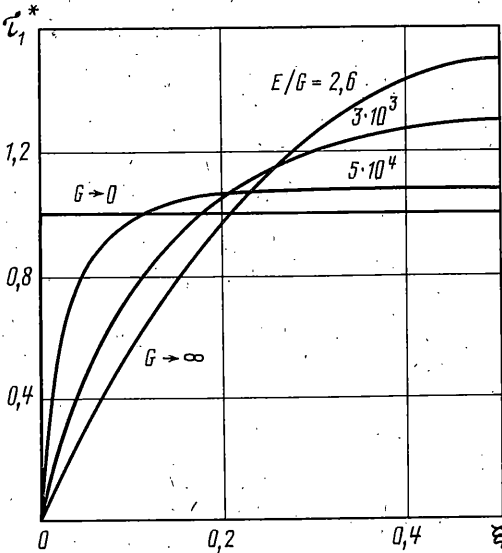
$$F(\alpha) = \alpha^3 \operatorname{sh} \alpha / A_n, \quad \alpha = (n\pi h / l) (E/G)^{1/2}$$

Выражение для прогибов $w(x)$ позволяет проконтролировать полученные результаты для предельных значений модуля сдвига. При $G \rightarrow \infty$ име-ем $\alpha \rightarrow \infty$, $F(\alpha) \rightarrow \infty$, $w(x) \rightarrow 0$. При $G \rightarrow 0$ получаем $\alpha \rightarrow 0$, $[F(\alpha)]_{\alpha \rightarrow 0} = 12$,

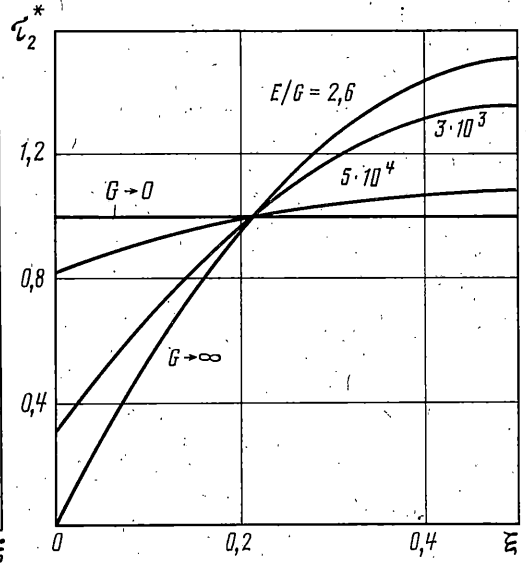
$$[w(x)]_{G \rightarrow 0} = -\frac{4}{\pi^5} \frac{q l^4}{EI} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^5} \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (1.15)$$

Здесь $I = b h^3 / 12$ — центральный момент инерции полосы. Бесконечный ряд (1.15) может быть просуммирован с помощью многочленов Эйлера $E_{2p}(t)$ [5]. В нашем случае $p=2$, $t=x/l+1/2$. В результате суммирования имеем

$$[w(x)]_{G \rightarrow 0} = -\frac{q l^4}{24 EI} E_4 \left(\frac{x}{l} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{q l^4}{EI} \left[\frac{5}{384} - \frac{1}{16} \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right]$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Последний результат совпадает с известным решением задачи о поперечном сечении по балочной теории.

Для выяснения характера распределения касательных напряжений по высоте полосы в зависимости от механических свойств материала, ограничимся вычислением функции σ_{xz} на торце $x=+l/2$. Пользуясь зависимостью (1.14), представим напряжения $\sigma_{xz}(l/2, z)$ в безразмерной форме

$$\tau^* = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\lambda_n}{nA_n} [\text{sh } \lambda_n - \text{sh } \lambda_n \xi - \text{sh } \lambda_n (1-\xi)] \quad (1.16)$$

Здесь $\tau^* = \sigma_{xz}bh/Q$, $Q = ql/2$, $\xi = z/h$ ($0 \leq \xi \leq 1$). После выделения медленно сходящейся части ряда (1.16), ее суммирования и преобразований, получим формулу удобную для вычислений

$$\tau^* = \tau_1^* = 1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,2,3,\dots} \frac{1}{(2m-1)^2} \left[\frac{2(\text{ch } \lambda_m - 1)}{\lambda_m \text{sh } \lambda_m} \frac{\text{sh } \lambda_m \xi + \text{sh } \lambda_m (1-\xi)}{\text{sh } \lambda_m} \right] \times \left[1 - \frac{2(\text{ch } \lambda_m - 1)}{\lambda_m \text{sh } \lambda_m} \right]^{-1} \quad (1.17)$$

где $m = (n+1)/2$. Характер распределения безразмерных касательных напряжений $\tau_1^*(\xi)$ (1.17) по сечению полосы при различных отношениях модуля упругости к модулю сдвига представлен на фиг. 2.

Результаты решения плоской задачи теории упругости для полосы из ортотропного материала, физические свойства которого представлены уравнениями (1.1), показывают, что асимптотический случай распределения касательных напряжений при $G \rightarrow 0$ соответствует гипотезе Тимошенко, предполагающей постоянство поперечных сдвигов в сечении балки-полосы [6].

Другой предельный случай, когда $G \rightarrow \infty$, приводит к параболическому закону изменения касательных напряжений и отвечает классической балочной теории Бернулли — Эйлера.

2. Приближенное решение. Выше было получено точное решение задачи о распределении касательных напряжений для полосы в рамках физи-

ческих уравнений (1.1). Рассмотрим далее, в какой мере приближенное решение той же задачи, основанное на неклассическом подходе к расчетам тонкостенных систем, отражает результаты п. 1.

С этой целью, опираясь на метод гипотез [7], будем исходить из распределения перемещений по высоте полосы в форме

$$u(x, z_1) = \tilde{u}(x) + z_1 \tilde{\theta}(x) + z_1^3 \tilde{\Psi}(x), \quad w(x, z_1) = \tilde{w}(x) \\ z_1 = z - h/2 \quad (2.1)$$

Здесь \tilde{u} , \tilde{w} , $\tilde{\theta}$, $\tilde{\Psi}$ — неизвестные функции, подлежащие определению. Необходимые уравнения статики для нахождения функций $\tilde{u}(x)$, $\tilde{w}(x)$, $\tilde{\theta}(x)$, $\tilde{\Psi}(x)$ получим, исходя из принципа возможных перемещений. Предварительно, пользуясь уравнениями (2.1) и (1.1), вычислим компоненты деформации полосы

$$e_{xx} = \varepsilon + z_1 \kappa + z_1^3 \rho, \quad \varepsilon = d\tilde{u}/dx, \quad \kappa = d\tilde{\theta}/dx, \quad \rho = d\tilde{\Psi}/dx \\ e_{zz} = 0, \quad e_{xz} = \gamma + z_1^2 \varphi, \quad \gamma = \tilde{\theta}' + d\tilde{w}/dx, \quad \varphi = 3\tilde{\Psi}' \quad (2.2)$$

Кроме того, вводя в рассмотрение обобщенные внутренние усилия и моменты N , M , Q , R , S и, учитывая зависимости (1.1) и (2.2), найдем соотношения упругости, связывающие между собой обобщенные кинематические и статические факторы

$$N = \iint_{(F)} \sigma_{xx} dF = EF\varepsilon, \quad M = \iint_{(F)} \sigma_{xx} z_1 dF = EI\kappa + EK\rho \\ Q = \iint_{(F)} \sigma_{xz} dF = GF\gamma + GI\varphi, \quad R = \iint_{(F)} \sigma_{xx} z_1^3 dF = EK\kappa + EL\rho \\ S = \iint_{(F)} \sigma_{xz} z_1^2 dF = GI\gamma + GK\varphi \quad (2.3)$$

Здесь F , I , K , L — геометрические характеристики полосы: $F = bh$, $I = bh^3/12$, $K = bh^5/80$, $L = bh^7/448$. Интегрирование в формулах (2.3) ведется по площади поперечного сечения.

Для состояния равновесия системы имеет место вариационное уравнение Лагранжа

$$\delta\Pi = \int (N\delta\varepsilon + M\delta\kappa + Q\delta\gamma + R\delta\rho + S\delta\varphi + q\delta w) dx = 0 \quad (2.4)$$

где Π — полная энергия полосы.

В результате использования формул (2.2) и интегрирования по частям, представим уравнение (2.4) в виде

$$\delta\Pi = [N\delta\tilde{u}]_0^l + [M\delta\tilde{\theta}]_0^l + [R\delta\tilde{\Psi}]_0^l + [Q\delta\tilde{w}]_0^l - \\ - \int_0^l \left[\frac{dN}{dx} \delta\tilde{u} + \left(\frac{dQ}{dx} - q \right) \delta\tilde{w} + \left(\frac{dM}{dx} - Q \right) \delta\tilde{\theta} + \left(\frac{dR}{dx} - 3S \right) \delta\tilde{\Psi} \right] dx = 0 \quad (2.5)$$

При независимых вариациях $\delta\tilde{u}$, $\delta\tilde{w}$, $\delta\tilde{\theta}$, $\delta\tilde{\Psi}$ из вариационного уравнения (2.5) следуют уравнения равновесия и соответствующие им краевые условия

$$dN/dx = 0, \quad dQ/dx = q, \quad dM/dx - Q = 0, \quad dR/dx - 3S = 0 \\ [N\delta\tilde{u}]_0^l = 0, \quad [M\delta\tilde{\theta}]_0^l = 0, \quad [R\delta\tilde{\Psi}]_0^l = 0, \quad [Q\delta\tilde{w}]_0^l = 0 \quad (2.6)$$

Система уравнения равновесия (2.6) распадается на две независимые группы. Первая включает уравнение $dN/dx=0$ относительно перемещения w . Вторая группа из трех уравнений равновесия содержит в качестве неизвестных функций w , θ , Ψ .

Вводя в рассмотрение вспомогательную функцию $\gamma = \theta + dw/dx$ и пользуясь зависимостями (2.2), (2.3), представим уравнения второй группы в форме

$$L_{12}\Psi + L_{13}\gamma = q, \quad L_{21}\theta + L_{22}\Psi + L_{23}\gamma = 0, \quad L_{31}\theta + L_{32}\Psi = 0 \quad (2.7)$$

$$L_{12} = 3GI d/dx, \quad L_{13} = GF d/dx, \quad L_{21} = EI d^2/dx^2 \\ L_{22} = EK d^2/dx^2 - 3GI, \quad L_{23} = -GF, \quad L_{31} = EG^{-1}(3I^2 - FK) d^2/dx^2 \\ L_{32} = EG^{-1}(3IK - FL) d^2/dx^2 - 9(I^2 - FK)$$

Последнему из уравнений (2.7) можно удовлетворить, полагая

$$\theta = L_{32}\chi, \quad \Psi = -L_{31}\chi \quad (2.8)$$

Оставшиеся уравнения равновесия с учетом (2.8) дают

$$L_{13}\gamma - L_{12}L_{31}\chi = q, \quad L_{23}\gamma + (L_{21}L_{32} - L_{22}L_{31})\chi = 0 \quad (2.9)$$

Путем введения функции перемещений, определяемой равенствами $\chi = L_{23}\Omega$, $\gamma = -(L_{21}L_{32} - L_{22}L_{31})\Omega$, система уравнений (2.9) приводится к разрешающему уравнению относительно $\Omega(x)$:

$$[L_{12}L_{31}L_{23} + L_{11}(L_{21}L_{32} - L_{22}L_{31})]\Omega = -q \quad (2.10)$$

В развернутой форме операторное уравнение (2.10) имеет вид

$$\Omega'' - k^2\Omega' = p, \quad k^2 = 9IG(FK - I^2)/EF(IL - K^2) \\ p = q/(EF)^2(IL - K^2) \quad (2.11)$$

Неизвестные функции w , θ , Ψ , γ связаны с разрешающей функцией $\Omega(x)$ формулами

$$w = E^2G^{-1}F(IL - K^2)\Omega'' - EF(3IK + FL)\Omega' - 9GF(I^2 - FK) \int \Omega dx + C_1 \\ \theta = -EF(3IK - FL)\Omega'' + 9GF(I^2 - FK)\Omega, \quad \Psi = EF(3I^2 - FK)\Omega' \\ \gamma = E^2G^{-1}F(IL - K^2)\Omega'' - 6EIFK\Omega' \quad (2.12)$$

Общий интеграл уравнения (2.11) имеет следующий вид

$$\Omega(x) = -(C_2 + k^2C_4)/k^4 - (p + k^2C_3)x/k^4 - C_2x^2/2k^2 - \\ - px^3/6k^2 + C_5 \operatorname{sh} kx + C_6 \operatorname{ch} kx \quad (2.13)$$

Для определения констант интегрирования C_i ($i=1, 6$) воспользуемся краевыми условиями (2.6), согласованными с точным решением поставленной задачи (п.1). При шарнирном опирании полосы на неподвижные опоры имеем

$$x = \pm l/2: \quad w = 0, \quad M = 0, \quad R = 0 \quad (2.14)$$

Выражая моменты M , R через разрешающую функцию $\Omega(x)$, приходим к модифицированной записи краевых условий (2.14):

$$x = \pm l/2: \quad w = 0, \quad \Omega' = 0, \quad \Omega'' = 0 \quad (2.15)$$

С учетом симметрии полосы относительно начала координат $x=0$ (фиг. 1), найдем $C_2 = C_4 = C_6 = 0$. Остальные константы C_i определим с

помощью условий (2.15):

$$C_1 = -q(5l^4/384 - l^2/8k^2 + 1/k^4)/EI, \quad C_3 = -pl^2/8 \quad (2.16)$$

$$C_5 = p/k^5 \operatorname{ch}(kl/2)$$

Зависимости (2.12–2.16) позволяют вычислить необходимые характеристики напряженно-деформированного состояния полосы. Для прогиба w^\sim , в частности, найдем

$$w^\sim = \frac{ql^4}{EI} \left\{ \frac{5}{384} - \frac{1}{16} \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{x}{l} \right)^4 + \frac{7}{(kl)^2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] - \frac{7}{3(kl)^2} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{ch} kl/2} \right) \right\} \quad (2.17)$$

Выражение (2.17) обладает теми же асимптотическими свойствами, что и точное решение задачи о полосе, полученное методами теории упругости (п.1).

Для нахождения закона распределения касательных напряжений σ_{xz} по высоте полосы на основе приближенного подхода (п.2) воспользуемся формулами (2.2), (1.1):

$$\sigma_{xz} = G(\gamma^\sim + 3\Psi^\sim z_1^2) = G[\gamma^\sim + 3\Psi^\sim (z - h/2)] \quad (2.18)$$

Здесь функции γ^\sim , Ψ^\sim с учетом зависимостей (2.12), (2.13) и (2.16) имеют вид

$$\gamma^\sim = \frac{ql}{2GF} \left[3 \left(\frac{x}{l} \right) - \frac{1}{kl} \frac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{ch} kl/2} \right], \quad \Psi^\sim = \frac{2ql}{GFh^2} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{kl} \frac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{ch} kl/2} \right) \quad (2.19)$$

Вычисления по формулам (2.18), (2.19) после введения безразмерных переменных (п.1) дают

$$\tau_1^* = \tau_2^* = \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{3} \left[3 - \frac{\operatorname{th} \beta}{\beta} + 12 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 \left(1 - \frac{\operatorname{th} \beta}{\beta} \right) \right], \quad \beta = \left(\frac{35G}{E} \right)^{1/2} \left(\frac{h}{l} \right)^{-1} \quad (2.20)$$

Результаты вычислений по формулам (2.20) представлены на фиг. 3.

Сравнение точного и приближенного решений для касательных напряжений τ_1^* , τ_2^* (фиг. 1, 2) показывает идентичность асимптотических свойств обоих распределений при значениях модулей сдвига $G \rightarrow 0$ и $G \rightarrow \infty$.

Гипотеза Тимошенко о постоянстве поперечных сдвигов и касательных напряжений по высоте полосы подтверждается прямыми расчетами лишь в области весьма малых значений модуля G . Параболическое распределение касательных напряжений при $G \rightarrow \infty$, соответствующее теории Бернулли—Эйлера, практически реализуется для всех изотропных конструкционных материалов при $G = E/2(1+\nu) \approx E/2,6$.

Анализ приближенного и точного решений (п.п. 1, 2) свидетельствует об их удовлетворительном согласовании при определении прогибов в интервале $(-l/2, +l/2)$ и максимальных значений касательных напряжений внутри области $0,3 < \xi < 0,7$.

На лицевых сторонах полосы $\xi = 0$ и $\xi = 1$ подобное согласование имеет место лишь при $G \rightarrow \infty$. При других значениях модуля сдвига касательные напряжения на границах $\xi = 0$ и $\xi = 1$, вычисленные по обоим теориям, существенно различаются между собой. Последний результат

связан с кинематическим подходом в методе гипотез и использованием принципа возможных перемещений для сведения плоской задачи теории упругости к одномерной. При таком подходе силовые граничные условия для напряжений на сторонах $\xi=0$ и $\xi=1$ не ставятся.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
3. *Васильев В. В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 269 с.
4. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 355 с.
5. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.
6. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 439 с.
7. *Кристиансен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.V.1990