

УДК 539.375

© 1992 г. А. В. БАЛУЕВА, Р. В. ГОЛЬДШТЕЙН

КИНЕТИЧЕСКОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРЕЩИН ПРИ ДИФФУЗИИ В НИХ ГАЗА В СЛОЕ

Развивается метод решения задачи о кинетическом развитии трещины отрыва в серединной плоскости слоя. При этом условия нагружения слоя с трещиной контролируются процессом диффузии в нее газа. Трещиностойкость материала, как это принято в кинетических теориях, не является константой материала, а характеризуется некоторой функцией — зависимостью скорости роста трещины от величины коэффициента интенсивности напряжений [1, 2]. Данная постановка моделирует, например, процессы расщепления трубопроводов и сосудов давления в условиях наводороживания. Здесь размеры трещин сравнимы с размерами тел и задачу в предположении безграничной среды решать уже нельзя.

Описаны методы решения статических задач о трещине, занимающей плоскую область произвольного очертания в плане в слое, и диффузии газа в трещину в слое при заданных концентрациях газа на его поверхностях. Для решения этих трехмерных задач развивается метод граничных элементов (МГЭ), при котором размерность задач понижается путем сведения их к двумерным интегродифференциальным уравнениям, записанным по области трещины. На основе методов решения статических задач предлагается метод расчета и выполнен анализ кинетики трещин в слое.

1. Уравнения для трещины в слое и диффузии газа в трещину в слое. Пусть трещина распространяется в серединной плоскости слоя $z=0$, имеет произвольную начальную форму в плане G , толщина слоя $|z| < H$ равна $2H$. Условия наводороживания сводятся к тому, что на границах слоя поддерживается концентрация водорода c_1 и c_2 . Тогда граничная задача о диффузии газа в трещину в слое в предположении о квазистационарности, удаленности от равновесного состояния и т. д. имеет вид¹

$$\Delta c=0, c|_{z=H}=c_1, c|_{z=-H}=c_2 \quad (1.1)$$

$$c|_{z=0}=0, (x, y) \in G; \partial c/\partial z|_{z=0}=0, (x, y) \in G$$

Вычитая равновесное состояние $c=(c_1-c_2)z/2H+(c_1+c_2)/2$ и учитывая симметрию задачи, приходим к граничной задаче

$$\Delta c=0, c|_{z=H}=0 \quad (1.2)$$

$$c|_{z=0}=- (c_1+c_2)/2, (x, y) \in G; \partial c/\partial z|_{z=0}=0, (x, y) \in G$$

Требуется найти плотность диффузионного потока через трещину $q(x, y)=\partial c/\partial z|_{z=0}$, $(x, y) \in G$. Предположим $q(x, y)$ известно. Тогда имеем граничную задачу

$$\Delta c=0, c|_{z=H}=0, \partial c/\partial z|_{z=0}=q(x, y) \quad (1.3)$$

¹ Балужева А. В., Гольдштейн Р. В., Федоренко Р. П. Кинетика газонаполненных трещин: постановка задачи, численный метод и основные результаты расчетов: Препринт № 39. М.: Ин-т прикл. математики РАН, 1989. 27 с.

После обобщенного преобразования Фурье

$$\bar{c}(\lambda_1, \lambda_2, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} c(x, y, z) e^{-i(\lambda_1 x + \lambda_2 y)} dx dy \quad (1.4)$$

$$c(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{c}(\lambda_1, \lambda_2, z) e^{i(\lambda_1 x + \lambda_2 y)} d\lambda_1 d\lambda_2$$

граничная задача (1.3) принимает вид

$$\partial^2 \bar{c} / \partial z^2 - |\lambda|^2 \bar{c} = 0, \quad \partial \bar{c} / \partial z|_{z=0} = \bar{q}(\lambda), \quad \bar{c}|_{z=0} = 0 \quad (1.5)$$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2), \quad |\lambda| = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{1/2} \quad (1.6)$$

$$\bar{c}(\lambda, z) = A(\lambda) e^{-|\lambda|z} + B(\lambda) e^{|\lambda|z}$$

После подстановки (1.6) в граничные условия (1.5) имеем

$$\bar{c}(\lambda, z) = - \frac{q(\lambda)}{|\lambda| (1 + e^{-2H|\lambda|})} (e^{-|\lambda|z} - e^{-2|\lambda|H} e^{|\lambda|z}) \quad (1.7)$$

Тогда, применяя к (1.7) обратное преобразование Фурье (1.4), получаем

$$c(x, z) = - \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} q(x') \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda_1 x - \lambda_2 y)} \frac{e^{-|\lambda|z} - e^{-2|\lambda|H} e^{|\lambda|z}}{|\lambda| (1 + e^{-2|\lambda|H})} d\lambda dx' \quad (1.8)$$

Пусть теперь $z=0$, $x \in G$. Тогда из граничных условий (1.2) имеем

$$\frac{c_1 + c_2}{2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_G q(x') K(x - x') dx', \quad x \in G \quad (1.9)$$

$$K(x) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{th}(|\lambda|H)}{|\lambda|} e^{i(\lambda, x)} d\lambda \quad (1.10)$$

или учитывая теорему о свертке $q * K = F^{-1}(q(\xi) K(\xi))$, приходим к уравнению диффузии газа в трещину

$$\frac{c_1 + c_2}{2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{q}(\xi) \frac{\text{th}(|\xi|H)}{|\xi|} e^{-i(\xi, x)} d\xi, \quad x \in G \quad (1.11)$$

Выделяя главную часть в подинтегральном выражении при $H \rightarrow \infty$ уравнение (1.11) можно переписать

$$(\Lambda - \Lambda_H^f) q = (c_1 + c_2)/2, \quad x \in G \quad (1.12)$$

$$\Lambda q \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\xi|} q(\xi) e^{-i(x, \xi)} d\xi$$

оператор для безграничного пространства

$$\Lambda_H^f \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} H \iint_{-\infty}^{+\infty} K^f(H|\xi|) q(\xi) e^{-i(x, \xi)} d\xi$$

$$K^f(H|\xi|) = 2e^{-2H|\xi|} / ((1 + e^{-2H|\xi|})H|\xi|)$$

Для задачи теории упругости о трещине, нагруженной нормальными расклинивающими нагрузками $p(x_1, x_2)$, в слое имеем граничные условия $z=0, \sigma_{33}=-p(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in G, \sigma_{12}=\sigma_{23}=0, z=\pm H \sigma_{33}=\sigma_{13}=\sigma_{23}=0$.

Для получения интегрального уравнения относительно нормальных смещений поверхностей трещины $u(x_1, x_2)$, сначала вычисляются напряжения на месте границ слоя $z=\pm H$ в задаче о трещине в безграничной среде, считая $u(x_1, x_2)$ известной. Затем решается задача о слое без трещины, нагруженном противоположными по знаку напряжениями, и сумма напряжений, возникающих в обеих задачах на месте трещины приравнивается заданным нагрузкам. В результате, получается уравнение²

$$(\Lambda - \Lambda_H)u = p(x_1, x_2) 4\pi(1-\nu^2)/E, (x_1, x_2) \in G$$

$$\Lambda u \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi| u(\xi) e^{-i(x, \xi)} d\xi \quad (1.13)$$

оператор для безграничного пространства

$$\Lambda_H u \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{H} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(H|\xi|) u(\xi) e^{-i(x, \xi)} d\xi$$

$$K(H|\xi|) = 2H|\xi| (1 + 2H|\xi| + 2H^2|\xi|^2 - e^{-2H|\xi|}) / (4H|\xi| + e^{2H|\xi|} - e^{-2H|\xi|})$$

Задача о кинетическом росте пространственной трещины под действием диффузии в нее газа в слое, сводится к той же системе уравнений, что и для безграничного пространства³, но интегродифференциальные уравнения задач теории упругости и теории диффузии заменяются на соответствующие интегродифференциальные уравнения (1.13) и (1.12) задач в слое. Рассмотрим сначала решение уравнений (1.12) и (1.13) отдельно. Ввиду громоздкости (в плане машинного времени) проведения решения в слое произвольной толщины, они решаются в приближении толстого слоя, т. е. когда $H > r_0$ — радиуса трещины.

2. Вычисление матрицы жесткости в задаче о трещине в толстом слое. После дискретизации задачи о трещине в слое, аналогичной дискретизации задачи о трещине в безграничном пространстве, решение интегрального уравнения (1.17) сводится к решению линейной системы алгебраических уравнений

$$\sum_{q_1, q_2 \in N(h)} (a_{p_1 p_2 q_1 q_2} - b_{p_1 p_2 q_1 q_2}) c_{q_1 q_2} = p_{q_1 q_2}, (q_1, q_2) \in N(h) \quad (2.1)$$

где $N(h)$ — множество узлов, попадающих в область трещины G , h — шаг сетки, $c_{p_1 p_2}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению и совпадающие со смещениями в узлах сетки $u(hp_1, hp_2)$. Здесь $a_{p_1 p_2 q_1 q_2}$ — вычисленные уже элементы матрицы жесткости для задачи о трещине в безграничном пространстве⁴, $b_{p_1 p_2 q_1 q_2}$ — добавки к матрице жесткости из-за наличия слоя, подлежащие расчету. Их можно записать

$$b_{q_1 p} = (\Lambda_H \Psi_{p_1 p_2}, \Psi_{q_1 q_2}) \quad (2.2)$$

² Гольдштейн Р. В., Елинов В. М. Некоторые качественные методы в механике разрушения: Препринт № 76. М.: ИИМ РАН, 1976. 53 с.

³ См. указ. публ. с. 114.

⁴ Гольдштейн Р. В., Клейн И. С., Эскин Г. И. Вариационный метод решения некоторых интегральных и интегродифференциальных уравнений теории упругости: Препринт № 33. М.: ИИМ РАН, 1973. 64 с.

Перепишем (2.2) в виде

$$b_{q_1 q_2 p_1 p_2} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_H \Psi_{p_1 p_2} \bar{\Psi}_{q_1 q_2} dx_1 dx_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_H \Psi_{p_1 p_2}^* \bar{\Psi}_{q_1 q_2}^* d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.3)$$

в силу равенства Парсеваля, где $\Psi_{q_1 q_2}^*$ определяются

$$\Psi_{q_1 q_2}^* = h^2 \exp[i(q_1 h_1 \xi_1 + q_2 h_2 \xi_2)] \frac{\sin^2(h\xi_1/2)}{(h\xi_1/2)^2} \frac{\sin^2(h\xi_2/2)}{(h\xi_2/2)^2} \quad (2.4)$$

Учитывая, что $\Lambda_H \Psi_{p_1 p_2}^* = K(H|\xi|) \Psi_{p_1 p_2}^*$, получаем из (2.3) и (2.4):

$$b_{q_1 q_2 p_1 p_2} = \frac{h^4}{(2\pi)^2} \frac{1}{H} \iint_{-\infty}^{+\infty} K(H|\xi|) \exp[i((p_1 - q_1)h\xi_1 + (p_2 - q_2)h\xi_2)] \times \\ \times \frac{\sin^2(h\xi_1/2)}{(h\xi_1/2)^2} \frac{\sin^2(h\xi_2/2)}{(h\xi_2/2)^2} d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.5)$$

Формулу (2.5) можно записать в виде

$$b_{q_1 q_2 p_1 p_2} = \frac{h^4}{H} F_{h_1 h_2 h_1 h_2} [K(H|\xi|) \Psi_0^{*2}(h\xi_1, h\xi_2)] \quad (2.6)$$

$$\Psi_0^{*2}(\eta_1, \eta_2) = \frac{\sin^2(\eta_1/2)}{(\eta_1/2)^2} \frac{\sin^2(\eta_2/2)}{(\eta_2/2)^2} \quad (2.7)$$

$$k_1 = p_1 - q_1, \quad k_2 = p_2 - q_2$$

Функция $\Psi_0^{*2}(\eta_1, \eta_2)$ имеет разложение в ряд Тейлора⁵

$$\Psi_0^{*2}(\eta_1, \eta_2) = \sum_{r_1 + r_2 = 0}^N \Phi_{r_1 r_2} \eta_1^{2r_1} \eta_2^{2r_2} + r_{2N+2}(\eta_1, \eta_2)$$

где первые несколько коэффициентов имеют вид

$$\sum_{r_1 + r_2 = 0}^2 \Phi_{r_1 r_2} \eta_1^{2r_1} \eta_2^{2r_2} = 1 - \frac{|\eta|^2}{6} + \frac{|\eta|^4}{80} - \frac{\eta_1^2 \eta_2^2}{360}$$

Ввиду этого разложения формула (2.7) принимает вид

$$b_{q_1 q_2 p_1 p_2} = \frac{h^4}{H} \left\{ \sum_{r_1 + r_2 = 0}^N \Phi_{r_1 r_2} F_{h_1 h_2 h_1 h_2}^{-1} [K(H|\xi|)] (h\xi_1)^{2r_1} (h\xi_2)^{2r_2} + F^{-1} K(H|\xi|) r_{2N+2} \right\} \quad (2.8)$$

Остаточный член в (2.8) оценивается как

$$|F^{-1}(r_{2N+2} K(H|\xi|))| \leq F^{-1}(r_{2N+2} H|\xi|) \leq c/|h|^{2N+2}$$

Далее, в силу свойства обобщенного преобразования Фурье $D^h \varphi(x) = F^{-1}(\xi^h \varphi^*(\xi))$, где $\xi^h = \xi_1^{h_1} \dots \xi_n^{h_n}$, $D^h = D_1^{h_1} \dots D_n^{h_n}$, $D_r^{h_r} = (i\partial/\partial x_r)^{h_r}$, имеем

$$b_{q_1 q_2 p_1 p_2} = \frac{h^4}{H} \left\{ \sum_{r_1 + r_2 = 0}^N \Phi_{r_1 r_2} (-1)^{\eta_1 + r_2} \frac{\partial^{2r_1 + 2r_2}}{\partial k_1^{2r_1} \partial k_2^{2r_2}} F^{-1} [K(H|\xi|)] + O(1/|h|^{2N+2}) \right\} \quad (2.9)$$

⁵ См. указ. публ. с. 116.

Вычислим теперь $F^{-1}[K(H|\xi|)]$:

$$F_{hr_1, hr_2}^{-1}[K(H|\xi|)] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} K(H|\xi|) e^{i(rh, \xi)} d\xi$$

или переходя к полярным координатам

$$\begin{aligned} F^{-1}K &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} K(H|\xi|) e^{i|\mathbf{r}||\xi|h \cos \varphi} |\xi| d|\xi| d\varphi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} K(H|\xi|) \cos(|\mathbf{r}||\xi|h \cos \varphi) |\xi| d|\xi| d\varphi \end{aligned} \quad (2.10)$$

Учитывая, что $\int_0^{2\pi} \cos(z \cos \varphi) d\varphi = 2\pi J_0(z)$, (2.10) записывается в виде

$$F^{-1}K = \frac{1}{(2\pi)} \frac{1}{H^2} \int_0^\infty K(H|\xi|) J_0(|\mathbf{r}||\xi|h) |\xi| d|\xi|$$

Обозначим $H|\xi| = \alpha$, $|\xi| = \alpha/H$, $d|\xi| = d\alpha/H$. Тогда

$$F^{-1}K = \frac{1}{(2\pi)} \frac{1}{H^2} \int_0^\infty K(\alpha) J_0\left(\frac{r}{H} h \alpha\right) \alpha d\alpha \quad (2.11)$$

Вернемся теперь к (2.9), которое с учетом (2.11) принимает вид ($N=1$) в первом приближении

$$b_{r_1 r_2} = \frac{h^4}{H} \left(F^{-1}K + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} \right) F^{-1}K \right)$$

и во втором приближении ($N=2$):

$$\begin{aligned} b_{r_1 r_2} &= \frac{h^4}{H} \left(F^{-1}K + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} \right) F^{-1}K + \right. \\ &\left. + \frac{1}{80} \left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} \right)^2 F^{-1}K + \frac{1}{360} \frac{\partial^4}{\partial r_1^2 \partial r_2^2} F^{-1}K \right) \end{aligned}$$

или учитывая (2.11) $b_{r_1 r_2}$ в первом приближении

$$b_{r_1 r_2} = \frac{1}{2\pi} \frac{h^4}{H^3} \left(L_1^\sim - \frac{1}{6} \frac{h^2}{H^2} L_3^\sim \right) \quad (2.12)$$

и во втором приближении

$$b_{r_1 r_2} = \frac{1}{2\pi} \frac{h^4}{H^3} \left(L_1^\sim - \frac{1}{6} \frac{h^2}{H^2} L_2^\sim + \frac{1}{80} \frac{h^4}{H^4} L_3^\sim + \frac{1}{360} T^\sim \right) \quad (2.13)$$

$$L_n^\sim = \int_0^\infty \alpha^{2n-1} K(\alpha) J_0\left(\alpha \frac{h}{H} r\right) d\alpha \quad (2.14)$$

Обозначим $r/H = \varepsilon$ — малый параметр в выражении (2.14) в приближении толстого слоя $r \ll H$. Разложим $J_0(\varepsilon h \alpha)$, $J_1(\varepsilon h \alpha)$ в подынтегральных выражениях по этому малому параметру с точностью до $O(\varepsilon^2)$, тогда L_n^\sim ,

L_2^\sim, L_3^\sim принимают вид

$$L_1^\sim = J_1 - \frac{1}{4} \frac{h^2}{H^2} J_2 r^2 + \frac{1}{64} \frac{h^4}{H^4} J_3 r^4 \quad (2.15)$$

$$L_2^\sim = J_2 - \frac{1}{4} \frac{h^2}{H^2} J_3 r^2 + \frac{1}{64} \frac{h^4}{H^4} J_4 r^4$$

$$L_3^\sim = J_3 - \frac{1}{4} \frac{h^2}{H^2} J_4 r^2 + \frac{1}{64} \frac{h^4}{H^4} J_5 r^4$$

$$J_n = \int_0^\infty \frac{2\alpha^{2n} (1 + 2\alpha + 2\alpha^2 - e^{-2\alpha})}{4\alpha + e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}} d\alpha \quad (2.16)$$

Ввиду громоздкости вычисления T^\sim вышнем сразу его асимптотическое приближение с точностью до $O(h^4/H^4)$:

$$T^\sim = \frac{15}{16} \frac{h^4}{H^4} J_3 \frac{r_1^2 r_2^2}{r^4} \quad (2.17)$$

При разложении (2.23), (2.25) мы пользовались также тем, что при $\alpha \rightarrow \infty K(\alpha) \rightarrow \alpha^3 e^{-2\alpha} \rightarrow 0$ и основной вклад в интегралы дает окрестность 0. После подстановки (2.15), (2.17) в (2.12), (2.13) получаем коэффициенты $b_{r_1 r_2}$ с точностью до $O(h^7/H^7)$ в первом приближении

$$b_{r_1 r_2} = \frac{1}{2\pi} \frac{h^4}{H^4} \left(J_1 - \frac{1}{4} \frac{h^2}{H^2} J_2 r^2 - \frac{1}{6} \frac{h^2}{H^2} J_2 + \frac{1}{64} \frac{h^4}{H^4} J_3 r^4 + \frac{1}{24} \frac{h^4}{H^4} J_3 r^2 \right) \quad (2.18)$$

и во втором приближении

$$b_{r_1 r_2} = \frac{1}{2\pi} \frac{h^4}{H^4} \left(J_1 - \frac{1}{4} \frac{h^2}{H^2} J_2 r^2 - \frac{1}{6} \frac{h^2}{H^2} J_2 + \frac{1}{64} \frac{h^4}{H^4} J_3 r^4 + \frac{1}{24} \frac{h^4}{H^4} J_3 r^2 \right) \quad (2.19)$$

Таким образом, в приближении толстого слоя для коэффициентов $b_{r_1 r_2}$ получены выражения (2.18), (2.19), включающие только арифметические действия, J_1, J_2, J_3 в (2.16) являются постоянными числами и рассчитываются с помощью вычисленных в [5] интегралов вида

$$I_h = \frac{2^h}{k!} \int_0^\infty \frac{m^h dm}{\text{sh } 2m + 2m}, \quad \Pi_h = \frac{2^h}{k!} \int_0^\infty \frac{m^h e^{-2m} dm}{\text{sh } 2m + 2m}$$

представленных в виде табличных данных. Оказывается, что они равны $J_1 = 4,232$; $J_2 = 29,027$; $J_3 = 396,923$.

3. Вывод асимптотики для элементов матрицы в задаче о диффузии газа в трещину в слое. После записи задачи диффузии газа в трещину в слое в вариационной постановке и дискретизации (пробные функции $\Psi_{p_1 p_2}$ такие же, как и в случае безграничного пространства) она принимает вид

$$\min \left\{ I(h) = \sum_{p_1 p_2} \sum_{q_1 q_2} (a_{p_1 p_2 q_1 q_2}^f - b_{p_1 p_2 q_1 q_2}^f) c_{p_1 p_2} c_{q_1 q_2} + 2 \sum_{p_1 p_2} c_{p_1 p_2} p_{p_1 p_2} \right\}$$

где $c_{p_1 p_2} = q(h p_1, h p_2)$ совпадают с плотностью диффузионного потока в узлах сетки, $a_{p_1 p_2 q_1 q_2}^f$ — элементы матрицы жесткости для безграничного пространства, $b_{p_1 p_2 q_1 q_2}^f$ — добавки к ней из-за наличия слоя, аналогично как и в предыдущем параграфе их можно записать (см. (2.2)) $b_{q,p}^f = (\Lambda_H^f \Psi_{p_1 p_2}, \Psi_{q_1 q_2})$.

Аналогично формуле (2.6) выражение для $b_{q_1, p}^j$ приводится к виду

$$b_{q_1, q_2, p_1, p_2}^j = h^4 H F_{r_1, r_2}^{-1} [K^j(H|\xi)|] \varphi_0^2(h\xi_1, h\xi_2), \quad r_1 = p_1 - q_1, \quad r_2 = p_2 - q_2$$

или после разложения ($N=2$):

$$b_{q_1, q_2, p_1, p_2}^j = h^4 H \left(F^{-1} K^j + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} \right) (F^{-1} K^j) + \right. \\ \left. + \frac{1}{80} \left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} \right)^2 (F^{-1} K^j) + \frac{1}{360} \frac{\partial^4}{\partial r_1^2 \partial r_2^2} (F^{-1} K^j) \right) \quad (3.1)$$

После вычисления обратного преобразования K^j получаем

$$F_{r_1, r_2}^{-1} K^j = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{H^2} \int_0^\infty K^j(\alpha) J_0(\varepsilon h \alpha) \alpha d\alpha, \quad \varepsilon = r/H, \quad r = (r_1^2 + r_2^2)^{1/2}$$

и тогда (3.1) аналогично (2.13) принимает вид

$$b_{r_1, r_2}^j = \frac{1}{2\pi} \frac{h^4}{H} \left(L_1 - \frac{1}{6} \frac{h^2}{H^2} L_2 + \frac{1}{80} \frac{h^4}{H^4} L_3 + \frac{1}{360} T \right) \\ L_n = \int_0^\infty \rho^{2n-1} K^j(\rho) J_0\left(\rho \frac{h}{H} r\right) d\rho, \quad K^j(\rho) = 2e^{-2\rho} / (\rho(1+e^{-2\rho})) \quad (3.2)$$

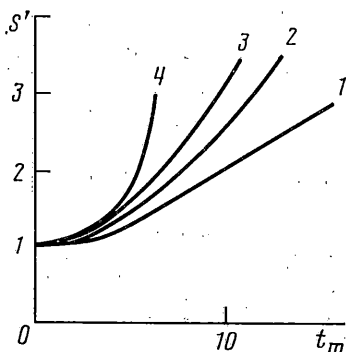
Для T справедливо асимптотическое выражение (2.17). В приближении толстого слоя ($r/H \ll 1$) разлагая $J_0(\varepsilon)$ по формуле $J_0(\varepsilon) = 1 - \varepsilon^2/4 + \varepsilon^4/64$, а также пользуясь тем, что при $\rho \rightarrow \infty$ $K^j(\rho) \rightarrow e^{-2\rho}/\rho \rightarrow 0$ и основной вклад в интегралы (3.2) дает окрестность 0, получаем для b_{r_1, r_2}^j выражения с точностью $O(h^5/H^5)$:

$$b_{r_1, r_2}^j = \frac{h^3}{2\pi} \frac{h}{H} \left(I_1 - \frac{1}{4} \frac{h^2}{H^2} I_2 r^2 - \frac{1}{6} \frac{h^2}{H^2} I_2 + \frac{1}{64} \frac{h^4}{H^4} I_3 r^4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{24} \frac{h^4}{H^4} I_3 r^2 + \frac{1}{80} \frac{h^4}{H^4} I_3 + \frac{1}{24 \cdot 16} \frac{h^4}{H^4} I_3 \frac{r_1^2 r_2^2}{r^4} \right) \\ I_1 = \int_0^\infty \frac{2e^{-2\rho}}{1+e^{-2\rho}} d\rho = \ln 2, \quad I_2 = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-2\rho} \rho^2}{1+e^{-2\rho}} d\rho = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \\ I_3 = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-2\rho} \rho^4}{1+e^{-2\rho}} d\rho = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k^5}$$

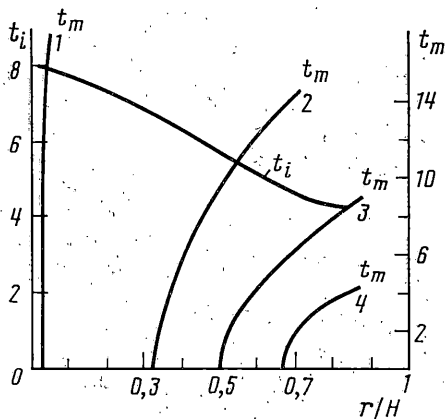
С точностью до 10^{-6} I_1, I_2, I_3 вычислены и равны $I_1 = 0,693147$; $I_2 = 0,450773$; $I_3 = 1,458183$.

4. Кинетический рост трещины в слое. На основе разработанных методов численного решения статических задач о трещине в слое и диффузии газа в трещину в слое развит метод решения задачи о кинетическом развитии трещины в слое под действием диффузии в нее газа. При этом общая схема решения, развитая для безграничного пространства⁶, полностью сохраняется. Видоизменяются только отдельные ее части: расчет смещений поверхностей трещины, КИН проводится с матрицей жесткости для задачи теории упругости в слое, и полный расход газа Q вычисляется из решения диффузионной задачи в слое.

⁶ См. указ. публ. с. 114.



Фиг. 1



Фиг. 2

Проведены модельные расчеты кинетики круговых и эллиптических в плане трещин при возрастающей кинетической зависимости $v(K)$, выходящей на const, в слое различной толщины. Целью их являлось сопоставление параметров долговечности тела, рассчитанных с учетом его границ (задача в слое) и без учета (задача в безграничной среде); сравнение параметров долговечности и кинетики, вычисленных без учета кинетической зависимости $K(v)$ с одним пороговым значением $K_{сcc}$ [3] и с полной кинетической кривой (данная работа); выяснение влияния вытянутости дефекта и толщины конструкции на долговечность.

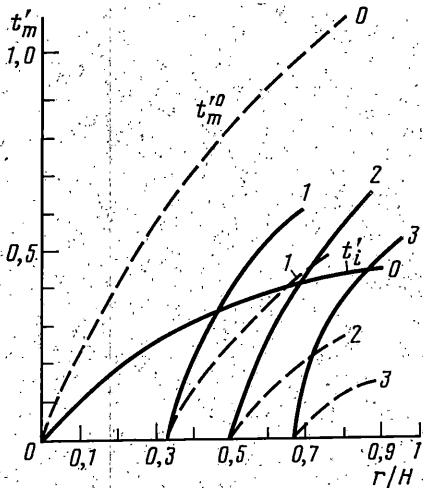
На фиг. 1 приведены графики зависимости увеличения относительной площади $S' = S/S_0$ круговой трещины радиуса $a_0 = 1$ см при росте ее в слое разной толщины $H = \infty; 3, 2, 1,5$ см ($\gamma = a_0/H = 0; 0,33; 0,5; 0,66$ и кривые 1, 2, 3, 4, соответственно) от времени роста t_m' в днях. Из них видно, что, если в случае безграничного пространства рост трещины выходит на стационарный режим (кривая 1), то в случае слоя трещины растут все время с постепенно увеличивающейся скоростью, так как с увеличением их радиуса увеличивается отношение r/H и КИН на контуре (а значит и скорость распространения) также возрастает.

На фиг. 2 представлена зависимость времени инкубации t_i от $\gamma = a_0/H$. Время инкубации уменьшается с увеличением γ , то есть, чем тоньше слой, тем меньшее количество водорода требуется для страгивания трещины. На этой же фиг. даны зависимости времени роста t_m круговой трещины радиуса $a_0 = 1$ см от параметра r/H , где r — текущий радиус трещины.

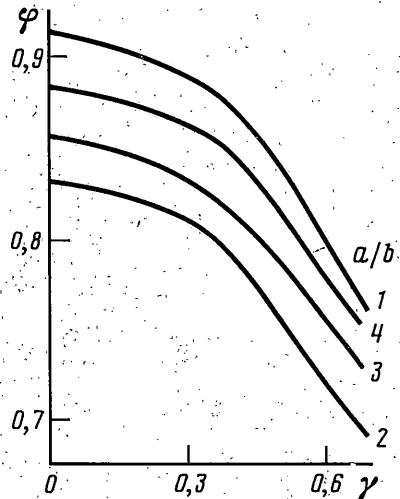
Трещины начинают расти в слоях разной толщины (кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют $H = 30, 3, 2, 1,5$ см и $\gamma = 0,033; 0,33; 0,66$). Приведенные зависимости показывают, что трещины в слое меньшей толщины растут с большей скоростью (кривая 4).

Так как аналогичная задача о росте круговой трещины в слое, но без учета кинетики и формы трещины, была решена в [3] (осесимметричная задача), интересно проанализировать, какую поправку дает учет этих факторов к расчету долговечности. Было проведено такое сопоставление в случае безграничного пространства⁷. Все полученные для безграничного пространства зависимости отклонения долговечности, рассчитанной с кинетической зависимостью $K(v)$ и с одним пороговым значением $K_{сcc}$, от различных параметров таких, как начальная концентрация газа c_0 , начальный размер трещины a_0 , переносятся и на случай распространения тре-

⁷ Балугва А. В. Кинетика газонаполненных трещин: качественные оценки и приложения: Препринт № 380. М.: ИПМ РАН, 1989, 34 с.



Фиг. 3

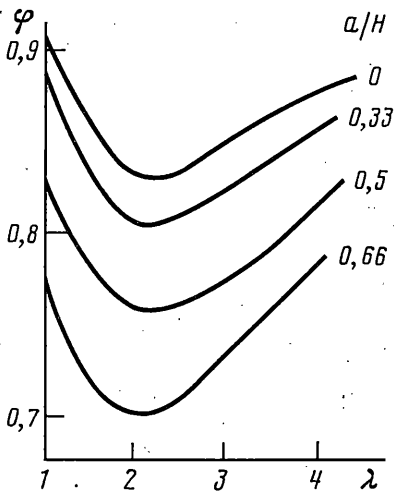


Фиг. 4

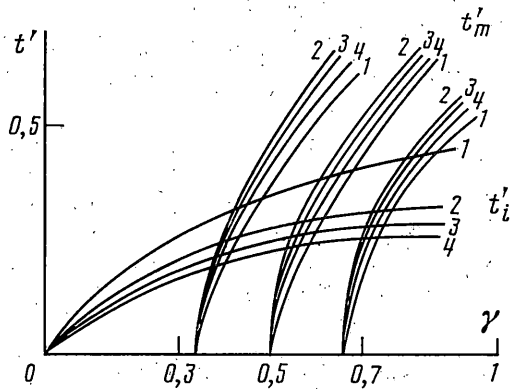
щины в слое, но эти зависимости имеют разный наклон для разных толщин слоя.

На фиг. 3 приведены графики безразмерных времен инкубации $t'_i = 3\theta^2 D t_i / 2K_{sc}^2 H$ и времени $t'_m(0, r) = 3\theta^2 D t_m / 2K_{sc}^2 H$ круговых трещин от соотношения r/H , полученные в [3] с одним пороговым значением K_{sc} (линии 0, выходящие из начала координат). Кривая времени инкубация для круговых трещин, рассчитанная в данной работе, полностью совпадает с кривой, полученной в [3] (так как процессы кинетики до начала роста трещины не сказываются). На этом же рис. даны графики безразмерного времени роста t'_m , рассчитанные с учетом зависимости $v(K)$, трещины радиуса $a_0 = 1$ см, растущей в слоях $H = 3, 2, 1,5$ см ($\gamma = 0,33; 0,5; 0,66$ и кривые 1, 2, 3 соответственно). Они показывают, что время роста существенно зависит от соотношения начального радиуса трещины a_0 и толщины слоя H и единую кривую $t'_m(0, a)$, как в случае [3], построить не удастся. Это связано с тем, что если без учета кинетики рост трещин начинается сразу с ненулевой скоростью и скорость роста никак не связана с начальным радиусом трещины [3]; то при учете кинетической зависимости $v(K)$ скорость плавно увеличивается с 0 до некоторого значения и время установления этой скорости зависит от начального радиуса трещины. Пунктирные кривые 1, 2, 3 на фиг. 3 (фиг. 1) соответствуют кривым зависимости времени роста t'_m от $r/H (r/a_0)$, рассчитанных без кинетики [3], для данного начального значения $\gamma = a_0/H$. Из этих графиков видно, что отклонение долговечности $\Delta = (t_m^h - t_m) / t_m$, рассчитанной с учетом кинетики и без учета, растет с увеличением отношения a_0/H или уменьшением толщины слоя H .

Для выяснения влияния формы дефекта на долговечность проведены расчеты кинетического роста эллиптических равновеликих по площади трещин с отношением полуосей $\lambda = a/b = 1,4; 2; 3; 4$. Сначала отыскивались давления p_{sc} , необходимые для страгивания трещины. В рамках линейной механики разрушения p_{sc} можно представить в виде $p_{sc} = \varphi K_{sc} a_0^{-1/2}$, где K_{sc} — пороговое значение КИН, соответствующее данному уровню наводораживания, a_0 — характерный размер трещины ($a_0 = (ab)^{1/2}$ для эллиптических трещин); φ — функция, зависящая от геометрии тела и трещины. Определение условий страгивания трещин сводятся таким образом к отысканию φ после численного решения задачи. После обработки полученных результатов их можно представить в виде номограммы (фиг. 4). На ука-



Фиг. 5



Фиг. 6

данной номограмме представлены зависимости значений, соответствующих точкам контура, в которых он пересекается малой осью эллипса. В этих точках значения φ для данного контура максимальны и коэффициент интенсивности напряжений достигает максимального значения впервые именно в этих точках. Графики приведены при значениях $a/b=1, 2, 3, 4$. Из них видно, что с уменьшением толщины слоя или увеличением параметра $\gamma=(ab)^{1/2}/H$ значения φ уменьшаются и условия страгивания достигаются быстрее. Зависимость φ от степени вытянутости эллипса, как и в случае безграничного пространства, немонотонна: при одной и той же толщине наименьшее φ при $\lambda=a/b \approx 2$ (см. номограмму на фиг. 5) и давление страгивания p_{sc} у эллиптических трещин с $\lambda \approx 2$ наименьшее. Период инкубации t_i монотонен по λ для каждой толщины слоя и чем более вытянут эллипс и чем тоньше слой, тем меньше t_i (фиг. 6). Время роста t_m (до удвоенной площади) немонотонно по λ : и хотя оно снижается с уменьшением толщины слоя H , для каждого слоя оно максимально для эллиптических трещин с $\lambda \approx 2$ (кривые 1, 2, 3, 4 на фиг. 6 соответствуют параметру $\lambda=a/b$, равному 1, 2, 3, 4).

При превышении радиусом (или характерным размером) трещины некоторого значения a , наступает момент, когда уже нельзя пользоваться квазистационарным приближением для определения диффузионного потока. Это значение a , можно найти из условия, что скорость роста трещины не должна превышать скорости установления равновесной концентрации газа $v < D/a$.

В приведенных выше расчетах скорость роста трещины возрастает в пределах от 0 до $2 \cdot 10^{-6}$ см/с при увеличении радиуса a от 1 до 2 см при коэффициенте диффузии $D=10^{-5}$ см/с, что соответствует принятому допущению о квазистационарности постановки задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г. И., Ептов В. М., Салганик Р. Л. О кинетике распространения трещин. Общие представления Инж. ж. МТТ. 1966. № 5. С. 82–92.
2. Романив О. Н., Никифорчин Г. Н. Механика коррозионного разрушения конструкционных сплавов. М.: Металлургия, 1986. 293 с.
3. Гольдштейн Р. В., Зазовский А. Ф., Павловский Б. Р. Развитие дискообразного расслоения в стальном листе под действием растяжения и наводороживания // Физ.-химич. механика материалов. 1985. Т. 21. № 5. С. 100–105.
4. Сметанин В. И., Соболев Б. В. Равновесие упругого слоя, ослабленного плоскими трещинами // ПММ. 1984. Т. 48. № 6. С. 1030–1038.
5. Ling G. Stress in a perforated strip // J. of Appl. Mech. 1957. V. 24. N 3. p. 365–376.

Москва

Поступила в редакцию
21.V.1990