

УДК 539.375

© 1992 г. В. В. СИЛЬВЕСТРОВ

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОЛИСТНЫХ ПЛАСТИНЧАТЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Изучается напряженно-деформированное состояние двух многолистных конструкций, составленных из бесконечных и полубесконечных упругих пластин.

Первая конструкция образована из  $n+1$  полубесконечных пластин, из которых  $n$  пластин, занимающих нижнюю полуплоскость, наложены друг на друга и соединены с  $(n+1)$ -й пластиной, занимающей верхнюю полуплоскость, вдоль различных участков границы  $(n+1)$ -й пластины. При  $n=2$  сведением к матричной краевой задаче Римана с кусочно-постоянным коэффициентом построены явно комплексные потенциалы и вычислены коэффициенты интенсивности напряжений. При  $n>2$  напряженно-деформированное состояние конструкции исследуется сведением к сингулярному интегральному уравнению первого рода с кусочно-непрерывным ядром.

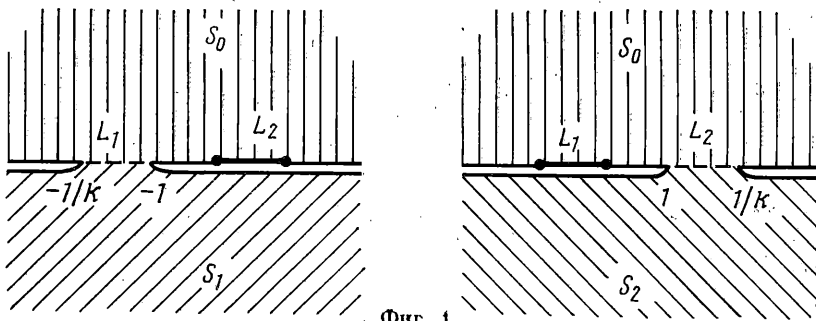
Вторая конструкция образована из двух бесконечных пластин, занимающих всю плоскость и разрезанных вдоль одних и тех же коллинеарных отрезков, путем наложения одной пластины на другую так, что разрезы с одинаковыми номерами располагаются друг над другом и их «одноименные» берега соединятся между собой. Полученная конструкция представляет поверхность со сквозными пространственными разрезами. Сведением к матричной краевой задаче Римана с постоянным коэффициентом построены явно комплексные потенциалы, получены асимптотические представления напряжений вблизи вершин пространственных разрезов и вычислены инвариантные  $\Gamma$ -интегралы Черепанова.

У обеих конструкций листы находятся в обобщенном плоском напряженном состоянии и их поверхности между собой не касаются или касаются без трения. На берегах разрезов задаются внешние усилия или нулевые напряжения, а на бесконечности каждой пластины — главные напряжения и сосредоточенные силы.

**1. Первая конструкция.** Пусть  $S_0, S_1, \dots, S_n$  — однородные изотропные упругие полубесконечные пластины одной и той же малой толщины, характеризуемые одними и теми же упругими постоянными  $\mu, \nu$  [1]. Пластина  $S_0$  занимает верхнюю полуплоскость, а пластины  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , занимающие нижнюю полуплоскость, наложены друг на друга и склеены с пластиной  $S_0$  вдоль непересекающихся между собой частей  $L_1, L_2, \dots, L_n$  действительной оси  $x$  так, что при переходе через линии склеивания напряжения и смещения меняются непрерывно. Линия  $L_k$ , вдоль которой пластина  $S_0$  склеена с пластиной  $S_k$ , может состоять из одного или нескольких отрезков. Например, на фиг. 1 изображены соединения пластины  $S_0$  с двумя пластинами  $S_1$  и  $S_2$  вдоль отрезков  $L_1$  и  $L_2$  соответственно.

Будем считать, что несклеенные берега всех пластин свободны от напряжений, напряжения и вращение на  $\infty$  во всех пластинах исчезают и в пластине  $S_k$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) на  $\infty$  действует сосредоточенная сила  $P_k = X_k + iY_k$ , расположенная в плоскости пластины, причем  $P_0 + P_1 + \dots + P_n = 0$ . Поверхности пластин  $S_1, S_2, \dots, S_n$  между собой не касаются или касаются без трения.

Сформулированную задачу поставил в 1987 г. Б. М. Нуллер и указал, что она имеет приложения в задаче качения нескольких дисков по границе полуплоскости, а также при изучении пластин с растрескавшимися краями. Постановка более общей задачи имеется в работе [2], где для ее решения предлагается применить метод римановых поверхностей.



Фиг. 1

**2. Сведение к задаче Римана.** В данном случае все пластины находятся в плоском напряженном состоянии и в пластине  $S_k$  напряжения  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})_k$  и частные производные по  $x$  от компонент смещения  $(u_1', u_2')_k$  выражаются через одну функцию  $\Phi_k(z)$  ( $z=x+iy$ ) по формулам [1]:

$$(\sigma_x + \sigma_y)_k = 4 \operatorname{Re} \Phi_k(z) \quad (2.1)$$

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})_k = \Phi_k(z) - \overline{\Phi_k(\bar{z})} + (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)}$$

$$2\mu(u_1' + iu_2')_k = \kappa \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(\bar{z})} - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)}$$

Функция  $\Phi_k(z)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) кусочно-голоморфна с линией разрыва  $L_k$ , а функция  $\Phi_0(z)$  кусочно-голоморфна с линией разрыва  $L = \cup L_k$  ( $k=1 \div n$ ). При больших  $z$  эти функции имеют вид

$$\Phi_k(z) = -P_k/(2\pi z) + O(z^{-2}), \quad k=0, 1, \dots, n \quad (2.2)$$

Будем рассматривать напряженно-деформированное состояние, описываемое функциями  $\Phi_k(z)$ , которые на концах линии  $L$  могут обращаться в бесконечность порядка меньше 1, а в остальных точках  $t$  линии  $L$  непрерывны и удовлетворяют условию

$$\lim_{z \rightarrow t^+} (z - \bar{z}) \Phi_k'(z) = 0 \quad (2.3)$$

Согласно (2.1), (2.3) непрерывность напряжений и смещений на линиях  $L_k$  выражается равенствами

$$\Phi_0^+(t) - \Phi_0^-(t) = \Phi_k^-(t) - \Phi_k^+(t)$$

$$\kappa \Phi_0^+(t) + \Phi_0^-(t) = \kappa \Phi_k^-(t) + \Phi_k^+(t), \quad t \in L_k, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

откуда

$$\Phi_0^+(t) + \Phi_k^+(t) = \Phi_0^-(t) + \Phi_k^-(t) \quad (2.5)$$

$$\Phi_k^+(t) = \Phi_0^-(t), \quad t \in L_k, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

Так как при  $j \neq 0$  и  $j \neq k$  функции  $\Phi_j$  на линии  $L_k$  непрерывны, т. е.  $\Phi_j^+(t) = \Phi_j^-(t)$ , то, прибавив эти равенства к равенству (2.5), получим

$$\sum_{j=0}^n \Phi_j^+(t) = \sum_{j=0}^n \Phi_j^-(t), \quad t \in L_k, \quad k=1, 2, \dots, n$$

откуда следует, что функция  $\Phi_0 + \Phi_1 + \dots + \Phi_n$  во всей плоскости непрерывна и на  $\infty$  исчезает. Следовательно, она равна нулю. Тогда

$$\Phi_0(z) = -\Phi_1(z) - \Phi_2(z) - \dots - \Phi_n(z) \quad (2.7)$$

и из (2.6) получим

$$\Phi_k^+(t) = -\Phi_1^-(t) - \Phi_2^-(t) - \dots - \Phi_n^-(t), \quad t \in L_k, \quad k=1, 2, \dots, n$$

Кроме того,  $\Phi_k^+(t) = \Phi_k^-(t)$ ,  $t \in L_j$ ,  $j \neq k$ . Тем самым для нахождения кусочно-голоморфной вектор-функции  $\Phi(z)$  с компонентами  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$  имеем матричную краевую задачу Римана

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in L = \bigcup_{h=1}^n L_h \quad (2.8)$$

с кусочно-постоянной матрицей  $G(t)$  в классе функций, имеющих в окрестности  $\infty$  вид (2.2) и допускающих на концах линии  $L$  бесконечность порядка меньше 1. На  $L_k$  матрица  $G(t)$  имеет вид

$$G(t) = G_k = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & \dots & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} \quad \text{— } k\text{-я строка}$$

**3. Интегральное уравнение задачи.** Пусть на  $L_k$  действуют напряжения  $(\sigma_y, \tau_{xy})_k$ . Обозначим  $\varphi(t) = (\sigma_y - i\tau_{xy})_k$ ,  $t \in L_k$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ . На концах линии  $L$  функция  $\varphi(t)$  может обращаться в бесконечность порядка меньше 1, а в остальных точках  $L$  она непрерывна. Тогда для пластины  $S_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ), занимающей нижнюю полуплоскость, имеем первую основную задачу теории упругости с граничными условиями  $\sigma_y - i\tau_{xy} = \varphi(t)$ ,  $t \in L_k$ ;  $\sigma_y - i\tau_{xy} = 0$ ,  $t \notin L_k$ . При этом статистическое равновесие пластины  $S_k$  описывается равенством

$$\int_{L_k} \varphi(t) dt = -iP_k, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

Согласно [4] напряженно-деформированное состояние пластины  $S_k$  определяется функцией

$$\Phi_k(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\varphi(t) dt}{t-z}, \quad k=1, 2, \dots, n$$

Аналогично для пластины  $S_0$  имеем первую основную задачу с граничными условиями  $\sigma_y - i\tau_{xy} = \varphi(t)$ ,  $t \in L$ ;  $\sigma_y - i\tau_{xy} = 0$ ,  $t \notin L$ , откуда

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-z} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{\varphi(t) dt}{t-z}$$

Подставив граничные значения функций  $\Phi_k$  в равенства (2.4), выражающие непрерывность смещений на линиях  $L_k$ , получим для нахождения функции  $\varphi(t)$  сингулярное интегральное уравнение первого рода

$$\frac{1}{\pi i} \int_{L_k} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\pi i} \int_{L_j} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} = 0, \quad t \in L_k, \quad k=1, 2, \dots, n$$

или

$$\frac{1}{\pi i} \int_{L_k} \frac{M(t, \tau)}{\tau-t} \varphi(\tau) d\tau = 0, \quad t \in L \quad (3.2)$$

$$M(t, \tau) = 1 + \delta_{kj}, \quad t \in L_k, \quad \tau \in L_j$$

( $\delta_{kj}$  — символ Кронекера). Решение уравнения (3.2) надо искать в классе функций  $H^*(L)$ , удовлетворяющих условиям (3.1).

Из теории сингулярных интегральных уравнений [3] следует, что уравнение (3.2) в классе  $H^*(L)$  разрешимо и его решение вблизи конца  $z=c$  линии  $L$  имеет вид

$$\varphi(t) = (z-c)^{-1/2} \varphi_*(t), \quad \varphi_*(t) \in H(L)$$

причем, если каждая из линий  $L_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) состоит только из одного отрезка, то решение, удовлетворяющее условиям (3.1), единственно. Если же хотя бы одна из линий  $L_k$  состоит более чем из одного отрезка, то решение уравнения с дополнительными условиями (3.1) будет содержать комплексные постоянные, которые единственным образом найдутся из условий однозначности смещений при обходе вокруг конечных щелей, образованных между пластиной  $S_0$  и пластинами  $S_k$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ . Точные методы решения уравнения (3.2) в общем случае неизвестны, поэтому для его решения следует пользоваться приближенными методами.

*Замечание 1.* Если на несклеенных берегах пластин  $S_k$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) заданы ненулевые напряжения, то вместо однородного уравнения (3.2) получим неоднородное уравнение, относительно решения которого справедливы те же выводы, что и для уравнения (3.2).

**4. Взаимодействие трех пластин вдоль двух отрезков, не имеющих общих концов.** Пусть пластина  $S_0$  соединена с пластинами  $S_1$  и  $S_2$  вдоль отрезков  $L_1 = [-1/k, -1]$  и  $L_2 = [1, 1/k]$  соответственно (фиг. 1), где  $0 < k < 1$ . Тогда для нахождения вектор-функции  $\Phi(z)$  с компонентами  $\Phi_1, \Phi_2$  имеем матричную задачу Римана (2.8) с матрицей

$$G(t) = G_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad t \in L_1; \quad G(t) = G_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad t \in L_2 \quad (4.1)$$

Согласно [4] для матриц  $G_1$  и  $G_2$  существует невырожденная постоянная матрица  $H$ , одновременно приводящая их к подстановочному виду  $\begin{vmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{vmatrix}$ , причем множество таких матриц бесконечно. В данном случае в качестве  $H$  можно взять матрицу

$$H = \begin{vmatrix} \lambda & 1/\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \lambda = (-1 - i\sqrt{3})/2 \quad (4.2)$$

Тогда

$$H^{-1}G_1H = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad H^{-1}G_2H = \begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ 1/\lambda & 0 \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

Будем искать  $\Phi(z)$  в виде

$$\Phi(z) = H \cdot F(z) \quad (4.4)$$

где  $F(z)$  — новая кусочно-голоморфная вектор-функция с компонентами  $F_1, F_2$ . Тогда из равенств (2.8), (4.1), (4.3) получим

$$\begin{aligned} F_1^+(t) &= F_2^-(t), \quad F_2^+(t) = F_1^-(t), \quad t \in L_1 \\ F_1^+(t) &= \lambda F_2^-(t), \quad F_2^+(t) = F_1^-(t)/\lambda, \quad t \in L_2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Следуя [5], на двулистной римановой поверхности функции  $w = [(1-z^2)(1-k^2z^2)]^{1/2}$  введем функцию

$$F(z, w) = \begin{cases} F_1(z) & \text{на верхнем листе} \\ F_2(z) & \text{на нижнем листе} \end{cases} \quad (4.6)$$

Точки этой поверхности определяются парой  $(z, w)$ , причем точки верхнего и нижнего листов, расположенные друг над другом, определяются парами  $(z, w)$  и  $(z, -w)$  соответственно. Тогда из условий (4.5) для нахождения функции  $F(z, w)$  получим краевую задачу

$$F^+(t, \zeta) = -1/2(1+i\sqrt{3})F^-(t, \zeta), \quad (t, \zeta) \in L_2^+ \cup L_2^- \quad (4.7)$$

на указанной римановой поверхности. На этой поверхности берега  $L_2^+$  и  $L_2^-$  надо рассматривать как две различные линии.

В силу равенств (4.6), (4.4), (2.2) функция  $F(z, w)$  в окрестности  $\infty$  имеет вид

$$F(z, w) = \begin{cases} A_1 z^{-1} + o(z^{-1}) & \text{на верхнем листе} \\ A_2 z^{-1} + o(z^{-1}) & \text{на нижнем листе} \end{cases} \quad (4.8)$$

$$A_1 = \frac{1}{4\sqrt{3}\pi i} (2P_1 + (1 - i\sqrt{3})P_2), \quad A_2 = -\frac{1}{4\sqrt{3}\pi i} (2P_1 + (1 + i\sqrt{3})P_2)$$

Согласно [6] решение задачи (4.7), обращающееся на концах отрезков  $L_1, L_2$  в бесконечность порядка меньше 1 и имеющее в окрестности  $\infty$  вид (4.8), находится по формуле

$$F(z, w) = \frac{c_1 z + c_2 z^2 + c_3 (w+1)}{z w} \exp \left\{ -w \left( \frac{1}{3i} \int_1^{1+k} \frac{dx}{(x-z) [(x^2-1)(1-k^2 x^2)]^{1/2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + i \int_0^{y_0} \frac{dy}{(iy-z) [(1+y^2)(1+k^2 y^2)]^{1/2}} \right) \right\}$$

$$w = [(1-z^2)(1-k^2 z^2)]^{1/2}, \quad c_1 = -c_2 z_0 - c_3 (w_0 + 1) / z_0 \\ c_2 = 1/2 k (\alpha A_1 - \alpha^{-1} A_2), \quad c_3 = 1/2 (\alpha A_1 + \alpha^{-1} A_2) \\ y_0 = -iz_0, \quad z_0 = \operatorname{sn}(iK'/3), \quad w_0 = \operatorname{cn}(iK'/3) \operatorname{dn}(iK'/3)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{3} + i}{2(1+k)} \left( k \operatorname{cn} \frac{iK'}{3} + \operatorname{dn} \frac{iK'}{3} \right)$$

где  $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}$  — эллиптические функции Якоби [7],  $K'$  — полный эллиптический интеграл первого рода в форме Лежандра для модуля  $k$ , а  $w(z)$  — однозначная на римановой поверхности функция, имеющая в окрестности  $\infty$  на верхнем листе вид  $w = kz^2 + O(1)$ .

Из равенств (2.7), (4.4), (4.2), (4.6) находим

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= -(\lambda+1)F(z, v) - (\bar{\lambda}+1)F(z, -v) \\ \Phi_1(z) &= \lambda F(z, v) + \bar{\lambda} F(z, -v) \\ \Phi_2(z) &= F(z, v) + F(z, -v), \quad \lambda = (-1 - i\sqrt{3})/2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

где под  $v$  понимается ветвь функции  $v = [(1-z^2)(1-k^2 z^2)]^{1/2}$ , однозначная в плоскости с разрезом по отрезкам  $[-1/k, -1]$  и  $[1, 1/k]$ , имеющая в окрестности  $\infty$  вид  $v = kz^2 + O(1)$ .

Согласно [3] функция  $\Phi_0(z)$  вблизи точек  $a_1 = -1/k, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = 1/k$  в верхней полуплоскости имеет вид

$$\Phi_0(z) = \frac{(k_1 - ik_2)_j}{2\sqrt{\mp 2\pi(z-a_j)}} + O(\sqrt{z-a_j}), \quad j=1, 2, 3, 4 \quad (4.10)$$

$$(k_1 - ik_2)_j = 2\sqrt{3}\pi (c_1 + c_2 a_j + c_3 / a_j) \beta_j \\ \beta_1 = i[k/(1-k^2)]^{1/2}, \quad \beta_2 = i(1-k^2)^{-1/2}, \quad \beta_3 = \beta_2, \quad \beta_4 = \beta_1$$

где верхний знак относится к точкам  $a_1, a_3$ , нижний — к точкам  $a_2, a_4$ , а под  $(\mp 2\pi(z-a_j))^{1/2}$  в случае точек  $a_1, a_3$  понимается ветвь, однозначная в плоскости с разрезом по лучу  $[a_j, +\infty)$  действительной оси, а в случае точек  $a_2, a_4$  — ветвь, однозначная в плоскости с разрезом по лучу  $(-\infty, a_j]$ , принимающая во всех случаях при  $\mp 2\pi(z-a_j) = 1$  значение 1. В нижней полуплоскости функция  $\Phi_1$  вблизи точек  $a_1, a_2$  и функция  $\Phi_2$  вблизи точек  $a_3, a_4$

$a_k$  имеют те же представления, что и  $\Phi_0$ , но с обратным знаком. Вблизи остальных точек  $a_j$  эти функции ограничены.

Из (2.1) и (4.10) следует, что напряжения вблизи точек  $a_j$  имеют такую же асимптотику, что и в случае первой основной задачи теории упругости для плоскости с разрезами. Следовательно, числа  $(k_1, k_2)_j$  есть коэффициенты интенсивности напряжений вблизи точек  $a_j$ ,  $j=1, 2, 3, 4$ .

*Замечание 2.* Если линии  $L_1, L_2$  состоят из нескольких отрезков, то для нахождения функции  $F(z, w)$  будем иметь задачу Римана (4.7) на гиперэллиптической римановой поверхности [8].

**5. Взаимодействие трех пластин вдоль двух отрезков, имеющих общий конец.** Пусть пластина  $S_0$  соединена с пластинами  $S_1$  и  $S_2$  вдоль отрезков  $L_1=[-a, 0]$  и  $L_2=[0, a]$  соответственно. Тогда аналогично предыдущему случаю для нахождения функции  $F(z, w)$  имеем задачу (4.7) на римановой поверхности функции  $w=(z^2-a^2)^{1/2}$ , листы которой склеены по отрезку  $[-a, a]$ . В данном случае [6]:

$$F(z, w) = \left( c_1 \frac{1}{w} + c_2 \frac{w+ia}{zw} \right) \exp \left( -\frac{w}{3i} \int_0^a \frac{dx}{(x-z)(a^2-x^2)^{1/2}} \right)$$

Потребовав, чтобы  $F(z, w)$  в окрестности  $\infty$  имела вид (4.8), находим  $c_1 = (P_1+P_2)/(4\pi i)$ ,  $c_2 = (P_1-P_2)/(4\sqrt{3}\pi)$ .

Функции  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2$  выражаются через  $F(z, w)$  по формулам (4.9), где  $v=(z^2-a^2)^{1/2}$  — ветвь многозначной функции, однозначная в плоскости с разрезом по отрезку  $[-a, a]$ , имеющая в окрестности  $\infty$  вид  $v=z+O(z^{-1})$ .

Согласно [3] в нижней полуплоскости вблизи точки  $z=-a$  функция  $\Phi_2(z)$  ограничена, функция

$$\Phi_1(z) = \frac{(k_1-ik_2)_1}{2\sqrt{-2\pi(z+a)}} + O(\sqrt{z+a}), \quad (k_1-ik_2)_1 = -2\sqrt{\frac{3\pi}{a}}(c_2+ic_1) \quad (5.1)$$

а функция  $\Phi_0 - \Phi_1$ . Вблизи точки  $z=a$  функция  $\Phi_1(z)$  ограничена, функция

$$\Phi_2(z) = \frac{(k_1-ik_2)_2}{2\sqrt{2\pi(z-a)}} + O(\sqrt{z-a}), \quad (k_1-ik_2)_2 = \sqrt{\frac{3\pi}{a}}(c_2-ic_1) \quad (5.2)$$

а функция  $\Phi_0 - \Phi_2$ . Числа  $(k_1, k_2)_{1,2}$  в этих представлениях есть коэффициенты интенсивности напряжений. Вблизи точки  $z=0$  функция

$$\Phi_1(z) = (-1-i\sqrt{3})c_2z^{-3/2} + \frac{1-i\sqrt{3}}{2ia}c_1z^{-1/2} + O(z^{1/2}) \quad (5.3)$$

в верхней полуплоскости и

$$\Phi_1(z) = (-1+i\sqrt{3})c_2z^{-3/2} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2ia}c_1z^{-1/2} + O(z^{1/2}) \quad (5.4)$$

в нижней полуплоскости, функция

$$\Phi_2(z) = 2c_2z^{-3/2} - \frac{1}{ia}c_1z^{-1/2} + O(z^{1/2})$$

в обеих полуплоскостях, а функция  $\Phi_0 - \Phi_1 - \Phi_2$ . В этих представлениях под  $z^{-3/2}$  и  $z^{-1/2}$  понимаются ветви, однозначные в плоскости с разрезом по лучу  $[0, +\infty)$  действительной оси, принимающие на верхнем берегу разреза положительные значения. На действительной положительной полуоси представления (5.3) и (5.4) совпадают. Из этих представлений видно,

что интенсивность напряжений вблизи точки  $z=0$  определяется двумя комплексными параметрами — коэффициентами при  $z^{-2/3}$  и  $z^{-1/3}$ .

**6. Взаимодействие трех пластин вдоль двух лучей.** Пусть пластина  $S_0$  соединена с пластинами  $S_1$  и  $S_2$  вдоль лучей  $L_1=(-\infty, -a]$  и  $L_2=[a, +\infty)$  соответственно. Тогда имеем задачу Римана (4.7) на римановой поверхности функции  $w=(z^2-a^2)^{1/2}$ , листы которой склеены по лучам  $L_1$  и  $L_2$ . Так как в данном случае  $\infty$  является точкой соединения всех пластин, то задавать главные векторы сил, действующих на  $\infty$  в отдельности в каждой из пластин, нельзя. В данном случае можно задать лишь главный вектор сил, действующих на  $\infty$  во всех пластинах вместе. Эта сила выражается через напряжения, действующие на несклеенные берега пластин. Так как эти напряжения равны нулю, то главный вектор сил равен нулю. Окрестность  $\infty$  на рассматриваемой конструкции представляет угол величины  $3\pi$ , поэтому задача имеет ненулевые исчезающие на  $\infty$  решения даже при нулевых напряжениях на границе конструкции, т. е. является задачей класса N [9]. Следовательно, для полной определенности задачи надо задать еще дополнительные условия. Как правило, в качестве таких условий задают закон убывания напряжений при  $z \rightarrow \infty$  или, что все равно, функций  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2$ .

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние, которое в пластине  $S_0$  определяется функцией  $\Phi_0(z)$ , имеющей в окрестности  $\infty$  вид

$$\Phi_0(z) = A_1 z^{-2/3} + A_2 z^{-1/3} + o(z^{-1/3}) \quad (6.1)$$

где  $A_1, A_2$  — заданные комплексные постоянные, а под  $z^{-2/3}$  и  $z^{-1/3}$  понимаются ветви, однозначные в плоскости с разрезом по лучу  $[0, +\infty)$ , принимающие на верхнем берегу разреза положительные значения.

Согласно [6] исчезающее на  $\infty$  решение задачи (4.7) имеет вид

$$F(z, w) = \left( c_1 \frac{1}{w} + c_2 \frac{w-z}{w} \right) \exp \left( -\frac{w}{3} \int_a^\infty \frac{dx}{(x-z)(x^2-a^2)^{1/2}} \right)$$

Функции  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2$  выражаются через  $F(z, w)$  по формулам (4.9), где  $v=(z^2-a^2)^{1/2}$  — ветвь, однозначная в плоскости с разрезами по лучам  $(-\infty, -a]$  и  $[a, +\infty)$ , принимающая при  $z=0$  значение  $ia$ . В окрестности  $\infty$  эти функции имеют вид

$$\Phi_0(z) = 1/2(-1+i\sqrt{3})(c_1-1/2a^2c_2)z^{-2/3} - (1+i\sqrt{3})c_2z^{-1/3} + O(z^{1/3}), \quad z \in S_0 \quad (6.2)$$

$$\Phi_2(z) = (c_1-1/2a^2c_2)z^{-2/3} + 2c_2z^{-1/3} + O(z^{1/3}), \quad z \in S_2$$

Функция  $\Phi_1$  в окрестности  $\infty$  в пластине  $S_1$  имеет тот же вид, что и  $\Phi_0$  в окрестности  $\infty$  в пластине  $S_0$ . Сравнивая представления (6.1) и (6.2), находим

$$c_1 = -1/2(1+i\sqrt{3})A_1 - 1/8(1-i\sqrt{3})a^2A_2, \quad c_2 = 1/4(-1+i\sqrt{3})A_2$$

Аналогично надо поступать, если вместо поведения  $\Phi_0(z)$  в окрестности  $\infty$  задано поведение  $\Phi_1(z)$  или  $\Phi_2(z)$ .

Вблизи точек  $z=-a$  и  $z=a$  функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  имеют вид (5.1) и (5.2), где коэффициенты интенсивности напряжений

$$(k_1-ik_2)_1 = -2i\sqrt{3}\pi/a(c_1+ac_2), \quad (k_1-ik_2)_2 = -2i\sqrt{3}\pi/a(c_1-ac_2)$$

а функции  $\Phi_0 \rightarrow \Phi_1$  вблизи  $z=-a$  и  $\Phi_0 \rightarrow \Phi_2$  вблизи  $z=a$ .

**7. Вторая конструкция.** Пусть упругие однородные изотропные бесконечные пластины  $E_1, E_2$  малой толщины с разрезами по одним и тем же отрезкам  $L_j=[a_j, b_j]$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) действительной оси наложены одна на другую так, что  $j$ -й разрез верхней пластины  $E_1$  расположен над  $j$ -м разрезом нижней пластины  $E_2$  и «одноименные» берега разрезов этих пла-

стиги соединены между собой, т. е. верхние и нижние берега разрезов пластины  $E_1$  соединены соответственно с верхними и нижними берегами разрезов пластины  $E_2$ . Полученная конструкция представляет собой двулистную поверхность со сквозными пространственными разрезами. Сечение этой конструкции с перпендикулярной ей плоскостью, проходящей через один из разрезов, выглядит без учета толщины пластин, как на фиг. 2. Пластина  $E_k$  ( $k=1, 2$ ) имеет толщину  $h_k$  и характеризуется упругими постоянными  $\mu_k, \kappa_k$  [1].



Фиг. 2

Будем считать, что 1) пластины находятся в обобщенном плоском напряженном состоянии, их поверхности между собой не касаются или касаются при полном отсутствии сил трения и пространственный эффект концентрации напряжений на линиях соединения пластин и вблизи вершин пространственных разрезов пренебрежимо мал, 2) к берегам  $L^+$  и  $L^-$  пространственного разреза  $L = \cup L_j$  ( $j=1 \div m$ ) приложены  $H$ -непрерывные внешние усилия  $(X+iY)_{\text{ext}}^+$  и  $(X+iY)_{\text{ext}}^-$  соответственно, расположенные в плоскостях пластин, 3) на  $\infty$  пластины  $E_k$  ( $k=1, 2$ ) действуют главные напряжения  $(\sigma_1)_k$  и  $(\sigma_2)_k$  в направлениях, составляющих с действительной осью углы  $\varphi_k$  и  $\varphi_k + \pi/2$  соответственно, сосредоточенная сила  $P_k = X_k + iY_k$  и вращение  $\omega_k$ . Напряжения и силы берутся в расчете на единицу толщины пластины. Силы  $P_1, P_2$  и внешние усилия на берегах разрезов удовлетворяют условию равновесия рассматриваемой конструкции.

В данном случае в пластине  $E_k$  ( $k=1, 2$ ) напряжения  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})_k$  в расчете на единицу толщины пластины и частные производные по  $x$  от компонент смещения  $(u_1', u_2')_k$  выражаются через две функции  $\Phi_k(z), \Omega_k(z)$  ( $z = x + iy$ ) по формулам [1]:

$$\begin{aligned} (\sigma_x + \sigma_y)_k &= 4 \operatorname{Re} \Phi_k(z) \\ (\sigma_y - i\tau_{xy})_k &= \Phi_k(z) + \Omega_k(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} \\ 2\mu_k (u_1' + iu_2')_k &= \kappa_k \Phi_k(z) - \Omega_k(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Эти функции голоморфны в плоскости с разрезами  $L_j$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) и имеют в окрестности  $\infty$  вид

$$\begin{aligned} \Phi_k(z) &= \gamma_k - \frac{P_k}{2\pi(1+\kappa_k)} \frac{1}{z} + O(z^{-2}) \\ \Omega_k(z) &= \bar{\gamma}_k + \bar{\gamma}_k' + \frac{\kappa_k P_k}{2\pi(1+\kappa_k)} \frac{1}{z} + O(z^{-2}) \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\gamma_k = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2)_k + 2i\mu_k \omega_k / (1 + \kappa_k), \quad \gamma_k' = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)_k \exp(-2i\varphi_k) \quad (7.3)$$

Будем рассматривать напряженно-деформированное состояние конструкции, описываемое функциями  $\Phi_k, \Omega_k, k=1, 2$ , которые на концах разрезов могут обращаться в бесконечность порядка меньше 1, а в остальных точках  $t$  разрезов непрерывны и удовлетворяют условиям (2.3).

8. Решение задачи. В силу равенств (7.1) и (2.3) функции  $\Phi_k, \Omega_k$  ( $k=1, 2$ ) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(t) + \Omega_1^-(t) + h_* (\Phi_2^+(t) + \Omega_2^-(t)) &= f_1(t) \\ \Phi_1^-(t) + \Omega_1^+(t) + h_* (\Phi_2^-(t) + \Omega_2^+(t)) &= f_2(t) \\ \mu_* (\kappa_1 \Phi_1^+(t) - \Omega_1^-(t)) &= \kappa_2 \Phi_2^+(t) - \Omega_2^-(t) \end{aligned} \quad (8.1)$$



$$\mu_* (\kappa_1 \Phi_1^-(t) - \Omega_1^+(t)) = \kappa_2 \Phi_2^-(t) - \Omega_2^+(t), \quad t \in L = \bigcup_{j=1}^m L_j$$

$$h_* = h_2/h_1, \quad \mu_* = \mu_2/\mu_1, \quad f_1(t) = -i(X+iY)_{\text{ext}}^+/h_1, \quad f_2(t) = -i(X+iY)_{\text{ext}}^-/h_1$$

Первые два условия (8.1) выражают равновесие точек линий соединения пластин, а последние два условия — равенство смещений точек пластин  $E_1$  и  $E_2$  на линиях соединения.

Вычитая и складывая первые два условия (8.1) и обозначая

$$\Phi_1 + h_* \Phi_2 - \Omega_1 - h_* \Omega_2 = F_1, \quad \Phi_1 + h_* \Phi_2 + \Omega_1 + h_* \Omega_2 = F_2 \quad (8.2)$$

получим

$$F_1^+(t) = F_1^-(t) + f_1(t) - f_2(t), \quad F_2^+(t) = -F_2^-(t) + f_1(t) + f_2(t), \quad t \in L \quad (8.3)$$

Аналогично из последних двух условий (8.1) для функций

$$\mu_* \kappa_1 \Phi_1 - \kappa_2 \Phi_2 - \mu_* \Omega_1 + \Omega_2 = F_3, \quad \mu_* \kappa_1 \Phi_1 - \kappa_2 \Phi_2 + \mu_* \Omega_1 - \Omega_2 = F_4 \quad (8.4)$$

получим

$$F_3^+(t) = -F_3^-(t), \quad F_4^+(t) = F_4^-(t), \quad t \in L \quad (8.5)$$

Запишем равенства (8.2), (8.4) в матричной форме

$$F(z) = R\Phi(z) \quad (8.6)$$

$$F(z) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}, \quad \Phi(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & h_* & -1 & -h_* \\ 1 & h_* & 1 & h_* \\ \mu_* \kappa_1 & -\kappa_2 & -\mu_* & 1 \\ \mu_* \kappa_1 & -\kappa_2 & \mu_* & -1 \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

Матрица  $R$  невырожденная. Функции  $F_k$  на концах разрезов могут обращаться в бесконечность порядка меньше 1, а их поведение в окрестности  $\infty$  определяется в силу (8.6), (8.7), (7.2) представлением

$$F(z) = RG + RH z^{-1} + O(z^{-2}) \quad (8.8)$$

$$G = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_1' \\ \bar{\gamma}_2 + \bar{\gamma}_2' \end{pmatrix}, \quad H = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} -P_1/(1 + \kappa_1) \\ -P_2/(1 + \kappa_2) \\ \kappa_1 P_1/(1 + \kappa_1) \\ \kappa_2 P_2/(1 + \kappa_2) \end{pmatrix}$$

где  $\gamma_h, \gamma_h'$  определяются формулами (7.3), а  $O(z^{-2})$  — вектор-функция, каждая компонента которой при больших  $z$  сравнима с  $z^{-2}$ .

Решениями задач (8.3), (8.5) будут [3]:

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L [f_1(t) - f_2(t)] \frac{dt}{t-z} + c_{10}$$

$$F_2(z) = X(z) \left( \frac{1}{2\pi i} \int_L [f_1(t) + f_2(t)] \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} + c_{20} + c_{21}z + \dots + c_{2m}z^m \right) \quad (8.9)$$

$$F_3(z) = X(z) (c_{30} + c_{31}z + \dots + c_{3m}z^m), \quad F_4(z) = c_{40}$$

$$X(z) = \left( \prod_{j=1}^m (z-a_j)(z-b_j) \right)^{-1/2}$$

где под  $X(z)$  понимается ветвь, однозначная в плоскости с разрезом по линии  $L$  и удовлетворяющая условию:  $\lim z^m X(z) = 1$  при  $z \rightarrow \infty$ .

Из (8.8), (8.9) находим

$$\begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{2m} \\ c_{3m} \\ c_{40} \end{pmatrix} = RG, \quad \begin{pmatrix} \left( \int_L [f_2(t) - f_1(t)] dt \right) / (2\pi i) \\ c_{2, m-1} + qc_{2m} \\ c_{3, m-1} + qc_{3m} \\ 0 \end{pmatrix} = RH \quad (8.10)$$

$$q = (a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_m + b_m) / 2$$

Если  $m=1$ , то равенствами (8.10) все постоянные  $c_{hj}$  будут определены. При  $m>1$  для определения остальных постоянных  $c_{hj}$  надо потребовать, чтобы приращение смещений вдоль замкнутых кривых, составленных из берегов пространственных разрезов  $L_j$  ( $j=1, 2, \dots, m-1$ ) и кривых, составленных из отрезков  $[b_j, a_{j+1}]$ ,  $j=1, 2, \dots, m-1$ , расположенных в  $E_1$  и  $E_2$ , было равно нулю. Это объясняется тем, что на рассматриваемой поверхности имеются  $2m-2$  неомотопных между собой замкнутых кривых, таких, что все остальные замкнутые кривые получаются из них (одной или нескольких) непрерывным деформированием. Такими неомотопными кривыми являются указанные выше кривые, приращение смещений вдоль которых должно быть равно нулю, откуда на основании соотношений (7.1), (8.6), (8.7) получим

$$\sum_{k=1}^3 [\mu_*(\kappa_1 Q_{1k} - Q_{3k}) - \kappa_2 Q_{2k} + Q_{4k}] \int_{\gamma_j} F_k(t) dt = 0$$

$$\sum_{k=1}^3 (\kappa_1 Q_{1k} + Q_{3k}) \int_{\gamma_j} [F_k^+(t) - F_k^-(t)] dt = 0, \quad j=1, 2, \dots, m-1$$

где  $Q_{jk}$  — элементы матрицы  $Q=R^{-1}$ . Подставив в эти равенства вместо  $F_k$  их значения, получим для определения оставшихся  $2m-2$  постоянных  $c_{hj}$  ( $k=2, 3; j=0, 1, \dots, m-2$ ) систему  $2m-2$  линейных алгебраических уравнений, однозначная разрешимость которой доказывается аналогично [1].

**9. Поведение напряжений вблизи вершин разрезов и инвариантные Г-интегралы.** Так как  $\Phi(z)=R^{-1}F(z)$ , то согласно (7.1), (8.9) поведение напряжений и производных от компонент смещения определяется функциями  $F_2, F_3$ , которые вблизи точки  $z=a_j$  имеют вид [3]:

$$F_k(z) = D_{kj}(z-a_j)^{-1/2} + O(1), \quad k=2, 3$$

$$D_{2j} = \eta_j(a_j) \left( \frac{1}{2\pi i} \int_L [f_1(t) + f_2(t)] \frac{dt}{X^+(t)(t-a_j)} + c_{20} + c_{21}a_j + \dots + c_{2m}a_j^m \right)$$

$$D_{3j} = \eta_j(a_j) (c_{30} + c_{31}a_j + \dots + c_{3m}a_j^m), \quad \eta_j(z) = (z-a_j)^{1/2} X(z) \quad (9.1)$$

где под  $(z-a_j)^{1/2}$  понимается ветвь, однозначная в плоскости с разрезом по лучу  $[a_j, +\infty)$  действительной оси, принимающая на верхнем берегу разреза положительные значения. Отсюда для напряжений и производных от компонент смещения вблизи вершины  $z=a_j$  в пластине  $E_k$  ( $k=1, 2$ ) получим следующие представления:

$$(\sigma_x + \sigma_y)_k = 4 \operatorname{Re} (\xi_k (z-a_j)^{-1/2}) + O(\ln r)$$

$$\left\{ \begin{matrix} (\sigma_y - i\tau_{xy})_k \\ 2\mu_k (u_1' + iu_2')_k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \kappa_k \end{matrix} \right\} \xi_k (z-a_j)^{-1/2} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right\} (\xi_{k+2} + i^{1/2} \xi_k) \overline{(z-a_j)}^{-1/2} -$$

$$- i^{1/2} \xi_k \overline{(z-a_j)}^{-1/2} + O(\ln r) \quad (9.2)$$

$r=|z-a_j|$ ,  $\xi_k=Q_{k2}D_{2j}+Q_{k3}D_{3j}$ ,  $k=1, 2$ ;  $j=1, 2, \dots, m$ , где  $Q_{kj}$  — элементы матрицы  $Q=R^{-1}$ .

Представления вблизи точек  $z=b_j$  получаются аналогично. Из равенств (9.2) видно, что для рассматриваемой конструкции и для отдельной пластины с разрезом асимптотические представления напряжений вблизи вершин разрезов аналогичны. Однако они не совпадают. Если в случае отдельной пластины с разрезом асимптотика зависит от двух действительных параметров (коэффициентов интенсивности напряжений), то в случае рассматриваемой конструкции она зависит от двух комплексных параметров  $D_{2j}, D_{3j}$ , т. е. четырех действительных параметров.

Замечание 3. Аналогично рассматриваемой двулистной конструкции со сквозными пространственными разрезами исследуется также напряженно-деформированное состояние многолистной конструкции со сквозными пространственными разрезами, образованной из  $n$  упругих пластин. В этом случае асимптотика напряжений вблизи вершин разрезов зависит от  $2n$  действительных параметров.

На основании равенств (9.1), (9.2) легко вычислить инвариантные  $\Gamma$ -интегралы первого рода [10]  $\Gamma_k=\Gamma_{k1}+i\Gamma_{k2}$  ( $k=1, 2$ ) вдоль малых окружностей с центрами в точке  $a_j$ , расположенных в пластинах  $E_k$  ( $k=1, 2$ ) соответственно. Они равны

$$\Gamma_k=\Gamma_{k1}+i\Gamma_{k2}=\pi(\alpha_k+1)(\xi_k\xi_{k+2}-i\operatorname{Im}\xi_k^2)/\mu_k, \quad k=1, 2 \quad (9.3)$$

где  $\xi_k$  определены выше.

В данном случае хрупкое или квазихрупкое разрушение конструкции будет происходить только по одному листу или по обоим листам одновременно, в которых трещины могут расти в разных направлениях. Разрушение может происходить также и по линиям соединения пластин. В качестве критериев локального разрушения пластин и их линий соединения можно взять известные критерии [9—12].

Рассмотрим случай однородной конструкции постоянной толщины.

Пусть имеется лишь один разрез  $[a_1, b_1]=[-a_1, a_1]$  и  $h_1=h_2=h$ ,  $\mu_1=\mu_2=\mu$ ,  $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ . Тогда в равенствах (9.2), (9.3) числа

$$\xi_{1,2}=(\alpha D_2 \pm D_3)/(4\alpha), \quad \xi_{3,4}=(D_2 \mp D_3)/4, \quad D_3=(c_{30}+c_{31}a)/\sqrt{2a}$$

$$D_2=\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a [f_1(t)+f_2(t)] \sqrt{\frac{t+a}{t-a}} dt + c_{20} + c_{21}a\right) / \sqrt{2a}$$

где числа  $c_{kj}$  определяются из равенств (8.10), (8.7), (8.8).

Если обе линии соединения пластин свободны от внешних усилий, а сами пластины растягиваются на  $\infty$  сосредоточенными силами  $P$  и  $-P$  соответственно при отсутствии на  $\infty$  напряжений и вращений, то  $\Gamma_k=\Gamma_{k1}+i\Gamma_{k2}=-[\alpha|P|^2+i\operatorname{Im}P^2]/(8\pi a(\alpha+1)\mu)$ ,  $k=1, 2$ .

Если в пластине  $E_1$  на  $\infty$  действует главное напряжение  $(\sigma_1)_\infty=\sigma$  в направлении, составляющем с действительной осью угол  $\varphi_1=0$  или  $\varphi_1=\pi/2$ , а все остальные исходные данные задачи нулевые, то

$$\Gamma_k=\Gamma_{k1}+i\Gamma_{k2}=-\pi a(\alpha+1)^3\sigma^2/(512\alpha\mu), \quad k=1, 2$$

при продольном растяжении ( $\varphi_1=0$ ) и

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Gamma_{11} + i\Gamma_{12} = \pi a(\alpha+1)(5\alpha-3)(7-\alpha)\sigma^2/(512\alpha\mu) \\ \Gamma_2 &= \Gamma_{21} + i\Gamma_{22} = 3\pi a(\alpha+1)^3\sigma^2/(512\alpha\mu) \end{aligned}$$

при нормальном отрыве ( $\varphi_1=\pi/2$ ), причем в последнем случае  $\Gamma_1 > \Gamma_2$ .

Сравнение полученных  $\Gamma$ -интегралов и  $\Gamma$ -интеграла  $\Gamma=\pi a(\alpha+1)\sigma^2/(8\mu)$ , соответствующего нормальному отрыву одной отдельной пластины

с трещиной  $[-a, a]$ , позволяют сделать в рамках энергетического критерия разрушения [10] следующие заключения.

Конструкция более устойчива продольному растяжению, чем нормальному отрыву. При нормальном отрыве отдельного листа разрушение происходит по этому листу, причем нормальному отрыву отдельного листа конструкция более устойчива, чем просто отдельная пластина с трещиной.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. *Нуллер Б. М.* Контактные задачи для системы упругих полуплоскостей // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 302–306.
3. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
4. *Кругий Ю. С.* Факторизация кусочно-постоянной матрицы второго порядка специального вида // Краевые задачи и их приложения. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та. 1989. С. 54–59.
5. *Зверович Э. И., Померанцева Л. И.* Задача Римана для  $n$  пар функций с матрицами подстановочного типа // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. № 1. С. 20–23.
6. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. Вып. 1. С. 143–179.
7. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
8. *Зверович Э. И.* О конструктивном решении краевой задачи Римана на гиперэллиптических римановых поверхностях // Докл. АН СССР. 1974. Т. 199. № 4. С. 758–761.
9. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
10. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
11. *Иелев Д. Д.* О теории трещин квазихрупкого разрушения // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1967. № 6. С. 88–128.
12. *Партоп В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 504 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию  
30.X.1989