

УДК 539.3

© 1992 г. В. В. КУЗНЕЦОВ, С. В. ЛЕВЯКОВ

## **НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА КАРМАНА ДЛЯ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ**

В статье выведены полные геометрически нелинейные соотношения задачи Кармана для тороидальных оболочек произвольного поперечного сечения (как замкнутого, так и открытого). Дан вариационный вывод уравнений равновесия и краевых условий. Применяется алгоритм численного решения задачи, использующий локальную аппроксимацию деформационных соотношений для элемента контура сечения. Состояния равновесия дискретной системы находятся итерационным методом, основанным на вычислении матриц коэффициентов первой и второй вариаций энергии. Рассмотрено нелинейное деформирование цилиндрических и тороидальных оболочек замкнутого кругового поперечного сечения. В качестве примера оболочки открытого контура сечения решена задача об изгибе желобчатой полосы. Полученные решения сравниваются с результатами других авторов.

**1. Введение.** Начало теоретическому исследованию тороидальных оболочек при чистом изгибе было положено в работе Т. Кармана [1], где показано, что причиной повышенной гибкости в сравнении с цилиндрическими оболочками является сплющивание поперечных сечений. Анализ Т. Кармана основывался на предположении, что все сечения деформируются одинаково. При этом делалось допущение, что отношение радиуса поперечного сечения оболочки к радиусу кривизны ее оси мало по сравнению с единицей. Последовавшие за [1] многочисленные работы других авторов, например, [2, 3, 4], были посвящены изгибу труб с широким диапазоном изменения геометрических параметров. Характерно, что первые исследования основывались на вариационных принципах. Обобщением предыдущих результатов явилась работа Р. Кларка и Э. Рейсснера [5], где с использованием метода асимптотического интегрирования уравнений равновесия и совместности деформаций были получены простые формулы для коэффициента снижения жесткости и интенсификации напряжений в трубах кругового и эллиптического поперечных сечений. В общей постановке, предусматривающей пространственное деформирование трубы, задача Кармана, как частный случай задачи Сен-Венана, рассмотрена в [6].

В упомянутых работах рассматривались малые упругие перемещения и использовались соотношения линейной теории оболочек. Большие упругие перемещения цилиндрических оболочек при чистом изгибе были рассмотрены Л. Бразье [7], который показал, что прогрессирующая деформация поперечного сечения может привести к потере устойчивости оболочки. Работа [7] открыла направление по исследованию оболочек, теряющих устойчивость при достижении предельной точки. К данному направлению относится также работа В. Вюста [8], посвященная устойчивости пологих цилиндрических оболочек с открытым контуром поперечного сечения. В [9] Э. Рейсснер рассмотрел деформирование криволинейных труб на основе нелинейных уравнений изгиба. Нелинейность учитывалась в квадратичном приближении. Было получено решение для труб с малой

начальной кривизной и для частного случая прямолинейных труб уточнены результаты [7]. Нелинейное деформирование криволинейных труб с использованием энергетического принципа было рассмотрено Д. Л. Костовцем [10]. В [11] выведены нелинейные уравнения изгиба оболочек уточняющие уравнения, полученные в [9]. Их приближенное решение для случая кругового поперечного сечения дано в [12]. В [13] рассмотрены вопросы конечного изгиба криволинейных труб на основе геометрически нелинейной теории тонких оболочек. Выведена и численно проинтегрирована система дифференциальных уравнений изгиба труб с круговым поперечным сечением при допущении, что относительное изменение угла раствора сектора тора мало.

Следует отметить, что большинство решений, особенно нелинейных, были получены на основе упрощенных деформационных соотношений и в ограниченном приближении с удержанием небольшого числа членов рядов для аппроксимации перемещений оболочки. Представляет интерес получение более точных решений с использованием численных алгоритмов, а также оценка с их помощью полученных ранее приближенных решений.

**2. Деформационные соотношения.** Рассмотрим тонкостенную тороидальную оболочку произвольного поперечного сечения, изгибаемую моментами в плоскости кривизны. Принимая, что поперечные сечения оболочки при чистом изгибе остаются плоскими и ортогональными к осевой линии, запишем уравнение срединной поверхности до и после нагружения в векторном виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{e}_i x_i, \quad \tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}}_0 + \tilde{\mathbf{r}}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{e}}_i \tilde{x}_i \quad (i=1, 2) \quad (1)$$

где  $\mathbf{R}_0$  — радиус-вектор осевой линии оболочки;  $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(t)$  — единичные орты, лежащие в плоскости поперечного сечения;  $x_i = x_i(s)$  — декартовы координаты точек поперечного сечения;  $t, s$  — длины дуг осевой линии и контура поперечного сечения. Здесь и далее используется суммирование по повторяющимся индексам; галочкой отмечены величины, относящиеся к деформированному состоянию. Задача нахождения деформированного состояния оболочки сводится к определению параметрического уравнения контура  $\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(s)$ .

Ограничимся рассмотрением малых по сравнению с единицей деформаций срединной поверхности оболочки. На величину перемещений и поворотов ограничений накладывать не будем. С использованием выражений (1) и гипотез Кирхгофа — Лява  $\varepsilon_s^z = \varepsilon_s + z\kappa_s$ ,  $\varepsilon_t^z = \varepsilon_t + z\kappa_t$  ( $z$  — нормальная координата к поверхности оболочки), получим выражения для деформаций и искривлений в следующем виде

$$\varepsilon_t = A_t^{-1}(\varepsilon + k \tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_t - k \varepsilon_t), \quad \kappa_t = A_t^{-1}(k \tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_t - k \varepsilon_t) \\ \varepsilon_s = 1/2(\tilde{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{r}} - 1), \quad \kappa_s = \tilde{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}, \quad A_t = |\partial \mathbf{R} / \partial t|$$

где  $A_t$  — параметр Ламе;  $\varepsilon$  — параметр, характеризующий деформацию осевой линии;  $k$  — кривизна осевой линии;  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_t \lambda_t^n$  — орт нормали к срединной поверхности оболочки; точкой обозначена производная по натуральной координате  $s$ .

**3. Энергия и условия равновесия.** Потенциальная энергия деформации  $\Pi$  тороидальной оболочки с единичной длиной осевой линии имеет вид

$$\Pi = 1/2 \int (T_t \varepsilon_t + T_s \varepsilon_s + M_t \kappa_t + M_s \kappa_s) A_t ds \quad (2)$$

где  $T_t$ ,  $T_s$  и  $M_t$ ,  $M_s$  — усилия и изгибающие моменты, связанные с деформациями и искривлениями срединной поверхности соотношениями упругости

$$T_t = B(\varepsilon_t + \nu \varepsilon_s), \quad T_s = B(\varepsilon_s + \nu \varepsilon_t), \quad B = Eh/(1 - \nu^2) \\ M_t = D(\kappa_t + \nu \kappa_s), \quad M_s = D(\kappa_s + \nu \kappa_t), \quad D = Bh^2/12$$

где  $E, \nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона;  $h$  — толщина оболочки. Потенциал внешних сил (изгибающих моментов) имеет вид  $W = -M(k\tilde{x} - k)$ .

Используя условие стационарности полной потенциальной энергии  $\delta(\Pi + W) = 0$ , получим систему нелинейных уравнений равновесия

$$\delta x_1: H - k\tilde{T}_1 = 0; \quad \delta x_2: V = 0$$

$$\delta \varepsilon: \int T_1 ds = 0; \quad \delta k: \int (T_1 x_1 + M \lambda_1^n) ds = M \quad (3)$$

и краевые условия на границах разомкнутого контура поперечного сечения

$$H = 0 \quad \text{либо} \quad \delta x_1 = 0$$

$$V = 0 \quad \text{либо} \quad \delta x_2 = 0$$

$$M_s = 0 \quad \text{либо} \quad \delta \theta = 0$$

$$H = T_s A_1 x_1 + A_s^{-1} (M_s A_1 x_2) - A_s^{-3} k \tilde{M}_1 x_1 x_2$$

$$V = T_s A_1 x_2 - A_s^{-1} (M_s A_1 x_1) + A_s^{-3} k \tilde{M}_1 (x_1)^2$$

$$A_s = (x_1 x_2)^{1/2}, \quad \theta = -\arctg(x_1/x_2)$$

Уравнения (3) выражают условия чистого изгиба: главный вектор равен нулю, а главный момент равен заданному изгибающему моменту. Граничные условия на торцах, таким образом, выполняются по Сен-Венану. Условия (4) в случае замкнутого контура заменяются условиями периодичности.

**4. Алгоритм решения задачи.** Для решения задачи определения деформированного состояния оболочки воспользуемся методом локальной аппроксимации деформационных соотношений для элемента контура [14]. Обозначим через  $x_{ij}, \lambda_{ij}^n$  ( $i, j = 1, 2$ ) — узловые значения координат и направляющих косинусов орта нормали для конечного элемента. Используя разложение неизвестных функций в ряд Тейлора по координате  $s$  и пренебрегая для малого элемента длины  $l$  членами порядка  $O(l^2)$ , получим следующие аппроксимационные соотношения

$$\varepsilon_i = A_i^{-1} (\varepsilon + k\tilde{x}_1 - kx_1), \quad \varkappa_i = A_i^{-1} (k\tilde{\lambda}_1^n - k\lambda_1^n)$$

$$\varepsilon_s = 1/2 (b_1 b_n x_{j1} x_{jn} - 1)$$

$$\varkappa_s = N_i \theta_i, \quad \theta_i = b_n (\lambda_{ji}^n x_{jn} - \lambda_{ji}^n x_{jn})$$

$$A_i = 1 + kx_1, \quad x_1 = 1/2 (x_{11} + x_{12}), \quad \lambda_1^n = 1/2 (\lambda_{11}^n + \lambda_{12}^n)$$

$$b_1 = -b_2 = -1/l, \quad N_1 = (6s - 4l)/l^2, \quad N_2 = (6s - 2l)/l^2$$

Рассматриваемая дискретная модель оболочки является существенно нелинейной системой, которая эффективно может быть исследована с использованием энергетического метода. При этом основной является задача вычисления коэффициентов первой и второй вариации энергии, необходимых для формулировки условий равновесия и итерационного процесса решения.

Введем два уровня дискретных параметров, представленных вектором обобщенных упругих перемещений  $u$  и вектором обобщенных координат  $q$  [15]:  $u^T = |\varepsilon_s, \theta_1, \theta_2, \varepsilon_1, \varkappa_1|$ ,  $q^T = |x_{11}, x_{21}, \varphi_1, x_{12}, x_{22}, \varphi_2, \varepsilon, k|$ , где  $\varphi_i$  — угол поворота нормали в  $i$ -м узле.

Подставляя аппроксимационные выражения (5) в соотношение (2) и проводя интегрирование в пределах элемента, получим запись потенциальной энергии как квадратичной формы относительно компонентов вектора  $u$ :  $\Pi = 1/2 u^T K u$ . Здесь  $K$  — симметричная матрица жесткости, ненуле-

вые компоненты которой имеют вид

$$\begin{aligned} K_{11} &= BlA_t, & K_{14} &= \nu K_{11}, & K_{22} &= D(4+k(3x_{11}+x_{12}))/l, \\ K_{23} &= 2DA_t/l, & K_{25} &= -\nu D(1+kx_{11}), \\ K_{33} &= D(4+k(x_{11}+3x_{12}))/l, & K_{35} &= \nu D(1+kx_{12}), \\ K_{44} &= K_{11}, & K_{55} &= DIA_t \end{aligned}$$

Алгоритм решения нелинейной задачи основан на условиях стационарности энергии дискретной системы, которые записываются в виде [14]:

$$H\delta q + g - Q = 0 \quad (6)$$

где  $H$ ,  $g$  — матрица Гесса и градиент потенциальной энергии ансамбля конечных элементов;  $Q$  — вектор обобщенных внешних сил. Градиент и матрица Гесса отдельного элемента выражаются через определенные ранее  $K$  и  $u$  следующими алгоритмическими формулами:  $g = u'P$ ,  $P = Ku$ ,  $H = u'K(u')^T + P_i u_i''$  ( $i=1, \dots, 5$ ).

Здесь  $u'$ ,  $u_i''$  — матрицы первых и вторых производных от компонентов вектора  $u$  по компонентам вектора  $q$ . Ненулевые производные, определяющие матрицу  $u'$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \partial \varepsilon_s / \partial x_{ij} &\checkmark = b_j b_k x_{jh} \checkmark, & \partial \theta_i / \partial x_{jh} &\checkmark = b_k \lambda_{ji}^{n\checkmark} \\ \partial \theta_i / \partial \varphi_i &\checkmark = b_k x_{jh} \checkmark \lambda_{ji}^{n\checkmark}, & \partial \varepsilon_t / \partial x_{ij} &\checkmark = 1/2 k \checkmark A_t^{-1} \\ \partial \varepsilon_t / \partial \varepsilon &= A_t^{-1}, & \partial \varepsilon_t / \partial k &\checkmark = x_i \checkmark A_t^{-1} \\ \partial \chi_t / \partial \varphi_i &\checkmark = 1/2 k \checkmark \lambda_{1i} \checkmark A_t^{-1}, & \partial \chi_t / \partial k &\checkmark = \lambda_{1i}^{n\checkmark} A_t^{-1} \end{aligned}$$

где  $\lambda_{ji}^{n\checkmark}$  — направляющие косинусы единичного вектора, касательного к деформированному контуру поперечного сечения в  $i$ -м узле. Отличные от нуля вторые производные, входящие в матрицы  $u_i''$ , определяются следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \partial^2 \varepsilon_s / \partial x_{ij} \checkmark \partial x_{jh} \checkmark &= b_j b_k, & \partial^2 \theta_i / \partial x_{jh} \checkmark \partial \varphi_i &\checkmark = b_k \lambda_{ji}^{n\checkmark} \\ \partial^2 \theta_i / \partial \varphi_i \checkmark^2 &= -b_k x_{jh} \checkmark \lambda_{ji}^{n\checkmark}, & \partial^2 \varepsilon_t / \partial x_{ij} \checkmark \partial k &\checkmark = 1/2 A_t^{-1} \\ \partial^2 \chi_t / \partial \varphi_i \checkmark \partial k &\checkmark = 1/2 \lambda_{1i} \checkmark A_t^{-1}, & \partial^2 \chi_t / \partial \varphi_i \checkmark^2 &= -1/2 k \checkmark \lambda_{1i}^{n\checkmark} A_t^{-1} \end{aligned}$$

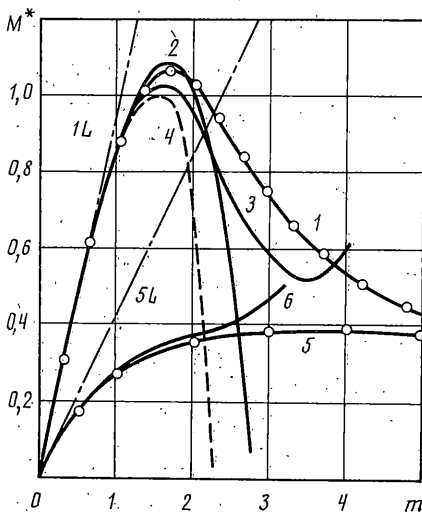
В качестве исходных данных при расчете оболочек с произвольным поперечным сечением требуется задание значений координат и направляющих косинусов нормалей в узлах рассматриваемого контура.

Поскольку  $g$  и  $H$  нелинейно зависят от  $q$ , то процесс решения по схеме (6) является итерационным и проводится до выполнения условий равновесия с заданной степенью точности. В процессе деформирования узлы конечных элементов совершают конечные перемещения, а векторы нормалей в узлах — конечные повороты. После каждой итерации новые значения узловых параметров  $(x_{ij} \checkmark)^*$ ,  $(\lambda_{ij}^{n\checkmark})^*$  находятся с помощью преобразования (по  $j$  не суммировать):

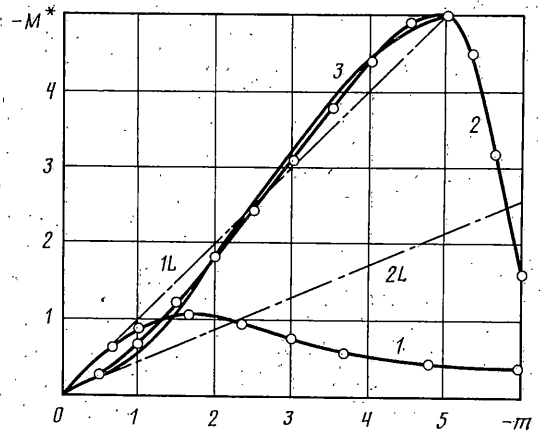
$$(x_{ij} \checkmark)^* = x_{ij} \checkmark + \delta x_{ij} \checkmark, \quad (\lambda_{ij}^{n\checkmark})^* = \lambda_{ij}^{n\checkmark} \cos \delta \varphi_j \checkmark + \lambda_{ij} \checkmark \sin \delta \varphi_j \checkmark$$

Решение, соответствующее линейной теории оболочек, получается за одну итерацию.

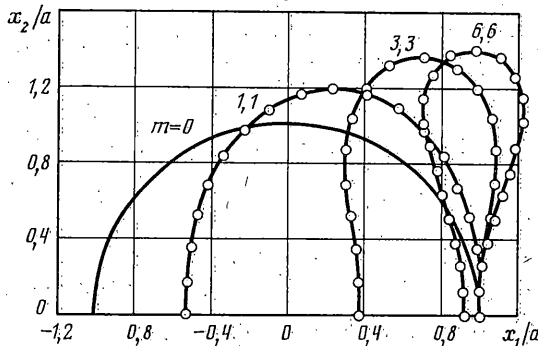
$\mu$	$N=8$	$N=12$	$N=16$	$N=20$	$N=24$	$N=28$
5	2,287	2,316	2,327	2,331	2,334	2,335
50	27,627	25,988	25,519	25,322	25,219	25,159
100	61,190	53,851	51,959	51,197	50,811	50,588



Фиг. 1



Фиг. 2

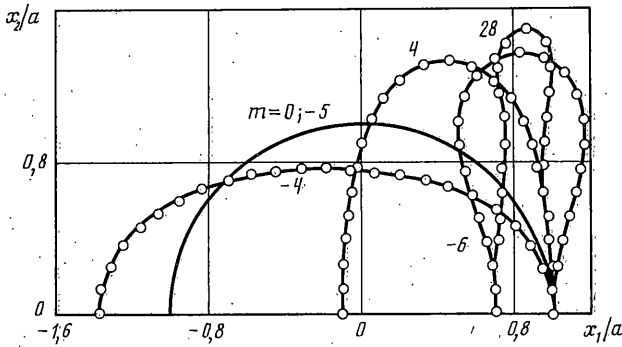


Фиг. 3

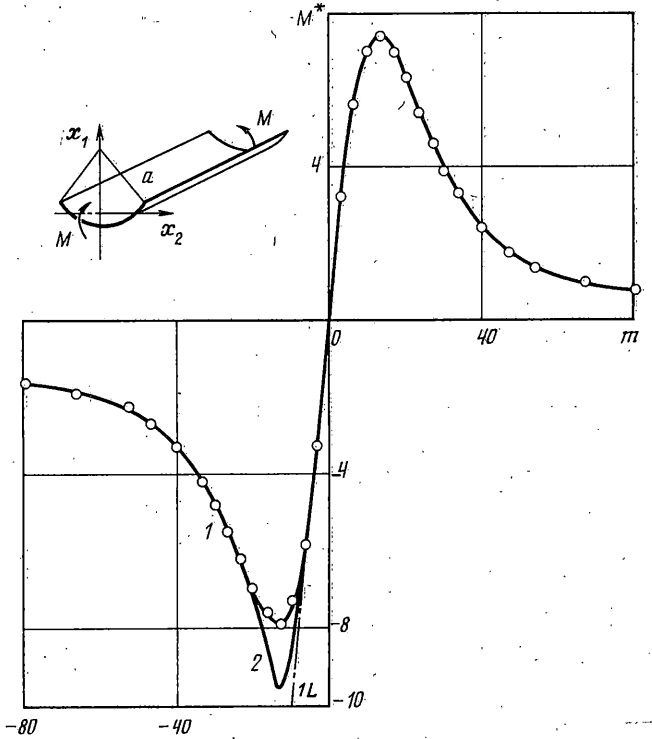
5. Численные результаты. Сходимость разработанного алгоритма проиллюстрируем на следующих примерах. Определим коэффициент снижения жесткости  $f$  по линейной теории для тороидальных оболочек, характеризуемых параметром кривизны  $\mu = (12(1-\nu^2))^{1/2} a^2 k/h$ ,  $a$  — радиус поперечного сечения,  $\nu=0,3$ . Зависимость рассчитанных значений  $f$  от числа конечных элементов  $N$  представлена в таблице.

При больших значениях параметра  $\mu \approx 10$  приведенный алгоритм дает значения  $f$ , близкие к результатам, получаемым по известной формуле  $f = \mu/2$  [2, 5]. Так, для  $\mu=50$ ,  $N=28$  различие составляет 0,6%.

Изложенный алгоритм применялся при анализе нелинейного изгиба круговой цилиндрической оболочки, имеющей следующие характеристики:  $a/h=100$ ,  $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu=0,3$ . На фиг. 1, 2 кривыми 1 представлена расчетная зависимость параметра нагрузки  $M^* = (12(1-\nu^2))^{1/2} a^2 M/hEI$  ( $I = \pi a^3 h$  — момент инерции сечения) от параметра искривления  $m = (12(1-\nu^2))^{1/2} a^2 (k' - k)/h$ . Полученные результаты сопоставлялись с решениями Л. Бразье [7], Э. Л. Аксельрада [12] и Э. Рейсснера [9], которые показаны на фиг. 1 кривыми 2, 3 и 4 соответственно. На начальном участке нагружения оболочки представленные решения мало отличаются друг от друга и от линейного решения (прямая 1L). Расчет показал, что величина критического момента соответствует  $M^* = 1,06$ . Различие с результатом Бразье составило -3%, а с результатом Рейсснера 5%. Как видим, различие в определении критического момента является несущественным. Это можно объяснить относительно слабым формоизменением поперечного сечения (фиг. 3), которое удовлетворительно описывалось тригонометрическими функциями. Максимальное радиальное перемещение здесь составляет  $w = -0,25 a$  (решение Бразье дает  $w = -0,22 a$ ). В закритической области  $m > 1,6$  наблюдается значительное расхождение приведенных решений, что связано с существенным искажением сечения оболочки (фиг. 3), для описания которого недостаточ-



Фиг. 4



Фиг. 5

но упрощенных деформационных соотношений и аппроксимирующих функций, использованных в указанных работах.

На фиг. 1 приведено также решение для тороидальной оболочки с параметром начальной кривизны  $\mu=5$ . Характерно, что в отличие от цилиндрической оболочки ( $\mu=0$ ), здесь при меньшем значении параметра  $m$  наблюдается различие между линейным (прямая  $5L$ ) и нелинейным (кривая 5) решениями. Предельная точка слабо выражена, при этом значения критического момента и кривизны соответственно равны  $M^*=0,39$  и  $m=4,0$ . Заметим, что решение [12] (кривая 6) не указывает на снижение жесткости оболочки, что, очевидно, противоречит продолжающемуся деформированию поперечного сечения.

При разгибании оболочка ведет себя качественно иным образом (фиг. 2, кривая 2 соответствует полученному в настоящей работе решению, а кривая 3 — решению [12]). Характеристика является более жесткой на докритическом участке, где сечение приобретает форму, близкую к эллипсу, большая ось которого лежит в плоскости кривизны оболочки (фиг. 4). При достижении предельной точки сечение становится круговым. В этом случае происходит выпрямление оси, т. е.  $m=-\mu$ , а изги-

бающий момент равен моменту, который необходимо приложить к брусу с теми же геометрическими характеристиками и с недеформируемым поперечным сечением до полного его выпрямления  $M^* = m$ . Данные результаты подтверждают выводы, сделанные в [12]. Дальнейшее увеличение параметра кривизны приводит к резкому сплющиванию поперечного сечения (Фиг. 4).

В качестве другого приложения разработанного алгоритма рассмотрим устойчивость желобчатой полосы. Для случая  $a/b = 1$  ( $b$  — ширина полосы),  $a/h = 100$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0,25$  получена характеристика, показанная кривой 1 на Фиг. 5. Прямой 1L изображено линейное решение задачи. Из сравнения полученных результатов с приближенным аналитическим решением [16], представленным кривой 2, следует, что характеристики практически совпадают на прямом пути нагружения. Критическое значение изгибающего момента здесь равно  $M^* = 7,4$ . На обратном пути нагружения различие между сравниваемыми решениями существенно. Приближенное аналитическое решение дает завышенное по абсолютной величине значение критического момента  $M^* = -9,6$ , что на 22% отличается от полученного значения  $M^* = -7,9$ .

Приведенные результаты показывают, что разработанный алгоритм является эффективным средством анализа тонких оболочек при чистом изгибе, позволяющим исследовать нелинейное деформирование, устойчивость и закритическое поведение.

В частном случае возможно получение коэффициента снижения жесткости оболочки в линейном приближении. В заключение отметим, что получение одной из приведенных нелинейных характеристик занимает 5 мин. при выполнении расчетов на персональном компьютере типа IBM PC/AT.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Karman Th.* Über die Formänderung dünnwandiger Rohre insbesondere federnder Ausgleichrohre // *Z. VDI*. 1911. Bd. 55. № 45. S. 1889—1895.
2. *Beskin L.* Bending of curved thin tubes // *J. Appl. Mech.* 1945. V. 12. № 1. P. A1—A7.
3. *Jones N.* In-plane bending of short-radius curved pipe bend // *Trans. ASME*. 1967. B89. № 2. P. 271—277.
4. *Cheng D., Thailer H.* On bending of curved circular tubes // *Trans. ASME*. 1970. B92. № 1. P. 62—66.
5. *Clark R. A., Reissner E.* Bending of curved tubes // *Advances in Applied Mechanics*. N. Y. Acad. Press, 1951. V. 2. P. 93—122.
6. *Черных К. Ф.* Задача Сен-Венана для тонкостенных труб с круговой осью // *ПММ*. 1960. Т. 24. Вып. 3. С. 423—432.
7. *Brazier L. G.* On the flexure of cylindrical shells and other «thin» sections // *Proc. Roy. Soc. Ser. A. London*. 1927. V. 116. № 773. P. 104—114.
8. *Wuest W.* Einige Anwendungen der Theorie der Zylinderschale // *Z. angew. Math. und Mech.* 1954. Bd. 34. № 12. S. 444—454.
9. *Reissner E.* On the finite bending of pressurized tubes // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1959. V. 26. № 3. P. 386—392.
10. *Костовецкий Д. Л.* Изгиб кривых тонкостенных труб в области больших упругих перемещений // *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*. 1960. № 3. С. 49—54.
11. *Аксельрад Э. Л.* Уравнения деформации оболочек вращения и изгиба тонкостенных стержней при больших упругих перемещениях // *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*. 1960. № 4. С. 84—92.
12. *Аксельрад Э. Л.* Изгиб тонкостенных стержней при больших упругих перемещениях // *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*. 1961. № 3. С. 124—132.
13. *Boyle J. T.* The finite bending of curved pipes // *Int. J. Solids structures*. 1981. V. 17. № 5. P. 515—529.
14. *Кузнецов В. В., Соиников Ю. В.* Анализ деформаций оболочек при произвольных перемещениях методом конечных элементов // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1987. № 1. С. 131—138.
15. *Кузнецов В. В.* Рекуррентные соотношения для коэффициентов вариаций энергии нелинейных упругих систем // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1989. № 4. С. 182—183.
16. *Панова Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
15.V.1990