МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1992

УДК 539.375

© 1992 г. С. А. НАЗАРОВ, О. Р. ПОЛЯКОВА

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КРИТЕРИЕВ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ТРЕЩИНЫ ОТРЫВА В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Исследуется квазистатический рост плоской трещины нормального отрыва в упругом однородном изотропном пространстве. Выводятся вариационные неравенства, позволяющие определить форму малого приращения поверхности трещины на основе энергетического, силового и деформационного критериев разрушения. Сопоставление полученных неравенств показывает асимптотическую эквивалентность упомянутых критериев для трехмерных задач механики разрушения. Постановка задачи о распространении трещины в виде вариационного неравенства дает, в частности, математически точную формулировку критерия Гриффитса.

1. Обсуждение. При исследовании квазистатического распространения трещины нормального отрыва в двумерном теле (плоская деформация или обобщенное плоское напряженное состояние) наиболее часто используются два критерия — энергетический критерий Гриффитса [1] и силовой критерий Ирвина [2]. С их помощью выводятся условия предельной равновесности трещины и решается вопрос о локальной устойчивости ее квазистатического развития. Совпадение результатов, получающихся на основе упомянутых критериев, позволяет говорить об эквивалентности энергетического и силового подхода к анализу разрушения. В данной статье обсуждается аналогичная эквивалентность в случае плоской трещины нормального отрыва в трехмерном упругом теле.

Покажем сначала, как применение силового критерия в каждой точке s ребра Γ трещины M дает вариационное неравенство для функции $s\mapsto h_\varepsilon(s)$, описывающей форму ребра Γ_ε подросшей трещины. Пусть $K_1(s)$ — коэффициент интенсивности напряжений (КИН) на ребре Γ, а $K_1(h_\varepsilon;\ s)$ — КИН на ребре Γ_ε, которое получается сдвигом каждой точки $s\in\Gamma$ вдоль внешней нормали на расстояние $h_\varepsilon(s)$. Здесь $0<\varepsilon$ — малый (времяподобный) параметр нагружения, оба контура Γ и Γ_ε предполагаются гладкими, т. е. h_ε — также гладкая функция. Согласно силовому критерию при всех $s\in\Gamma$ справедливы условия

$$\begin{aligned} &h_\varepsilon(s)>0\Rightarrow K_1(h_\varepsilon;\ s)=K_c \\ &h_\varepsilon(s)=0\Rightarrow K_1(h_\varepsilon;\ s)\leqslant K_c \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь K_c — критическое значение КИН. Поскольку берега трещины зарастать не могут, то

$$h_\varepsilon(s)\geqslant 0 \tag{1.2}$$

По обычной схеме [3] из (1.1), (1.2) выводится неравенство

$$\langle K_1(h_\varepsilon;\ s)-K_c,\ K_1h_\varepsilon-K_1\chi\rangle\geqslant 0\ \ \forall\chi\in C^\infty(\Gamma),\ \chi\geqslant 0 \tag{1.3}$$

служащее для определения h_ε. В (1.3) $\langle u,\ v\rangle=\int_\Gamma uvds$ — скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$. (Отметим, что и в плоских задачах об ансамблях трещин возникают дискретные аналоги (1.3); см. [4–6].) В [7] получено и исследовано вариационное неравенство вида (1.3), причем величины $h_\varepsilon(s)$ и $K_1(h_\varepsilon;\ s)$ заменены их асимптотиками $\varepsilon h(s)$ и

$$K_1(\varepsilon h;\ s)=K_1(s)+\varepsilon K_1^{(1)}(h;\ s)+O(\varepsilon^2) \tag{1.4}$$

В (1.4) $h\mapsto K_1^{(1)}(h;\ s)$ — некоторый интегральный оператор (см. далее п. 4). Отсутствие решения неравенства (1.3) интерпретируется как лавинообразный рост трещины, а неединственность — как неустойчивость процесса (бифуркация).

Обратимся к энергетическому критерию. Трехмерный вариант известной формулы Гриффитса для трещины отрыва имеет вид

$$\Delta U_h+\Delta\Pi_h=\varepsilon J_0(K_1h)+O(\varepsilon^2)\leqslant 0 \tag{1.5}$$

$$J_0(K_1h)=-{}^1/{}_2\alpha\int\limits_\Gamma K_1(s)^2h(s)\,ds+2\gamma\int\limits_\Gamma h(s)\,ds,\quad \alpha=\mu^{-1}(1-\nu)$$

Здесь ΔU_h — приращение потенциальной энергии деформации тела при увеличении трещины, $\Delta\Pi_h$ и γ — приращение поверхностной энергии и ее плотность. Если фиксировать форму вариации ребра Γ (функцию h), привлекая какие-либо дополнительные соображения, то неравенство (1.5) дает условие равновесности трещины. Г. Си и Г. Либовиц в книге [8, с. 175] пишут: «...так как априори не очевидно, какую форму будет принимать ... трещина, точная математическая формулировка критерия разрушения Гриффитса, по-видимому, невозможна». Сказанное относится к формуле (1.5), на основе которой корректная постановка задачи об определении функции $h(s)$ действительно не получается. Оказывается, что ситуацию удается исправить, рассматривая двучленную асимптотику

$$\Delta U_h+\Delta\Pi_h=\varepsilon J_0(K_1h)+\varepsilon^2J_1(K_1h)+O(\varepsilon^3) \tag{1.6}$$

В (1.6) J_1 — некоторый квадратичный функционал, явный вид которого указан в разд. 4. Согласно критерию Гриффитса, развитие трещины должно происходить так, чтобы приращение общей энергии достигало минимального (нулевого) значения. Известно [3], что задача о минимуме сводится к решению вариационного неравенства. Пренебрегая в (1.6) слагаемыми порядка $O(\varepsilon^3)$ и вычисляя вариации функционалов, получаем

$$\langle\delta J_0(K_1h),\ K_1h-K_1\chi\rangle+\varepsilon\langle\delta J_1(K_1h),\ K_1h-K_1\chi\rangle\leqslant 0$$
$$\forall\chi\in C^\infty(\Gamma),\ \chi\geqslant 0 \tag{1.7}$$

Приведенные далее выкладки показывают, что левые части (1.3) и (1.7) по существу различаются лишь слагаемым $\langle 2\gamma kh,\ \chi-h\rangle$, содержащим кривизну $k(s)$ контура Γ в точке s. Таким образом, для слабоискривленных контуров энергетический и силовой подходы дают почти одинаковые результаты (точное утверждение см. в п. 5); это позволяет говорить об эквивалентности названных подходов. Подчеркнем также, что в начальной стадии квазистатического роста вблизи точки максимума КИН трещина «не замечает» искривленности своего ребра (ср. с [9]). В общем случае энергетический критерий предписывает несколько меньшее приращение поверхности трещины, чем силовой.

Наряду с энергетическим и силовым критериями рассматривается деформационный критерий Леонова — Панасюка — Дагдейла [10, 11]. Показано, что для макротрещин (ширина зоны действия сил сцепления много меньше диаметра трещины) деформационный критерий и в трехмерном случае асимптотически эквивалентен силовому.

2. Сингулярности решений вблизи ребра трещины. Пусть M — плоская трещина в однородном изотропном упругом пространстве, $M=\{x=(y,\ z)\in$

$\in\mathbf{R}^3 : y=(y_1,\ y_2)\in\overline{G},\ z=0\}$. Будем считать, что ребро Γ трещины M (или граница ∂G плоской области G) является гладким. К берегам $M^{\pm}$ приложена нормальная симметричная расклинивающая нагрузка интенсивности $P(y)$. Известно (см., например, [12]), что такая задача теории упругости при помощи представления Папковича — Нейбера сводится к отысканию исчезающей на бесконечности, гармонической в $\mathbf{R}_+^3$ функции v_0, подчиненной краевым условиям

$$\partial_z v_0(y,\ 0)=p(y)\equiv-\alpha P(y),\ y\in G;\ v_0(y,\ 0)=0,\ y\in\mathbf{R}^2\setminus\overline{G} \tag{2.1}$$

Используются обозначения $\partial_z=\partial/\partial z$, $\alpha=\mu^{-1}(1-\nu)$, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона. Названная функция допускает асимптотическое представление

$$\begin{aligned}v_0(x)=r^{1/2}\{K_1(s)\,(\Phi_1^{(0)\prime}(\varphi)+r\Phi_1^{(1)}(\varphi,\ s)+r^2\Phi_1^{(2)}(\varphi,\ s))-\\-{}^1/_6r^2\partial_s^2K_1(s)\,\Phi_1^{(0)}(\varphi)\}+\\+r^{3/2}\{K_3(s)\,(\Phi_3^{(0)}(\varphi)+r\Phi_3^{(1)}(\varphi,\ s))\}+r^{5/2}K_5(s)\,\Phi_5^{(0)}(\varphi)+\\+rp(s)\sin\varphi-{}^1/_2r^2(\partial_n p)\,(s)\sin 2\varphi+O(r^3)\quad(r\to0)\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь s и n — естественные координаты в окрестности контура ∂G (длина дуги и расстояние вдоль нормали, причем $n<0$ внутри G); $(r,\ \varphi)$ — полярные координаты в плоскостях, перпендикулярных к Γ, $\varphi\in(-\pi,\ \pi)$, $r^2=$ $=n^2+z^2$; $K_1(s)$ — КИН, $K_3(s)$, $K_5(s)$ — коэффициенты при младших сингулярных составляющих асимптотики (2.2):

$$\begin{aligned}\Phi_q^{(0)}(\varphi)=\alpha\,(2\pi)^{-1/2}2q^{-1}\sin{}^1/_2q\varphi\\ \Phi_q^{(1)}(\varphi,\ s)=\alpha\,(2\pi)^{-1/2}(2q)^{-1}k(s)\{-\sin({}^1/_2q-1)\,\varphi+\\+(q+2)^{-1}(q-2)\sin({}^1/_2q+1)\,\varphi\}\\ \Phi_q^{(2)}(\varphi,\ s)=\alpha\,(2\pi)^{-1/2}(8q)^{-1}k(s)^2\{{}^3/_2\sin({}^1/_2q-2)\,\varphi+(q+2)^{-1}(q-\\-4)\sin{}^1/_2q\varphi-[2\,(q+4)\,(q+2)]^{-1}(5q+12)\,(q-2)\sin({}^1/_2q+2)\,\varphi\}\end{aligned} \tag{2.3}$$

Через $k(s)$ обозначена кривизна Γ в точке s, а через $p(s)$ и $(\partial_n p)(s)$ — следы на ребре Γ функций p и $\partial_n p$.

Для вычисления значения КИН в точке $Q_s\in\Gamma$ с координатой s можно использовать интегральную формулу

$$K_1(s)=2\int_G\zeta_s(y,0)P(y)\,dy \tag{2.4}$$

(см. [13], а также [7, 14]), в которой ζ_s — (сингулярная) весовая функция. Точнее, ζ_s — исчезающая на бесконечности, гармоническая в $\mathbf{R}_+^3$ функция с особенностью в точке Q_s:

$$\zeta_s(x)=2\,(2\pi\rho_s)^{-3/2}(\sin\theta_s)^{1/2}\sin{}^1/_2\varphi+O(\rho_s^{-1/2})\quad(\rho_s\to0) \tag{2.5}$$

В (2.5) ρ_σ, θ_σ, φ — «сферические» координаты, отвечающие «декартовым» координатам $(n,\ z,\ s-\sigma)$. Отметим, что вне любой окрестности точки Q_s справедливо аналогичное (2.2) разложение

$$\zeta_\sigma(x)=r^{1/2}Z(s,\ \sigma)\,\Phi_1^{(0)\prime}(\varphi)+O(r^{3/2})\quad(r\to0) \tag{2.6}$$

где Z — симметричная неотрицательная функция, гладкая при $s\neq\sigma$:

$$Z(s,\ \sigma)=(2\pi)^{-1/2}|s-\sigma|^{-2}+O(\ln|s-\sigma|)\quad(s\to\sigma) \tag{2.7}$$

Пусть H — гладкая функция на Γ. Еще две (регулярных) весовых функции $V_1(H;\ \cdot)$ и $V_2(H;\ \cdot)$ с асимптотиками

$$V_1(H;\ x)=r^{-1/2}\{H(s)\,(\Psi_1^{(0)}(\varphi)+r\Psi_1^{(1)}(\varphi,\ s)+r^2\Psi_1^{(2)}(\varphi,\ s)-$$
$$-{}^1/_2r^2\partial_s^2H(s)\,\Psi_1^{(0)}(\varphi)\}+r^{1/2}C_{11}(H;\ s)\{\Phi_1^{(0)}(\varphi)+r\Phi_1^{(1)}(\varphi,\ s)\}+ \quad (2.8)$$
$$+r^{3/2}C_{13}(H;\ s)\,\Phi_3^{(0)}(\varphi)+O(r^{5/2})$$
$$V_2(H;\ x)=r^{-1/2}\{H(s)\,(\Psi_3^{(0)}(\varphi)+r\Psi_3^{(1)}(\varphi,\ s)+r^2\Psi_3^{(2)}(\varphi,\ s)+$$
$$+{}^1/_2r^2\partial_s^2H(s)\,\Psi_3^{(0)}(\varphi)\}+r^{1/2}C_{31}(H;\ s)\,\Phi_1^{(0)}(\varphi)+O(r^{3/2}) \quad (2.9)$$

участвуют в следующих интегральных формулах:

$$\int\limits_{\Gamma} H(s)K_j(s)\,ds=2\int\limits_{\sigma} P(y)\,V_j(H;\,y,0)\,dy, \quad j=1,3 \quad (2.10)$$

При этом в случае $j=3$ дополнительно предполагается, что $P(y)=0$ для $y\in\Gamma$. Угловые части из (2.8), (2.9) имеют вид

$$\Psi_q^{(0)}(\varphi)=(2\pi)^{-1/2}\sin{}^1/_2q\varphi$$
$$\Psi_q^{(1)}(\varphi,\ s)={}^1/_4k(s)\,(2\pi)^{-1/2}\{-\sin({}^1/_2q+1)\varphi+(q-2)^{-1}(q+2)\sin({}^1/_2q-1)\varphi\}$$
$$\Psi_q^{(2)}(\varphi,\ s)=({}^1/_4k(s))^2(2\pi)^{-1/2}(q+2)\{(2q)^{-1}\sin({}^1/_2q+2)\varphi+$$
$$+(2-q)^{-1}\sin{}^1/_2q\varphi+[2q(q-2)(q-4)]^{-1}(q^2-2q+$$
$$+8)\sin({}^1/_2q-2)\varphi\} \quad (2.11)$$

Кроме того, в (2.8), (2.9) фигурируют три интегральных (псевдодифференциальных) оператора C_{pq}; далее потребуется представление

$$C_{11}(H;\ s)=\alpha^{-1}\{b(s)\,H(s)+B(H;\ s)\} \quad (2.12)$$

Здесь $b(s)=Y_0(s,\ s+0)-Y_0(s,\ s-0)$; $Y(s,\ \sigma)=[2\pi(s-\sigma)]^{-1}+Y_0(s,\ \sigma)$ — первообразная функции $\sigma\mapsto Z(s,\ \sigma)$, B — симметрический неположительный псевдодифференциальный оператор с главным символом ${}^1/_2|\xi|$

$$B(H;s)=\int\limits_{\Gamma}(H(\sigma)-H(s))\,Z(s,\sigma)\,d\sigma \quad (2.13)$$

Все перечисленные в разделе факты либо содержатся в статьях [7, 13, 14], либо получаются продолжением намеченных там процедур. Так, например, явный вид оператора C_{13} находится после уточнения разложений (2.5), (2.6). Для дальнейшего важно лишь то, что C_{13} — псевдодифференциальный оператор первого порядка. Наконец, из (2.10) нетрудно вывести, что операторы C_{13} и C_{31} взаимно сопряжены, т. е. $C_{13}=C_{31}^*$.

3. Асимптотика решения для возмущенной трещины. Рассмотрим трещину M_ε с ребром $\Gamma_\varepsilon=\{x:n=\varepsilon h(s),\ z=0\}$; здесь ε — малый положительный параметр, h — гладкая функция на Γ. Трещина M_ε получается малым возмущением трещины M. Пусть $v(\varepsilon,\ x)$ — решение задачи (2.1) в случае нагрузки $P(\varepsilon,\ y)$ на берегах трещины M. Через $K_j(\varepsilon,\ s)$ обозначим коэффициенты аналогичного (2.2), разложения функции $v(\varepsilon,\ \cdot)$ вблизи ребра Γ_ε. Асимптотики названных величин найдем при помощи метода сращиваемых разложений [15]. Именно, согласуем внешнее (вдали от Γ_ε) разложение решения

$$v(\varepsilon,\ x)=v_0(x)+\varepsilon v_1(x)+\varepsilon^2v_2(x)+\dots \quad (3.1)$$

с внутренним (в малой окрестности ребра) разложением

$$v(\varepsilon,\ x)=\varepsilon^{1/2}w_{1/2}(\eta,\ s)+\varepsilon w_1(\eta,\ s)+\varepsilon^{3/2}w_{3/2}(\eta,\ s)+$$
$$+\varepsilon^2w_2(\eta,\ s)+\varepsilon^{5/2}w_{5/2}(\eta,\ s)+\dots \quad (3.2)$$

Здесь $\eta=(\eta_1,\ \eta_2)$ — «быстрые» переменные, $\eta_1=\varepsilon^{-1}n$, $\eta_2=\varepsilon^{-1}z$; w_q — решения некоторых задач на плоскости с вырезанным лучом $\Lambda(s)=\{\eta\in\mathbf{R}^2$;

$: \eta_1 \leqslant h(s),\ \eta_2=0\}$. Далее через ρ_0, φ_0 и ρ_1, φ_1 обозначаются полярные координаты с центрами в точках $\eta=0$ и $\eta=(h(s),\ 0)$ соответственно.

Несколько членов рядов (3.1), (3.2) были построены в [7]:

$$
\begin{gathered}
w_{1/2}(\eta,\ s)=\rho_1{}^{1/2}K_1(s)\Phi_1{}^{(0)}(\varphi_1),\ w_1(\eta,\ s)=\rho_1 p(s)\sin\varphi_1\\
v_1(x)=v_1'(x)+V_1(A_1;\ x),\ A_1(s)=\alpha K_1(s)h(s)\\
w_{3/2}(\eta,\ s)=\rho_1{}^{3/2}\{K_1(s)\Phi_1{}^{(1)}(\varphi_1,\ s)+K_3(s)\Phi_3{}^{(0)}(\varphi_1)\}+\\
+\rho_1{}^{1/2}\{K_1'(s)+C_{11}(A_1;\ s)+{}^1/_2h(s)K_3(s)\}\Phi_1{}^{(0)}(\varphi_1)
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

В (3.3) v' — решение задачи (2.1) с нагрузкой $P'(y)=\partial_\varepsilon P(0,\ y)$ на берегах $M_0{}^\pm$, а $K_1'(s)$ — соответствующий коэффициент разложения (2.2). Кроме того, очевидно равенство

$$
w_2(\eta,\ s)=-{}^1/_2(\partial_n p)(s)\rho_1{}^2\sin 2\varphi_1+\rho_1 p'(s)\sin\varphi_1 \tag{3.4}
$$

Определим слагаемые $\varepsilon^2 v_2$ и $\varepsilon^{5/2}w_{5/2}$ из (3.1), (3.2). Гармоническая в $\mathbf{R}_+{}^3$ функция v_2 удовлетворяет краевому условию (2.1), в котором $P(y)$ заменено на $P''(y)={}^1/_2\partial_\varepsilon{}^2P(0,\ y)$, и имеет особенности на ребре Г. Эти особенности находятся при сращивании разложений (3.1) и (3.2). Перепишем функции $w_{1/2}$ и $w_{3/2}$ в координатах $(\rho_0,\ \varphi_0)$:

$$
\begin{gathered}
w_{1/2}(\eta,\ s)=K_1(s)\{\rho_0{}^{1/2}\Phi_1{}^{(0)}(\varphi_0)+\alpha h(s)\rho_0{}^{-1/2}\Psi_1{}^{(0)}(\varphi_0)+\\
+{}^1/_4\alpha h(s)^2\rho_0{}^{-3/2}\Psi_3{}^{(0)}(\varphi_0)\}+o(\rho_0{}^{-3/2})\\
w_{3/2}(\eta,\ s)=\rho_0{}^{3/2}\{K_3(s)\Phi_3{}^{(0)}(\varphi_0)+K_1(s)\Phi_1{}^{(1)}(\varphi_0,\ s)\}+\\
+\rho_0{}^{1/2}\{A_1(s)\Psi_1{}^{(1)}(\varphi_0,\ s)+(K_1'(s)+C_{11}(A_1;\ s))\Phi_1{}^{(0)}(\varphi_0)\}+\\
+\rho_0{}^{-1/2}\{\alpha h(s)(K_1'(s)+C_{11}(A_1;\ s)+{}^1/_4h(s)K_3(s))\Psi_1{}^{(0)}(\varphi_0)+\\
+{}^1/_4\alpha h(s)^2K_1(s)\Psi_3{}^{(1)}(\varphi_0,\ s)\}+o(\rho_0{}^{-1/2})
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

Переход в (3.5) от ρ_0 к $r=\varepsilon\rho_0$ сопровождается появлением степеней ε. Собирая множители при ε^2, получаем асимптотику функции v_2 при $r\to 0$, а в силу (2.8), (2.9) и саму функцию

$$
v_2(x)=v_2''(x)+V_1(A_2;\ x)+V_3(A_3;\ x) \tag{3.6}
$$

Здесь $v_2''(x)$ — решение задачи (2.1) с нагрузкой P'', причем

$$
\begin{gathered}
v_2''(x)=K_1''(s)r^{1/2}\Phi_1{}^{(0)}(\varphi)+O(r^{3/2})\quad (r\to 0)\\
A_2(s)=\alpha h(s)\{K_1'(s)+C_{11}(A_1;\ s)+{}^1/_4h(s)K_3(s)\}\\
A_3(s)={}^1/_4h(s)^2\alpha K_1(s)
\end{gathered}
\tag{3.7}
$$

Функция $w_{5/2}$ компенсирует невязки, оставляемые первыми членами $w_{3/2}$ и $w_{1/2}$ внутреннего разложения в уравнении Лапласа. Расщепляя оператор Δ_x, записанный в криволинейных координатах $(n,\ z,\ s)$, имеем

$$
\Delta_x=(\partial_n{}^2+\partial_z{}^2)+k(s)\partial_n+(-nk(s)^2\partial_n+\partial_s{}^2)+\ldots \tag{3.8}
$$

В (3.8) многоточием обозначены дифференциальные операторы, обладающие положительной степенью обобщенной однородности относительно n и z. Отметим, что так же, как и в [7], расщепление (3.8) используется при определении угловых частей (2.3) и (2.11) в младших слагаемых асимптотик (2.2), (2.8), (2.9). Теперь, переходя в (3.8) к координатам $(\eta,\ s)$, заключаем, что функцию $w_{5/2}$ необходимо подчинить такому уравнению Пуассона:

$$
\begin{gathered}
\Delta_\eta w_{5/2}(\eta,\ s)=-k(s)\partial_1 w_{3/2}(\eta,\ s)-\partial_s{}^2 w_{1/2}(\eta,\ s)+\\
+k(s)^2\eta_1\partial_1 w_{1/2}(\eta,\ s),\quad \eta\in\mathbf{R}^2\setminus\Lambda(s)
\end{gathered}
\tag{3.9}
$$

Здесь $\partial_j=\partial/\partial\eta_j$, $j=1,\ 2$; $\Delta_\eta=\partial_1{}^2+\partial_2{}^2$. Кроме уравнения (3.9) получаются однородные условия Неймана на обоих берегах разреза $\Lambda(s)$. Поведение $w_{5/2}$ на бесконечности устанавливается при помощи процедуры сращивания рядов (3.1) и (3.2). Именно, учитывая (2.2), (3.3) и (3.6), выводим соотношение

$$
\begin{gathered}
w_{5/2}(\eta, s)=\rho_0^{5/2}\{K_1(s)\Phi_1^{(2)}(\varphi_0, s)-{}^1/_6\partial_s^2K_1(s)\Phi_1^{(0)}(\varphi_0)+\\
+K_3(s)\Phi_3^{(1)}(\varphi_0, s)+K_5(s)\Phi_5^{(0)}(\varphi_0)\}+\rho_0^{3/2}\{A_1(s)\Psi_1^{(2)}(\varphi_0, s)-\\
-{}^1/_2\partial_s^2A_1(s)\Psi_1^{(0)}(\varphi_0)+C_{11}(A_1;\ s)\Phi_1^{(1)}(\varphi_0, s)+C_{13}(A_1;\ s)\Phi_3^{(0)}(\varphi_0)\}+\\
+\rho_0^{1/2}\{A_3(s)\Psi_3^{(2)}(\varphi_0, s)+{}^1/_2\partial_s^2A_3(s)\Psi_3^{(0)}(\varphi_0)+C_{31}(A_3;\ s)\Phi_1^{(0)}(\varphi_0)+\\
+A_2(s)\Psi_1^{(1)}(\varphi_0, s)+C_{11}(A_2;\ s)\Phi_1^{(0)}(\varphi_0)+O(\rho_0^{-1/2})
\end{gathered}
\tag{3.10}
$$

Решение задачи (3.9) ищем в виде суммы

$$
\begin{gathered}
w_{5/2}(\eta, s)=\rho_1^{5/2}\{K_1(s)\Phi_1^{(2)}(\varphi_1, s)-{}^1/_6\partial_s^2K_1(s)\Phi_1^{(0)}(\varphi_1)+\\
+K_3(s)\Phi_3^{(1)}(\varphi_1, s)+K_5(s)\Phi_5^{(0)}(\varphi_1)\}+\rho_1^{3/2}\{D_3(s)\Phi_3^{(0)}(\varphi_1)+\\
+(K_1'(s)+C_{11}(A_1;\ s)+{}^1/_2h(s)K_3(s))\Phi_1^{(1)}(\varphi_1,\ s)-{}^1/_2\alpha(\partial_s^2h(s)K_1(s)+\\
+h(s)k(s)^2K_1(s)+2\partial_sh(s)\partial_sK_1(s))\Psi_1^{(0)}(\varphi_1)\}+\\
+\rho_1^{1/2}\{-{}^1/_4\alpha\partial_s^2h(s)K_1(s)\Psi_3^{(0)}(\varphi_1)+(K_1''(s)+D_1(s))\Phi_1^{(0)}(\varphi_1)\}
\end{gathered}
\tag{3.11}
$$

Перепишем представление (3.11) в координатах (ρ_0, φ_0) и сравним с асимптотикой (3.10). В результате находим неизвестные величины

$$
\begin{gathered}
D_1(s)=C_{31}(A_3;\ s)+C_{11}(A_2;\ s)+{}^1/_2h(s)C_{13}(A_1;\ s)+{}^3/_8h(s)^2K_5(s)\\
D_3(s)=C_{13}(A_1;\ s)+{}^3/_2h(s)K_5(s)
\end{gathered}
\tag{3.12}
$$

Поскольку вблизи ребра Γ_ε решение $v(\varepsilon, x)$ представлено внутренним разложением (3.2), то формулы (3.3), (3.11), (3.12) доставляют асимптотику КИН

$$
\begin{gathered}
K_1(\varepsilon h)=K_1(s)+\varepsilon\{K_1'(s)+\alpha C_{11}(K_1h;\ s)+{}^1/_2h(s)K_3(s)\}+\\
+\varepsilon^2\{K_1''(s)+{}^1/_4\alpha C_{31}(K_1h^2;\ s)+{}^1/_2\alpha h(s)C_{13}(K_1h;\ s)+{}^3/_8h(s)^2K_5(s)+\\
+\alpha C_{11}({}^1/_4h^2K_3+\alpha hC_{11}(K_1h)+K_1'h;\ s)+{}^1/_8\partial_s^2h(s)K_1(s)\}+O(\varepsilon^3)
\end{gathered}
\tag{3.13}
$$

Дополнительное слагаемое ${}^1/_8K_1(s)\partial_s^2h(s)$ возникает из-за того, что направление вдоль внешней нормали к Γ_ε отличается на угол $\operatorname{arctg}(\varepsilon\partial_sh)$ от нормали к Γ.

Относя слагаемое с ε^2 в остаток, записываем разложение (3.13) в виде (1.4). Как и в [7], конкретизация второго члена асимптотики дает следующее вариационное неравенство:

$$
\begin{gathered}
\langle\beta H,\ X-H\rangle-\langle B(H),\ X-H\rangle\geqslant\langle f,\ X-H\rangle\\
\forall X\in C^\infty(\Gamma),\ \ X\geqslant 0
\end{gathered}
\tag{3.14}
$$

$$
H=K_c^{-1}K_1h,\ \ \beta=-b-(2K_1)^{-1}K_3,\ \ f=\varepsilon^{-1}(K_c^{-1}K_1-1)+K_c^{-1}K_1'
\tag{3.15}
$$

Важным моментом в вопросе о разрешимости задачи (3.14) является неотрицательность главной части $-B$ оператора, фигурирующего в (3.14). Иными словами, используется вытекающая из (2.13) формула

$$
-\langle B(K_1h), K_1h\rangle={}^1/_2\int_\Gamma\int_\Gamma|K_1(s)h(s)-K_1(\sigma)h(\sigma)|^2Z(s,\sigma)\,ds\,d\sigma\geqslant 0
$$

К сожалению, трехчленная асимптотика КИН, выписанная в (3.13), не дает возможность уточнить (3.14). Дело в том, что получающееся таким способом вариационное неравенство оказывается некорректным. В самом деле, операторы C_{13} и C_{31} имеют первый порядок, а значит, норма в функциональном пространстве, на котором следует рассматривать задачу, определяется главными частями выражений $\alpha^2C_{11}(hC_{11}(K_1h))$ и ${}^1/_8K_1\partial_s^2h$. (Любопытным представляется тот факт, что интегральный оператор $4\alpha^2C_{11}C_{11}$ отличается от дифференциального оператора ∂_s^2 только вполне непрерывными добавками.) Если $K_1>0$ и $h\geqslant 0$, то

$$
-\langle B(hB(K_1h)),\ K_1h\rangle=-\langle hB(K_1h),\ B(K_1h)\rangle\leqslant 0
\tag{3.16}
$$

$$
-\langle\partial_s^2(K_1h),\ K_1h\rangle=\langle\partial_s(K_1h),\ \partial_s(K_1h)\rangle\geqslant 0
\tag{3.17}
$$

Таким образом, слагаемое $^1/_8K_1\partial_s{}^2h$ обладает нужным свойством. Однако для другого слагаемого это неверно; к тому же присутствие дополнительно множителя h не позволяет рассчитывать на оценку выражения (3.16) выражением (3.17). Следовательно, необходимое условие неотрицательности главной части оператора в трехчленной асимптотике нарушено.

По всей видимости для разумных постановок задач пригодны асимптотические разложения типа (3.13) только с четным числом членов (это относится и к асимптотике потенциальной энергии деформации, вычисляемой в следующем разделе).

4. Вывод вариационного неравенства на основе критерия Гриффитса. Основываясь на полученном асимптотическом решении задачи об увеличившейся трещине, вычислим приращение потенциальной энергии деформации $U_h=E_h-A_h=-^1/_2A_h$, где E_h — функционал упругой энергии, A_h — работа внешних сил

$$A_h=2\int\limits_{M_\varepsilon}P(\varepsilon,y)u_z(\varepsilon;y,+0)\,dy=-\int\limits_{M_\varepsilon}p(\varepsilon,y)v(\varepsilon,y,0)\,dy \qquad (4.1)$$

Предположим сначала, что функция $p(\varepsilon, y)$ обращается в нуль вблизи ребра (тогда в интеграле (4.1) не участвует внутреннее разложение (3.2)). Подставляя в (4.1) формулы (3.1), (3.3), (3.6) и $p(\varepsilon, y)=p(y)+\varepsilon p'(y)+\varepsilon^2p''(y)+O(\varepsilon^3)$, имеем

$$-\alpha A_h=2\int\limits_{M_\varepsilon}\{pv_0+\varepsilon(pv_1+p'v_0)+\varepsilon^2(pv_2+p'v_1+p''v_0)\}dy+O(\varepsilon^3)=$$

$$=-\alpha A_0+2\varepsilon\int\limits_{M_\varepsilon}\{p'v_0+v'p_0\}dy+2\varepsilon^2\int\limits_{M_\varepsilon}\{pv''+p'v'+p''v_0\}dy+$$

$$+2\varepsilon\int\limits_{M_\varepsilon}pV_1(A_1)dy+2\varepsilon^2\int\limits_{M_\varepsilon}\{p(V_1(A_2)+V_3(A_3)+p'V_1(A_1))\}dy+O(\varepsilon^3)$$

Последние четыре интеграла обозначим $2I_j$, $j=1, 2, 3, 4$. В силу (2.10), (3.3) и (3.7) верны равенства

$$I_3=-^1/_2\alpha\varepsilon\int\limits_{\Gamma}K_1(s)A_1(s)\,ds$$

$$I_4=-^1/_2\varepsilon^2\int\limits_{\Gamma}\{K_1(s)A_2(s)+K_3(s)A_3(s)+K_1'(s)A_1(s)\}\,ds$$

Кроме того, применяя формулу Грина, находим, что

$$I_1=\varepsilon\int\limits_{M_\varepsilon}2p'v_0\,dy=-^1/_2\alpha\varepsilon A',\qquad I_2=\varepsilon^2\int\limits_{M_\varepsilon}(2p''v_0+p'v')\,dy=-^1/_2\alpha\varepsilon^2A''$$

Окончательно получаем соотношение для потенциальной энергии

$$\Delta U_h=U_h-U_0=^1/_2A_0-^1/_2A_h=-^1/_2\varepsilon A'-^1/_2\varepsilon^2A''-$$

$$-^1/_2\alpha\varepsilon\left(\int\limits_{\Gamma}h(s)K_1(s)^2\,ds+\varepsilon\int\limits_{\Gamma}h(s)K_1(s)\{2K_1'(s)+\right.$$

$$\left.+\alpha C_{11}(hK_1;s)+^1/_2h(s)K_3(s)\}\,ds\right)+O(\varepsilon^3) \qquad (4.2)$$

Отметим, что A' и $2A''$ — первая и вторая производные (по параметру ε) работы внешних сил на берегах $M^\pm$ (нагрузка изменяется, а трещина не подрастает). Величины A' и A'' не зависят от h. Наконец, формула (4.2) сохраняет силу и без указанного ранее условия для нагрузки P —

вычисления, учитывающие внутреннее разложение (3.2) и представление (2.10), модифицированное для случая $P\neq 0$ на Γ при $j=3$, приводят к тому же результату.

Примем следующее предположение: изменение формы ребра трещины происходит так, что приращение $\Delta U_h+\Delta\Pi_h$ потенциальной энергии системы оказывается минимальным. Поскольку минимум общей энергии и минимум приращения достигаются одновременно, названное требование представляет собой известную гипотезу Гриффитса. Заменим слагаемые ΔU_h и $\Delta\Pi_h$ их двучленными асимптотиками (4.2) и

$$\Delta\Pi_h=2\gamma\varepsilon\int\limits_{\Gamma} h(s)\,ds+\gamma\varepsilon^2\int\limits_{\Gamma} h(s)^2 k(s)\,ds+O(\varepsilon^3) \tag{4.3}$$

Задача о минимуме функционала на множестве функций, подчиненных условию (1.2), может быть поставлена как вариационное неравенство

$$\langle\beta_* H_*, X-H_*\rangle-\langle B(H_*), X-H_*\rangle\geqslant\langle f_*, X-H_*\rangle$$
$$\forall X\in C^\infty(\Gamma),\ X\geqslant 0 \tag{4.4}$$

$$H_*=K_c^{-1}K_1h,\ \beta_*=\beta+(\alpha K_1^2)^{-1}2\gamma k,\ f_*=\varepsilon^{-1}((2K_c)^{-1}K_1-(\alpha K_1K_c)^{-1}2\gamma)+$$
$$+K_c^{-1}K_1' \tag{4.5}$$

Благодаря (4.5) в левой части (4.4) возникло дополнительное (по сравнению с (3.14)) слагаемое, содержащее кривизну k контура Γ. Отметим, что постановка плоской задачи подразумевает равенство $k=0$, а значит, расхождение энергетического и силового критериев в плоских задачах теории трещин не проявляется.

При решении вариационного неравенства (4.4) возможны несколько ситуаций. Приведем их механическую интерпретацию. Если существует только нулевое решение, то трещина M неподвижна. В том случае, когда имеется в точности одно нетривиальное решение, происходит устойчивый квазистатический рост. Отсутствие решения интерпретируется как лавинообразное (неквазистатическое) развитие трещины. Наконец, наличие нескольких решений не нарушает квазистатический характер процесса разрушения и означает лишь его неустойчивость (ветвление).

5. Исследование вариационных неравенств. Сформулируем два утверждения, установленные в [7, 9].

Предложение 1. Пусть функция β положительна на Γ. Тогда вариационное неравенство (3.14) имеет единственное решение $H\in W^1_{2,+}(\Gamma)=\{X\in W_2{}^1(\Gamma) : X\geqslant 0\}$ и верна оценка

$$\|H;\ W_2{}^{1/2}(\Gamma)\|^2+\langle|f_-|, H\rangle\leqslant c\|f_+;\ L_2(\Gamma)\|^2 \tag{5.1}$$

То же самое справедливо и для вариационного неравенства (4.4) (с заменой β, f, H на β_*, f_*, H_*).

Предложение 2. Если в дополнение к условию предложения 1 $f\in L_p(\Gamma)$ для $p\in[2,\infty)$, то названные решения попадают в пространство $W_p{}^1(\Gamma)$.

Здесь через $W_p{}^l(\Gamma)$ обозначается пространство Соболева – Слободецкого, а $f_\pm={}^1/_2(f\pm|f|)$.

Из предложения 1 вытекает, что пробную функцию X в (3.14) и (4.4) следует брать из пространства $W_2{}^{1/2}(\Gamma)$. Предложение 2 гарантирует некоторую гладкость решения. Если условия положительности функций β и β_* не выполнены, то однозначная разрешимость вариационных задач может нарушаться. Далее в этом разделе считаем, что β, $\beta_*>0$ и, кроме того, $K_1(s)\in(0, K_c]$, $K'(s)\geqslant 0$, $s\in\Gamma$ (иными словами, раскрытая трещина находится в предельно равновесном состоянии и изменение нагрузки вызывает ее развитие). Тогда в (5.1) содержится оценка самой функции h.

Правые части f и f_* представимы в виде $f=f_++f_-$ и $f_*=(f_*)_++(f_*)_-$, причем величины f_+ и $(f_*)_+$ ограничены, а величины f_-, $(f_*)_-$ растут при $\varepsilon\to 0$. Оценка (5.1) обеспечивает, в частности, малость решения H на носителях функций f_- или $(f_*)_-$.

Предложение 3. Пусть выполнено условие предложения 1 и область G (профиль начальной трещины M) выпуклая. Тогда справедливо неравенство $H\geqslant H_*$.

Доказательство. Положим $X=H+\Theta_+$ в (3.14) и $X=H_*-\Theta_+$ в (4.4); здесь $\Theta=H_*-H$. Складывая результаты, находим

$$-\langle\beta\Theta,\ \Theta_+\rangle-\langle(\beta_*-\beta)H_*,\ \Theta_+\rangle+\langle B(\Theta),\ \Theta_+\rangle\geqslant\langle f-f_*,\ \Theta_+\rangle \qquad (5.2)$$

Так как β, H_*, Θ_+ и $\beta_*-\beta=2\gamma k(\alpha K_1^2)^{-1}$ – неотрицательные функции на Γ, то

$$\langle\beta\Theta,\ \Theta_+\rangle=\langle\beta\Theta_+,\ \Theta_+\rangle\geqslant 0,\qquad \langle(\beta_*-\beta)H_*\Theta_+\rangle\geqslant 0.$$

Кроме того, используя очевидное неравенство $(a-b)(a_+-b_+)\geqslant(a_+-b_+)^2$, а также симметричность и положительность ядра Z интегрального оператора (2.13), имеем

$$2\langle B(\Theta),\ \Theta_+\rangle=2\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma(\Theta(\sigma)-\Theta(s))Z(s,\ \sigma)\,d\sigma\,\Theta_+(s)\,ds=$$

$$=\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma(\Theta(\sigma)-\Theta(s))\Theta_+(s)Z(s,\ \sigma)\,d\sigma\,ds+\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma(\Theta(s)-\Theta(\sigma))\Theta_+(\sigma)Z(\sigma,\ s)\,ds\,d\sigma=$$

$$=-\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma(\Theta(\sigma)-\Theta(s))(\Theta_+(\sigma)-\Theta_+(s))Z(s,\ \sigma)\,ds\,d\sigma\leqslant 0$$

Итак, левая часть (5.2) не больше нуля. Вместе с тем скалярное произведение справа неотрицательно, поскольку

$$f-f_*=(2\varepsilon K_1K_c)^{-1}(K_c-K_1)^2\geqslant 0 \qquad (5.3)$$

Следовательно, все слагаемые в (5.2) равны нулю. Поэтому и $\Theta_+(s)=(H_*(s)-H(s))_+=0$, т. е. $H(s)\geqslant H_*(s)$ во всех точках ребра Γ.

Установленный факт означает, что силовой критерий разрушения предсказывает большее распространение выпуклой трещины нежели энергетический критерий Гриффитса.

В [9] построено асимптотическое решение вариационного неравенства (3.14). Пусть КИН принимает максимальное значение K_c в точках $s_1,\ldots,s_N$ контура Γ, причем

$$K_1(s)=K_c(1-A_i(s-s_i)^2+O(|s-s_i|^3)) \qquad (5.4)$$
$$A_i>0,\quad a_i=K_c^{-1}-K_1'(s_i)>0\quad(i=1,\ldots,N)$$

Отсюда и из (3.15), (4.5) вытекают соотношения

$$f(s)\sim a_i-\varepsilon^{-1}A_i(s-s_i)^2,\qquad f_*(s)\sim a_i-\varepsilon^{-1}A_i(s-s_i)^2$$

Поэтому асимптотический анализ [9] пригоден и для задачи (4.4), а оба решения H и H_* приближаются одним и тем же выражением

$$\sum_{i=1}^N\varepsilon^{1/2}a_i^{3/2}A_i^{-1/2}\Upsilon(\varepsilon^{-1/2}a_i^{-1/2}A_i(s-s_i)) \qquad (5.5)$$

$$\Upsilon(\zeta)=0 \text{ при } \zeta^2\geqslant 2,\qquad \Upsilon(\zeta)={}^1/_3(2-\zeta^2)^{3/2} \text{ при } \zeta^2\leqslant 2.$$

Тем не менее хотелось бы вывести априорную оценку близости решений вариационных неравенств (3.14) и (4.4), так как численные эксперименты [9] показывают, что асимптотическое решение (5.5) дает удовлетворительный результат только при достаточно малых значениях параметра ε. Такую оценку удалось получить лишь при дополнительном условии: решения H и H_* равны нулю вне $C\varepsilon^{1/2}$ – окрестностей точек $s_1,\ldots,s_N$. (Введение этого требования можно оправдать тем, что согласно [9] асимптотическое решение (5.5) дает точную информацию о носителе функции H или H_* в большом диапазоне изменения параметра ε).

Предложение 4. При сделанных допущениях справедлива оценка

$$\|H-H_*;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\|\leqslant C\varepsilon(k_*+\varepsilon^{1/2}) \qquad (5.6)$$

в которой $k_*=\max\{|k(s_1)|,\ldots,|k(s_N)|\}$, а постоянная C не зависит от ε.

Доказательство. Отметим сначала, что благодаря малости носителей функций f_+ и H верны формулы

$$\|f_+;\ L_2(\Gamma)\|^2=O(\varepsilon^{1/2}),\qquad \|H;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\|^2\geqslant c\varepsilon^{-1/2}\|H;\ L_2(\Gamma)\|^2 \qquad (5.7)$$

Они остаются в силе и для $(f_*)_+$, H_*. Положив $X=0$ в (3.14), выводим уточненную оценку (5.1):

$$\|H;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\|+\|H_*;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\|\leqslant c\varepsilon^{1/2} \qquad (5.8)$$

Пусть теперь $X=H_*$ в (3.14) и $X=H$ в (4.4). Складывая такие неравенства, приходим к соотношению для функции $\Theta=H_*-H$:

$$\langle\beta\Theta,\ \Theta\rangle-\langle B(\Theta),\ \Theta\rangle\leqslant\langle(\beta-\beta_*)H_*,\ \Theta\rangle+\langle f_*-f,\ \Theta\rangle \tag{5.9}$$

Левая часть (5.9) оценивается снизу величиной $c\|\Theta;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\|^2$. Правая часть в силу (5.7), (5.8) не превосходит

$$\delta\varepsilon^{-1/2}\|\Theta;L_2(\Gamma)\|^2+c\delta^{-1}\varepsilon^{1/2}\{\varepsilon^{3/2}|k_*+\varepsilon^{1/2}|^2+\sum_{i=1}^{N}\|f-f_*;L_2(s_i-c\varepsilon^{1/2},\ s_i+c\varepsilon^{1/2})\|^2\}$$

Для проверки (5.6) осталось фиксировать достаточно малое $\delta>0$, еще раз применить вторую оценку из (5.7) (для функции Θ) и вычислить нормы в L_2 разности $f-f_*$ согласно (5.3), (5.4) (они суть $O(\varepsilon^{5/2})$).

Таким образом, если вблизи точек максимумов КИН ребро Γ трещины M искривлено слабо, то приращения поверхности трещины, найденные согласно силовому и энергетическому критериям, различаются мало.

Наконец, подставляя в (4.4) $X=0$ и $X=2H_*$, приходим к равенству, выражающему баланс энергии по Гриффитсу

$$\langle\beta_*H_*,\ H_*\rangle-\langle B(H_*),\ H_*\rangle=\langle f_*,\ H_*\rangle$$

6. Вариационное неравенство в рамках деформационного критерия. В механике разрушения часто используются деформационные критерии. В модели трещины, связанной с критерием Леонова — Панасюка — Дагдейла [10, 11], нагрузка $P(y)$, приложенная к берегам $M^\pm$, складывается из двух взаимодействий: растягивающих усилий Q, гладко зависящих от $y\in G$, и сил сцепления q_c, действующих в узком устье $m=\{y\in G:-n\leqslant N(s)\}$ трещины. Ширина $N(s)$ устья трещины находится из требования конечности напряжений на ребре M. Равновесность трещины определяется величиной δ ее раскрытия

$$\delta_c\geqslant\delta(s)\equiv2v_0(y,\ 0)|_{-n=N(s)} \tag{6.1}$$

Соответствующее вариационное неравенство строится по той же схеме, что и неравенство (1.3). Соотношения (1.1) заменяются такими

$$h_\varepsilon(s)>0\Rightarrow\delta(h_\varepsilon;\ s)=\delta_c,\ h_\varepsilon(s)=0\Rightarrow\delta(h_\varepsilon;\ s)\leqslant\delta_c \tag{6.2}$$

Здесь $\delta(h_\varepsilon;\ s)$ — раскрытие устья подросшей трещины M_ε. Условия (6.2) и (1.2) приводят к формулам

$$\langle\delta(h_\varepsilon;\ s)-\delta_c;\ \Xi h_\varepsilon-\Xi\chi\rangle\geqslant0,\ \forall\chi\in C^\infty(\Gamma),\ \chi\geqslant0 \tag{6.3}$$

Как и ранее, положительный множитель Ξ подбирается таким образом, чтобы возникающий оператор оказался самосопряженным (ср. с (2.13)).

Поскольку интенсивность q_c сил сцепления значительно превосходит величину $Q_*=\max Q(y)$, то в задаче присутствует естественный малый параметр $l=q_c^{-1}Q_*$ (ширина устья много меньше диаметра трещины). Для того чтобы конкретизировать неравенство построим два первых члена асимптотики

$$N(s)=l^2N_0(s)+l^4N_1(s)+O(l^6) \tag{6.4}$$

С этой целью определим разложение по параметру l решения v_0 исходной задачи для трещины M с нагрузкой $P(y)$. Пусть $v_0^{(0)}$ — гармоническая в $\mathbf{R}_3^+$ функция, подчиненная условию (2.1), в котором величина P заменена на Q. Обозначим через $\mathbf{K}_j(s)$ коэффициенты, входящие в разложение (2.2). (Отметим, что вместо $p(s)$ и $(\partial_np)(s)$ следует писать $-\alpha Q(0,\ s)$ и $-\alpha(\partial_nQ)(0,\ s)$.) Поскольку в нагрузке P еще не учтена составляющая q_c, необходимо построить пограничный слой. В окрестности контура Γ перейдем к координатам $(\xi,\ s)$, где $\xi_1=N(s)^{-1}n$, $\xi_2=N(s)^{-1}z$. В силу (3.8), (6.4) получается формальное разложение операторов задачи

$$\begin{gathered}\partial_z=l^{-2}N_0(s)^{-1}\{\partial_2-l^2N_1(s)N_0(s)^{-1}\partial_2+\ldots\}\\ \Delta_x=l^{-4}N_0(s)^{-2}\{\Delta_\xi+l^2(N_0(s)k(s)\partial_1-2N_1(s)N_0(s)^{-1}\Delta_\xi)+\ldots\}\end{gathered}\tag{6.5}$$

Здесь $\partial_j=\partial/\partial\xi_j$, $j=1, 2$, $\Delta_\xi=\partial_1{}^2+\partial_2{}^2$. Старшие члены пограничного слоя ищем в виде суммы

$$\begin{gathered}l\{w^{(0)}(\xi, s)+\Upsilon^{(0)}(\xi, s)-\alpha lQ(0, s)N_0(s)\rho\sin\varphi\}\\ \Upsilon^{(0)}(\xi)=(N_0\rho)^{1/2}\mathbf{K}_1\Phi_1{}^{(0)}(\varphi)\end{gathered}\tag{6.6}$$

Для сокращения записи опускается аргумент s и величина $|\xi|$ обозначена ρ. Так как $P(y)=Q(y)-l^{-1}Q_*$ при $n\in(-N(s), 0)$, то согласно (6.5) гармоническую в $\mathbf{R}_+{}^2$ функцию w^0 следует подчинить смешанным краевым условиям

$$\begin{gathered}\partial_2w^{(0)}(\xi_1, 0)=W_0,\ \xi_1\in(-1, 0);\ \partial_2w^{(0)}(\xi_1, 0)=0,\ \xi_1<-1\\ w^{(0)}(\xi_1, 0)=0,\ \xi_1>0;\ W_0=\alpha Q_*N_0\end{gathered}\tag{6.7}$$

След решения на луче $\{\xi:\xi_2=0, \xi_1\leqslant 0\}$ имеет вид [10]:

$$w^{(0)}(\xi_1, 0)=\pi^{-1}W_0\{(1+\xi_1)\ln(1+|\xi_1|^{1/2})^{-1}(1-|\xi_1|^{1/2})]-2|\xi_1|^{1/2}\}$$

Отсюда выводим

$$w^{(0)}(\xi)=-4\alpha^{-1}(2\pi)^{-1/2}W_0\rho^{1/2}\Phi_1{}^{(0)}(\varphi)+O(\rho),\quad \rho\to 0\tag{6.8}$$

$$w^{(0)}(\xi)=-{}^8/_3(2\pi)^{-1/2}W_0\rho^{-1/2}\Psi_1{}^{(0)}(\varphi)+O(\rho^{-1/2}),\quad \rho\to\infty\tag{6.9}$$

Для того чтобы производные по ξ_j величины (6.6) были ограничены в точке $\xi=0$, необходимо и достаточно равенство

$$N_0(s)=\pi\mathbf{K}_1(s)^2(8Q_*{}^2)^{-1}\tag{6.10}$$

Итак, главный член асимптотики (6.4) вычислен. Перед тем как перейти к определению функции N_1, уточним внешнее (вдали от края трещины) разложение

$$v_0(l, x)=v_0{}^{(0)}(x)+l^2v_0{}^{(1)}(x)+\ldots\tag{6.11}$$

Применяя, как и ранее, метод сращивания, на основе формул (2.8) и (6.9) заключаем, что в качестве $v_0{}^{(1)}$ следует выбрать сингулярное решение $V_1(T; x)$, в котором $T(s)=-\alpha\pi(12Q_*{}^2)^{-1}\mathbf{K}_1(s)^3$. Теперь может быть найдена поправка порядка l^3 во внутреннем разложении

$$\begin{gathered}l^3\{w^{(1)}(\xi, s)+\Upsilon^{(1)}(\xi, s)\}\\ \Upsilon^{(1)}(\xi)=N_0{}^{1/2}\{{}^1/_2N_1N_0{}^{-1}\rho^{1/2}\mathbf{K}_1\Phi_1{}^{(0)}(\varphi)+N_0\rho^{3/2}(\mathbf{K}_1\Phi_1{}^{(1)}(\varphi)+\mathbf{K}_3\Phi_3{}^{(0)}(\varphi))-\\ -{}^1/_2N_1N_0{}^{-2}\rho^{-1/2}T\Psi_1{}^{(0)}(\varphi)+\rho^{1/2}[T\Psi_1{}^{(1)}(\varphi)+C_{11}(T)\Phi_0{}^{(1)}(\varphi)]\}\end{gathered}\tag{6.12}$$

Последняя формула вытекает из представлений (2.2) и (2.8), в которых после перехода к переменной $\rho=l^{-2}r(N_0+l^2N_1+\ldots)^{-1}$ нужно собрать слагаемые порядков $O(l^3)$ и $O(l)$ соответственно. В силу (6.5) заключаем, что $w^{(1)}$ — ограниченное решение задачи

$$\begin{gathered}\Delta_\xi w^{(1)}(\xi)=F(\xi),\ \xi\in\mathbf{R}_+{}^2;\ \partial_2w^{(1)}(\xi_1, 0)=0,\ \xi_1<-1\\ \partial_2w^{(1)}(\xi_1, 0)=N_0{}^{-1}N_1W_0,\ \xi_1\in(-1, 0);\ w^{(1)}(\xi_1, 0)=0,\ \xi_1>0\end{gathered}\tag{6.13}$$

Правая часть уравнения Пуассона есть $O(\rho^{-3/2})$ при $\rho\to\infty$, и для нее справедливо равенство

$$\begin{gathered}F(\xi)=-\Delta_\xi\Upsilon^{(1)}(\xi)-N_0k\partial_1(w^{(0)}(\xi)+\Upsilon^{(0)}(\xi))=\\ =-N_0k\partial_1w^0(\xi)-N_0{}^{1/2}T\Delta_\xi(\rho^{1/2}\Psi_1{}^{(1)}(\varphi))\end{gathered}$$

Решение задачи (6.11) допускает представление

$$w^{(1)}(\xi)=S\rho^{1/2}\Phi_1^{(0)}(\varphi)-N_0T\Delta_\xi(\rho^{1/2}\Psi_1^{(1)}(\varphi)) \qquad (6.14)$$

Множитель S в (6.12) можно вычислить, решая краевую задачу (6.13) явно. Другой путь, использующий формулу Грина для $w^{(1)}$ и $\rho^{-1/2}\Psi_1^{(0)}(\varphi)$, состоит в многократном интегрировании по частям на полуплоскости, из которой удалены полукруги с центрами $(-1, 0)$ и $(0, 0)$ и с радиусами ε. Переход к $\varepsilon=0$ доставляет равенство

$$S(s)=(2\pi)^{-1/2}Q_*(k(s)N_0(s)^2-4N_1(s))$$

Таким образом, градиент функции (6.12) ограничен лишь в том случае, если выполнено равенство

$$N_1(s)=(2Q_*)^{-1}(2\pi N_0(s))^{1/2}C_{11}(T;\ s)+k(s)N_0(s)^2 \qquad (6.15)$$

Второй член асимптотики (6.4) ширины $N(s)$ устья трещины определен. Отметим, что по такой же схеме можно построить полное асимптотическое разложение величины $N(s)$; в формировании старших членов асимптотики будут участвовать весовые функции высших порядков.

Поскольку вблизи устья трещины M решение v описывается внутренним разложением (сумма выражений (6.6) и (6.12)), то

$$\delta(s)=l\delta_0(s)+l^3\delta_1(s)+O(l^4)$$
$$\delta_j(s)=w^{(j)}(-1,\ 0,\ s)+\Upsilon^{(j)}(-1,\ 0,\ s) \qquad (6.16)$$

Одночленное разложение (6.16) приводит к соотношению

$$\delta(s)=l(2Q_*)^{-1}\alpha\mathrm{K}_1(s)^2+O(l^3) \qquad (6.17)$$

Следовательно, и в трехмерном случае деформационный критерий асимптотически эквивалентен силовому, причем величины q_c, δ_c и K_c связаны формулой $2q_c\delta_c=\alpha K_c^2$.

Вывод вариационного неравенства в рамках деформационного критерия подразумевает вычисление асимптотической зависимости от двух малых параметров ε и l. Если $l\ll\varepsilon$, то в (6.3) достаточно использовать формулу (6.17). В этом случае упомянутая асимптотическая эквивалентность деформационного и силового критериев означает, что (6.3) перейдет в (3.14) при $\Xi=\mathrm{K}_1K_c^{-1}>0$. С помощью формул (6.12)–(6.15) можно найти второй член $\delta_1(s)$ представления (6.16), указать соответствующее вариационное неравенство и требование $l\ll\varepsilon$ заменить условием $l^3\ll\varepsilon$. Однако мы пренебрегаем такой возможностью из-за громоздких формул.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Griffith A. A.* The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 1921. V. A221. P. 25–35.
2. *Irwin G.* Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate // J. Appl. Mech. 1957. V. 24. № 3. P. 361–364.
3. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
4. *Nguen Quoc Son.* Stabilité et bifurcation en rupture et en plasticité // C. R. Acad. Sci. Paris. 1981. Ser. 2. T. 292. № 11. P. 817–820.
5. *Nemat-Nasser S., Sumi Y., Keer L. M.* Unstable growth of tension cracks in brittle solids: stable and unstable bifurcations, snap-through and imperfection sensitivity // Int. J. Solids Structures. 1980. V. 16. № 11. P. 1017–1033.
6. *Колтон Л. Г.* Медленный рост системы трещин // Механика твердого тела. 1989. № 5. С. 95–100.
7. *Назаров С. А.* Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва // Механика твердого тела. 1989. № 2. С. 152–160.
8. Разрушение / Под ред. Г. Либовица М.: Мир, 1975. Т. 2. 766 с.

9. *Колтон Л. Г., Назаров С. А.* Вариация формы ребра плоской локально неравновесной трещины нормального отрыва // Задачи с неизвестной границей в механике деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1990.
10. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.
11. *Dugdale D. S.* Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. 1960. V. 8. № 2. P. 100–104.
12. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
13. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 1. С. 33–36.
14. *Назаров С. А.* Весовые функции и инвариантные интегралы // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1990. Вып. 1. С. 17–31.
15. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука. 1989. 334 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
11.III.1991