

УДК 532.546

© 1992 г. Ю. Н. ГОРДЕЕВ, А. Ф. ЗАВОВСКИЙ

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ
ГИДРОРАЗРЫВА ПОСТОЯННОЙ ВЫСОТЫ
И БОЛЬШОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ В НЕПРОНИЦАЕМОЙ СРЕДЕ

Рассматривается задача о гидравлическом разрыве пласта [1, 2] в рамках модели [3, 4], когда в результате разрыва образуется вертикальная трещина постоянной высоты, сильно вытянутая в горизонтальном направлении. Фильтрационные утечки не учитываются. Движение жидкости разрыва в трещине описывается степенным законом сопротивления, причем нелинейность обусловлена либо реологией жидкости разрыва, либо турбулентным характером течения в трещине. Установлено, что как и в случае линейного закона сопротивления [5] существует непрерывный спектр точных решений, отвечающих степенным и экспоненциальному изменениям со временем давления нагнетания и расхода заканчиваемой жидкости. Дается классификация режимов гидроразрыва, допускающих точное исследование. К ним относятся, в частности, закачка с постоянным расходом и постоянным давлением в скважине; распространение трещины, содержащей фиксированный объем жидкости, при закрытой скважине; разрыв при изливе жидкости из трещины. Анализируются закономерности распространения трещины и динамика основных показателей процесса гидроразрыва при различных режимах нагнетания. Полученные точные решения аналогичны известным инвариантным решениям уравнения Лейбензона, отвечающим нестационарным фильтрационным течениям газа в пористой среде [6–8].

Другие подходы к исследованию гидравлического разрыва пласта на основе модели [3, 4] и ее обобщений излагаются в [9–15].

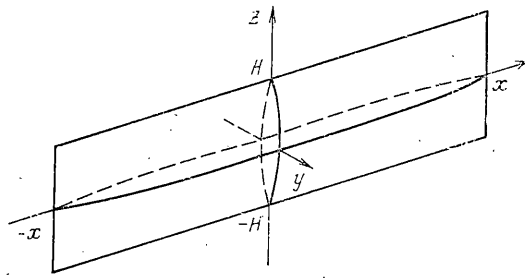
1. Постановка задачи. Пусть при гидравлическом разрыве пласта образуется симметричная относительно скважины вертикальная трещина постоянной высоты $2H$ и большой протяженности в горизонтальном направлении $2l \gg 2H$ ($|x| \leq l$) (фиг. 1). Следуя [3, 4], будем пренебрегать нарушениями сплошности среды скважиной, упругие постоянные пласта и вмещающих его пород будем считать одинаковыми, давление жидкости в трещине p — постоянным по высоте трещины ($|z| \leq H$) в каждом ее вертикальном сечении $|x| = \text{const}$. Раскрытие трещины $2w$ в каждом сечении $|x| = \text{const}$ будем находить независимо как решение соответствующей плоской задачи теории упругости для разреза $|z| \leq H$ в упругой плоскости (z, y) с заданными нормальными нагрузками на его берегах $p(x, t) - \sigma$, где σ — боковое горное давление, а t — время. Результат, как известно, имеет вид [16]:

$$w(x, z, t) = \frac{2(1-\nu^2)H\sigma}{E} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{H}\right)^2} \left[\frac{p(x, t)}{\sigma} - 1 \right] \quad (1.1)$$

$|x| \leq l(t), \quad |z| \leq H$

где E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона породы.

Течение жидкости в трещине будем описывать уравнениями движения



Фиг. 1

и неразрывности, осредненными по раскрытию трещины, независимо в каждом горизонтальном сечении $z = \text{const}$:

$$v^n = -B_n w^m \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vw) = 0 \quad (1.3)$$

Здесь v — скорость движения жидкости в трещине, а m , n и B_n — некоторые постоянные.

Степенной закон сопротивления (1.2) описывает медленные течения в узкой щели псевдопластических жидкостей со степенным реологическим законом [17]:

$$\dot{\gamma}_0 = K \tau_0^n \quad (1.4)$$

где $\dot{\gamma}_0$ — скорость сдвига, τ_0 — касательное напряжение в жидкости, а K — так называемый показатель consistency жидкости [18]. При этом

$$m = n + 1, \quad B_n = \left(\frac{n}{1 + 2n} \right)^n K^{-1}, \quad 0 < n \leq 1 \quad (1.5)$$

При $n = 1$ показатель consistency переходит в вязкость жидкости μ , а (1.2) — в формулу Буссинеска для движения вязкой жидкости в узкой щели.

С другой стороны, в случае быстрых течений, полагая в (1.2)

$$m = 1, \quad n = 2, \quad B_n = (\rho_0 \lambda)^{-1} \quad (1.6)$$

получаем квадратичный закон сопротивления, отвечающий турбулентным течениям ньютоновской жидкости в трещине [19]. Здесь ρ_0 — плотность жидкости, а λ — коэффициент сопротивления, зависящий в общем случае от числа Рейнольдса $Re = 2wv\rho_0/\mu$ и относительной шероховатости поверхностей трещины.

В силу симметрии задачи относительно середины трещины $x = 0$, далее будем рассматривать только ее правую половину $x \geq 0$.

Осредняя уравнения (1.2), (1.3) по вертикальному сечению трещины $x = \text{const}$, получаем

$$\langle q \rangle = \langle v \rangle \langle w \rangle = -B_n^{1/n} \langle w^{m/n+1} \rangle \text{sgn} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{1/n} \quad (1.7)$$

$$\partial \langle w \rangle / \partial t + \partial \langle q \rangle / \partial x = 0 \quad (1.8)$$

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2H} \int_{-H}^H f(z) dz \quad (1.9)$$

Эти уравнения дополняются условием «непротекания» в концах трещины для осредненного одномерного потока, определяющим закон распространения трещины

$$l'(t) = dl(t)/dt = \langle v \rangle, \quad x=l(t) \quad (1.10)$$

условием плавного смыкания поверхностей трещины в ее концах (аналогом условия С. А. Христиановича [2]):

$$p = \sigma, \quad x=l(t) \quad (1.11)$$

начальными условиями

$$l(0) = l_0, \quad p(x, 0) = p^0(x) \quad (1.12)$$

а также условием, определяющим режим нагнетания жидкости в трещину. Последнее будем считать заданным либо в виде давления нагнетания, т. е. давления в середине трещины

$$p(0, t) = p_0(t) \quad (1.13)$$

либо в виде расхода закачиваемой жидкости $q_0(t)$, и тогда

$$\langle q \rangle = 1/4 q_0(t), \quad x=0 \quad (1.14)$$

2. Автомодельные решения. Используя (1.1) и (1.9), можно вычислить осредненные величины, входящие в (1.7) и (1.8). Имеем

$$\langle w \rangle = \pi/4 w_0 \Phi(x, t)$$

$$\langle q \rangle = -\frac{\sqrt{\pi} \gamma B_n^{1/n}}{2} \sigma^{1/n} w_0^{m/n+1} \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \Phi^{m/n+1} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|^{1/n} \quad (2.1)$$

$$\langle v \rangle = \frac{\langle q \rangle}{\langle w \rangle} = -\frac{2\gamma B_n^{1/n}}{\sqrt{\pi}} \sigma^{1/n} w_0^{m/n} \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \Phi^{m/n} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|^{1/n}$$

$$\Phi = \frac{p}{\sigma} - 1, \quad w_0 = \frac{2(1-\nu^2)H\sigma}{E}, \quad \gamma = \Gamma \left(\frac{3n+m}{2n} \right) / \Gamma \left(\frac{4n+m}{2n} \right)$$

где Γ — гамма-функция, после чего уравнение (1.9) сводится к виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - b \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi^{m/n+1} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|^{1/n} \right] = 0 \quad (2.2)$$

$$b = 2\pi^{-1/2} \gamma B_n^{1/n} \sigma^{1/n} w_0^{m/n}$$

Это уравнение относится к типу нелинейных уравнений диффузии (теплопроводности) и при $m=0, n=1$ совпадает с уравнением Лейбенсона, описывающим одномерные нестационарные фильтрационные течения газа в пористой среде. Инвариантные точные решения последнего, отвечающие степенным и экспоненциальным изменениям со временем давления и расхода на границе полубесконечного пласта, детально изучены в [6–8]. Их характерной особенностью является конечная скорость распространения возмущений от границы пласта. При этом моделируются процессы закачки в пласт газа, перераспределения давления в пласте при отсутствии потока через его границу и отборе газа из пласта. Указанные свойства решений, как будет показано ниже, сохраняются и для уравнения (2.2), которое можно интерпретировать как уравнение фильтрации несжимаемой жидкости в фиктивной сжимаемой пористой среде, сжимаемость которой обусловлена раскрытием и смыканием трещины гидроразрыва.

Перейдем к безразмерным переменным

$$X = \frac{x}{l(t)}, \quad L = \frac{l(t)}{l_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad V = \frac{\langle v \rangle}{v_0}, \quad Q = \frac{\langle q \rangle}{q^0} \quad (2.3)$$

$$t_0 = \frac{l_0^{1/n+1}}{b}, \quad v_0 = \frac{b}{l_0^{1/n}}, \quad q^0 = \frac{\pi b w_0}{4l_0^{1/n}}$$

Тогда уравнение (2.2) и условия (1.10)–(1.14) примут вид

$$L^{1/n+1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \frac{L}{L} X \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) - \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) \frac{\partial}{\partial X} \left[\Phi^{m/n+1} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|^{1/n} \right] = 0 \quad (2.4)$$

$$L' = dL/d\tau = V(1, \tau) \quad (2.5)$$

$$\Phi(1, \tau) = 0 \quad (2.6)$$

$$L(0) = 1, \quad \Phi(X, 0) = \Phi^0(X) = p^0(x)/\sigma - 1 \quad (2.7)$$

$$\Phi(0, \tau) = \Phi_0(\tau) = p_0(t)/\sigma - 1 \quad (2.8)$$

$$Q(0, \tau) = Q_0(\tau) = q_0(t)/q^0 \quad (2.9)$$

где в соответствии с (2.1), (2.3):

$$V(X, \tau) = -L^{-1/n} \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) \Phi^{m/n} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|^{1/n},$$

$$Q(X, \tau) = -L^{-1/n} \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) \Phi^{m/n+1} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|^{1/n} \quad (2.10)$$

Будем искать решение задачи (2.4)–(2.9) в форме

$$\Phi(X, \tau) = \alpha^{n/(m+1)} L^\beta(\tau) R(X) \quad (2.11)$$

где α и β – некоторые постоянные, подлежащие уточнению.

Подставляя (2.11) в (2.4), убеждаемся, что для существования решения такого вида должно выполняться соотношение

$$L' L^{[1-\beta(m+1)]/n} = \alpha = \text{const} \quad (2.12)$$

Интегрируя уравнение (2.12) с учетом первого условия (2.7), находим закон распространения трещины

$$L(\tau) = \begin{cases} (1 + \alpha \kappa \tau)^{1/\kappa}, & \beta \neq \beta_e \\ \exp(\alpha \tau), & \beta = \beta_e \end{cases}, \quad \kappa = \frac{n+1-\beta(m+1)}{n}, \quad \beta_e = \frac{n+1}{m+1} \quad (2.13)$$

Из (2.13) следует, что возможны три режима распространения трещины: когда $\beta < \beta_e$, имеем $L(\tau) \sim \tau^{1/\kappa}$ при $\tau \rightarrow \infty$; при $\beta = \beta_e$ трещина растет экспоненциально со временем; при $\beta > \beta_e$ получаем $\kappa < 0$ и потому размер трещины $L(\tau)$ обращается в бесконечность за конечное время $\tau_* = -1/(\alpha \kappa)$. Заметим, однако, что в силу ограничения на перепад давления $p_0(t) - \sigma$, обусловленного опасностью неконтролируемого роста трещины в вертикальном направлении, реальный диапазон изменения размера трещины $L(\tau)$, а следовательно и времени τ , при $\beta > 0$ всегда ограничен.

Функция $R(X)$, описывающая распределение безразмерного давления в трещине ($0 \leq X \leq 1$), должна удовлетворять уравнению

$$(\beta R - XR') - \operatorname{sgn} R' [R^{m/n+1} |R'|^{1/n}]' = 0, \quad R' = dR/dX \quad (2.14)$$

и трем дополнительным условиям, следующим из (2.5), (2.6) и одного

из соотношений (2.8) или (2.9), задающего режим нагнетания. При этом одно из перечисленных условий служит для определения параметра α , а два других играют роль граничных условий для уравнения второго порядка (2.14).

Используя соотношения (2.10)–(2.12), из (2.5) получаем

$$-\operatorname{sgn} R' R^{m/n} |R'|^{1/n} = 1 \quad (X=1) \quad (2.15)$$

а соотношения (2.6), (2.8) и (2.9) принимают вид

$$R(1) = 0 \quad (2.16)$$

$$R(0) = \Phi^0 = \alpha^{-(m+1)/n} \Phi_0(\tau) L^{-\beta}(\tau) = \operatorname{const} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} &-\operatorname{sgn} R' R^{m/n+1} |R'|^{1/n} = Q^0 = \\ &= \alpha^{-(m+n+1)/(m+1)} Q_0(\tau) L^{[1-\beta(m+n+1)]/n} = \operatorname{const} \quad (X=0) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Теперь заметим, что параметр α входит только в условия (2.17) и (2.18), задающие режим нагнетания, а решение задачи (2.14)–(2.16) зависит лишь от параметра β . В связи с этим автомодельные решения удобно строить следующим образом. Сначала находится решение задачи (2.14)–(2.16), затем вычисляются постоянные $\Phi^0(\beta)$ и $Q^0(\beta)$, определенные в (2.17) и (2.18), после чего из (2.17) или (2.18) можно найти параметр α

$$\alpha = [\Phi_0(0)/\Phi^0(\beta)]^{(m+1)/n} = [Q_0(0)/Q^0(\beta)]^{(m+1)/(m+n+1)} \quad (2.19)$$

Таким образом, режимы нагнетания, при которых существуют автомодельные решения (2.14), задаются соотношениями

$$\Phi_0(\tau) = \Phi_0(0) L^\beta, \quad Q_0(\tau) = Q_0(0) L^{[\beta(m+n+1)-1]/n} \quad (2.20)$$

в совокупности с (2.13) и (2.19). При фиксированном значении β они определяются одним из параметров $\Phi_0(0)$ или $Q_0(0)$, т. е. давлением нагнетания или расходом в момент «начала» разрыва $\tau=0$.

3. Понижение порядка уравнения относительно безразмерного давления. Рассмотрим задачу (2.14)–(2.16). Уравнение (2.14) является обобщенно однородным и допускает понижение порядка. Переходя к новым переменным

$$\eta = \ln X, \quad \xi(\eta) = -R^{m+1} e^{-(n+1)\eta}, \quad \chi(\xi) = \xi' + (n+1)\xi \quad (3.1)$$

получаем уравнение первого порядка для функции $\chi(\xi)$ на полупрямой $-\infty < \xi \leq 0$:

$$\begin{aligned} \xi \{ \chi - (n+1)\xi \} \chi' + n\chi &= -\frac{n}{m+1} \chi^2 + n(m+1)^{1/n-1} \operatorname{sgn} \chi |\chi|^{2-1/n} - \\ &- \beta n(m+1)^{1/n} \xi |\chi|^{1-1/n} \end{aligned} \quad (3.2)$$

При этом граничное условие (2.15) переходит в соотношение

$$\chi(\xi) = m+1, \quad \xi = 0 \quad (3.3)$$

а второе граничное условие (2.16) учитывается благодаря выбору границы интервала интегрирования в точке $\xi=0$.

Уравнение (3.2) при условии (3.3) интегрировалось численно методом Рунге–Кутты от $\xi=0$ до $\xi \rightarrow \infty$. В силу его вырождения в точке $\xi=0$ на начальном этапе интегрирования использовалась асимптотика

$$\chi(\xi) = m+1 - \chi_0 \xi, \quad \chi_0 = \frac{n(m+1)(\beta+1)}{m+2} \quad (3.4)$$

После определения функции $\chi(\xi)$ возвращение к исходным переменным производится по формулам

$$X = \exp \left[- \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{(n+1)\xi - \chi(\xi)} \right], \quad R(X) = (-\xi X^{n+1})^{1/(m+1)} \quad (3.5)$$

$$-\operatorname{sgn} R' R^{m/n+1} |R'|^{1/n} = \operatorname{sgn} \chi(\xi) X R(X) |\chi(\xi)|^{1/n}$$

Таким образом, решение $R(X)$ задачи (2.14)–(2.16) находится один раз для каждого значения параметра β . После чего из соотношений (2.17), (2.18) вычисляются величины Φ^0 и Q^0 , а затем выбором одного из параметров $\Phi_0(0)$ или $Q_0(0)$ в соответствии с (2.19) уточняется значение α . В результате каждому значению β отвечает набор решений вида (2.11), соответствующих режимам нагнетания (2.20), (2.13), которые различаются лишь постоянными множителями $\Phi_0(0)$ и $Q_0(0)$.

4. Классификация режимов гидроразрыва. Режим гидроразрыва удобно классифицировать по параметру β . При этом выделяются три характерных значения β : $-1, 0$ и $\beta_0 = 1/(m+n+1)$.

При $\beta=0$, согласно первому соотношению (2.20), имеем режим нагнетания с постоянным давлением жидкости в скважине ($\Phi_0 = \text{const}$).

При $\beta=\beta_0$, в силу второго соотношения (2.20), реализуется режим нагнетания с постоянным расходом ($Q_0 = \text{const}$).

Значение $\beta=-1$ отвечает гидроразрыву при закрытой скважине, когда расход закачиваемой жидкости равен нулю ($Q_0=0$). Убедиться в этом можно следующим образом. Проинтегрируем уравнение (2.14) по X от текущего значения X до 1 с учетом условий (2.15), (2.16). В результате получим уравнение

$$-\operatorname{sgn} R' R^{m/n+1} |R'|^{1/n} = X R + (1+\beta) \int_X^1 R(X') dX' \quad (4.1)$$

левая часть которого в силу соотношений (2.10), (2.11) пропорциональна расходу жидкости в поперечном сечении трещины $X = \text{const}$. Поэтому в точке нагнетания $X=0$, где расположена скважина, при $\beta=-1$ из (4.1) следует обращение в нуль расхода закачиваемой жидкости. Это означает, что при $\beta=-1$ объем жидкости в трещине фиксирован и распространение трещины происходит только за счет перераспределения жидкости в ней.

При дальнейшем уменьшении параметра β ($\beta < -1$) расход «закачиваемой» в трещину жидкости становится отрицательным, т. е. происходит не нагнетание, а излив жидкости из трещины. При этом и давление в скважине и модуль расхода убывают со временем.

В диапазоне изменения β от -1 до 0 также давление в скважине и расход убывают со временем, но в этом случае расход положителен и жидкость поступает в трещину.

При $0 < \beta < \beta_0$ давление в скважине медленно возрастает, а расход закачиваемой жидкости по-прежнему убывает.

Наконец, при $\beta > \beta_0$ и давление и расход возрастают со временем.

В табл. 1 приведена сводка перечисленных выше режимов гидроразрыва. В ней использованы обозначения

$$\beta_e = \frac{n+1}{m+1}, \quad \beta_0 = \frac{1}{m+n+1}, \quad \kappa = \frac{n+1-\beta(m+1)}{n}, \quad \lambda = \frac{\beta(m+n+1)-1}{n} \quad (4.2)$$

При этом, в силу соотношений (2.20) и (2.13), имеем

$$\Phi_0 \sim L^\beta \sim \tau^{\beta/\kappa}, \quad Q_0 \sim L^\lambda \sim \tau^{\lambda/\kappa} \quad (\tau \rightarrow \infty, \beta < \beta_0) \quad (4.3)$$

В третьем, четвертом и пятом столбцах табл. 1 указаны знаки величин Q_0 , Φ_0 и Q_0' (точка означает производную по τ).

Таблица 1

	Режим	Q_0	Φ_0	Q_0^*	β/κ	λ	λ/κ
I	$\beta < -1$	—	—	+			
II	$\beta = -1$	0	—	0	$-\frac{n}{m+n+2}$	$-\frac{m+n+2}{n}$	$-\lambda$
III	$-1 < \beta < 0$	+	—	—			
IV	$\beta = 0$	+	0	—	0	$-1/n$	$-(n+1)$
V	$0 < \beta < \beta_Q$	+	+	—			
VI	$\beta = \beta_Q$	+	+	0	$m+n+2$	0	0
VII	$\beta_Q < \beta < \beta_e$	+	+	+			
VIII	$\beta = \beta_e$	+	+	+	∞	$\frac{m+n+2}{m+1}$	∞
IX	$\beta > \beta_e$	+	+	+	0		0

Таблица 2

N	β	Φ^0	Q^*	Q^0/Q^*	Ω^0
-----	---------	----------	-------	-----------	------------

Квадратичный закон: $n = 2, m = 1$

1	-1,5	0,685	0,563	-0,731	0,578
2	-1	0,888	0,653	0	0,645
3	-0,5	1,09	0,842	0,765	0,712
5	0	1,31	1,4	1	0,796
5	0,25	1,42	1,83	1	0,835
6	1,5	1,99	4,69	1	1,02

Линейный закон: $n = 1, m = 2$

1	-1,5	0,979	1,75	-0,84	0,851
2	-1	1,17	1,95	0	0,903
3	-0,5	1,31	2,29	0,703	0,948
4	0	1,42	3,39	1	0,985
5	0,25	1,47	4,31	1	1,00
6	0,666	1,54	5,96	1	1,03

Ньютоновская жидкость: $n = 0,5; m = 1,5$

1	-1,5	0,979	3,33	-0,861	0,841
2	-1	1,25	3,76	0	0,89
3	-0,5	1,35	4,50	0,735	0,918
4	0	1,42	6,63	1	0,94
5	0,333	1,46	8,96	1	0,953
6	0,6	1,49	11,0	1	0,963

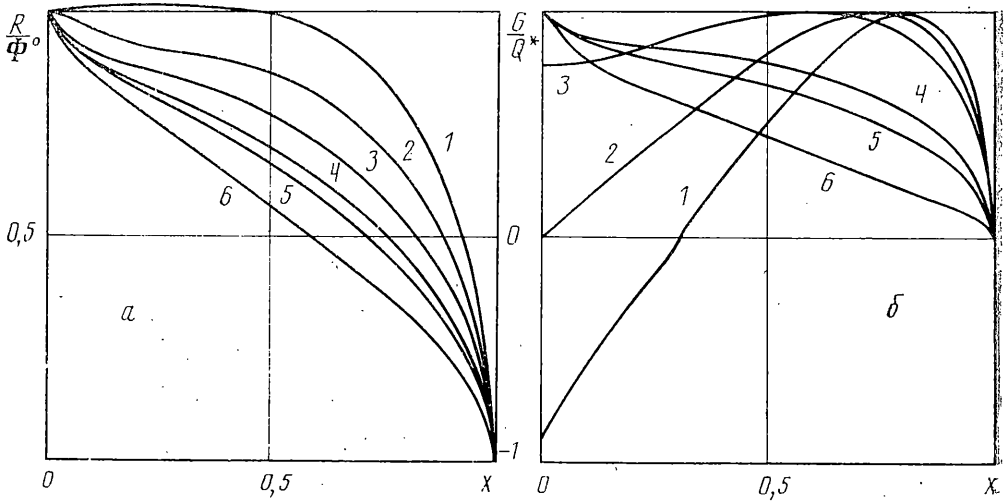
Таким образом, при $\beta < \beta_e$ имеется семь режимов гидроразрыва (I—VII). При $\beta = \beta_e$ величина κ обращается в нуль и вместо соотношений (4.3) получаем

$$\Phi_0 \sim L^\beta \sim e^{\alpha\beta\tau}, \quad Q_0 \sim L^\lambda \sim e^{\alpha\lambda\tau} \quad (\tau \rightarrow \infty, \beta = \beta_e) \quad (4.4)$$

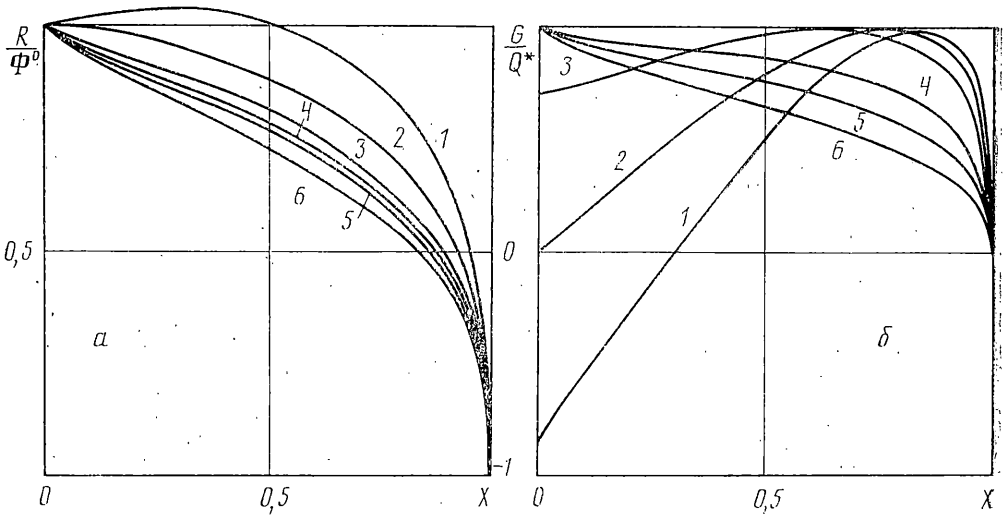
Экспоненциальному режиму гидроразрыва присвоен номер VIII, а режиму с обострением при $\beta > \beta_e$ — номер IX.

Итак, всего имеется девять режимов гидроразрыва.

5. Результаты расчетов. Были проведены три серии расчетов, отвечающие квадратичному ($n=2, m=1$) и линейному ($n=1, m=2$) законам сопротивления, а также гидроразрыву ньютоновской жидкостью ($n=0,5; m=1,5$). Соответствующие им распределения безразмерного давления в трещине $R(X)$ и безразмерного расхода $G(X) = -\text{sgn}(\partial\Phi/\partial X) \Phi^{m/n+1} |\partial\Phi/\partial X|^{1/n}$, нормированные на Φ^0 и $Q^* = \max G(X)$, показаны на фиг. 2—4. Значения параметра β для каждой серии, а так-



Фиг. 2



Фиг. 3

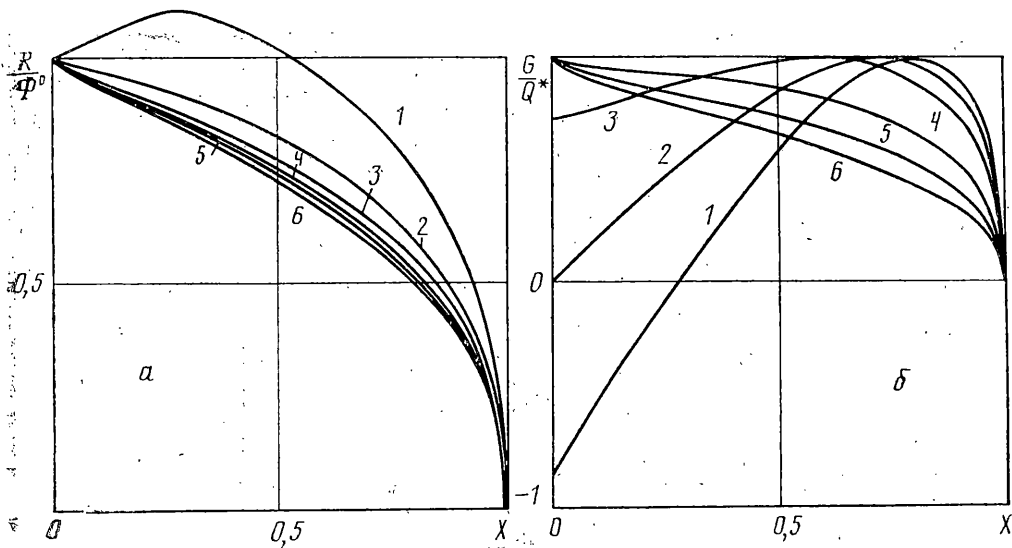
же величин Φ^0 , Q^* и Q^0 приведены в табл. 2. Здесь же указаны значения интеграла:

$$\Omega^0 = \int_0^1 R(X) dX \quad (5.1)$$

через который выражается объем трещины.

Первый вариант во всех трех сериях отвечает изливу жидкости из трещины после закачки в трещину некоторого ее количества; второй — распространению трещины при закрытой скважине, при этом объем трещины фиксирован; третий — режиму нагнетания с падающими давлением закачки и расходом; четвертый — нагнетанию при постоянном давлении; пятый — нагнетанию с постоянным расходом и шестой — экспоненциальному росту со временем давления закачки и расхода.

Рассмотрим первый вариант ($\beta = -1,5$), отвечающий изливу жидкости из трещины (кривые 1 на фиг. 2-4). В этом случае распределения давления в трещине немонотонны, причем максимумы $R(X)$ сопряжены с обращением в нуль расходов: $G(X)$. Соответствующие координаты $X = X_0$ определяют точки разделения потоков: в трещине и потому объем части трещины между сечениями $X = X_0$ и $X = 1$ остается постоянным во времени. Другим характерным сечением трещины является се-



Фиг. 4

чение $X=X^*$, в котором достигает максимума расход $G(X)$. Наличие максимума обусловлено уменьшением раскрытия трещины со временем в ее средней части и стремлением к нулю проводимости трещины при приближении к ее концу.

Немонотонность распределения расхода по длине трещины сохраняется и в следующих двух вариантах (кривые 2, 3 на фиг. 2, б; 3, б и 4, б), отвечающих закрытию трещины ($\beta=-1$) и закачке с падающим давлением нагнетания ($\beta=-0,5$). При этом максимум расхода смещается к середине трещины.

В последних трех вариантах (кривые 4-6 на диг. 2-4), и давление в трещине и расход изменяются монотонно.

Отметим, что в случае излива жидкости из трещины ($\beta < -1$) при нелинейном законе сопротивления (1.2) кривые $G(X)$ (кривые 1 на фиг. 2, б и 4, б) имеют точку перегиба с наклонной асимптотой. Для квадратичного закона сопротивления ($n=2, m=1$) такое поведение расхода $G(X)$ в окрестности точки разделения потоков $X=X_0$ обусловлено неадекватностью модели в области малых скоростей течения. Здесь квадратичный закон следовало бы заменить двучленным, правильно описывающим течение при малых скоростях.

Угловые коэффициенты асимптот можно найти из уравнения (3.2). В точке разделения потоков $\xi=\xi_0$ имеем $\chi=0$, поэтому в ее окрестности уравнение (3.2) эквивалентно уравнению Бернулли

$$(n+1) \xi \chi' = n\chi + \beta n (m+1)^{1/n} |\chi|^{1-1/n} \quad (5.2)$$

решение которого имеет вид

$$\chi(\xi) = \text{sgn}(\xi - \xi_0) |\beta|^n (m+1) |1 - (\xi/\xi_0)^{1/(n+1)}|^n \quad (5.3)$$

Поскольку $\xi = -X^{-(n+1)} R^{m+1}$, то из (5.3) получаем

$$\chi(X) = \text{sgn}(X - X_0) |\beta|^n (m+1) |1 - (R/R_0)^{m+1} X_0/X|^n \quad (5.4)$$

$$R_0 = R(X_0)$$

Из (5.4) и (3.5) находим выражения для расхода и углового коэффициента асимптоты $G'(X_0)$:

$$G(X) = \text{sgn}(X - X_0) |\beta|^n (m+1) R_0 |X - X_0| \quad (5.5)$$

$$G'(X_0) = |\beta|^n (m+1) R_0$$

Если воспользоваться данными табл. 2, то можно найти угловые коэффициенты (кривых 1 на фиг. 2, б и 4, б) в точках перегиба; они составляют, соответственно, 5, 6 и 1.

6. **Определение размеров трещины.** Высота трещины $2H$ и ее длина $2l$ выражаются через давление нагнетания $p_0(t)$, расход $q_0(t)$ и объем закачанной жидкости (объем трещины) $\Omega(t)$, которые могут быть измерены в процессе гидроразрыва. Это позволяет использовать найденные автомодельные решения для определения параметров трещины по данным натурных измерений. Используя соотношения (2.1), (2.3), (2.9)–(2.11), получаем

$$\begin{aligned} p_0 &= \sigma [1 + \alpha^{n/(m+1)} \Phi^0(\beta) L^\beta] \\ q_0 &= C_q (H^{m+n}/l_0) \alpha^{1+n/(m+1)} Q^0(\beta) L^{[\beta(m+n+1)-1]/n} \\ \Omega &= 4\pi C_\Omega H^2 l_0 \alpha^{n/(m+1)} \Omega^0(\beta) L^{\beta+1} \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$L = \frac{l}{l_0}, \quad C_\Omega = \frac{(1-\nu^2)\sigma}{E}, \quad C_q = 2^{m/n+2} \sqrt{\pi} \gamma (B_n \sigma C_\Omega^{m+n})^{1/n}$$

где параметры $\Phi^0(\beta)$, $Q^0(\beta)$ и $\Omega^0(\beta)$ определены в (2.17), (2.18) и (5.1). До проведения измерений они должны быть найдены из автомодельного решения, отвечающего фиксированному значению показателя степени β .

Преобразуем выражения (6.1) к виду

$$\alpha^{n/(m+1)} L^\beta = (p_0 - \sigma) / (\sigma \Phi^0(\beta)) = e_p \quad (6.2)$$

$$\left(\frac{H^{m+n}}{l_0} \right)^{1/n} \alpha^{n/(m+1)+1} L^{[\beta(m+n+1)-1]/n} = \frac{q_0}{C_q Q^0(\beta)} = e_q \quad (6.3)$$

$$H^2 l \alpha^{n/(m+1)} L^\beta = \Omega / (4\pi C_\Omega \Omega^0(\beta)) = e_\Omega \quad (6.4)$$

Подставляя (6.2) в (6.3) и (6.4), приходим к соотношениям

$$e_p^{(m+n+1)/n} H^{m/n+1} l^{-1/n} = e_q$$

$$H^2 l e_p = e_\Omega$$

из которых получаем расчетные формулы

$$H = e_p^{-1} (e_q^n e_\Omega)^{1/(m+n+2)} \quad (6.5)$$

$$l = e_\Omega (e_p H^2)^{-1} = e_p e_\Omega (e_q^n e_\Omega)^{-2/(m+n+2)} \quad (6.6)$$

Их вид явно не зависит от режима нагнетания, однако сами нормированные измеряемые величины e_p , e_q и e_Ω , в силу соотношений (6.2)–(6.4), зависят от параметра β . Расчеты по формулам (6.5), (6.6) можно проводить для всех режимов с ненулевым расходом ($\beta \neq -1$).

В заключение сформулируем основные выводы работы.

Дано обобщение модели вертикальной трещины гидроразрыва конечной высоты на случай степенного закона сопротивления при движении жидкости разрыва в трещине. При этом можно моделировать разрыв ньютоновской жидкостью, неньютоновской жидкостью со степенным реологическим соотношением и разрыв при турбулентном движении ньютоновской жидкости в трещине в соответствии с квадратичным законом сопротивления. Найдены точные решения задачи о гидравлическом разрыве пласта без учета фильтрационных утечек, отвечающие степенным и экспоненциальному изменению со временем давления нагнетания и расхода. При этом описываются режимы гидроразрыва при постоянном давлении, постоянном расходе, закрытии трещины после стадии закачки, излияе жидкости из трещины и другие. Предложен способ определения высоты и длины трещины по данным измерения давления нагнетания, расхода и объема закачанной жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОН. 1955. № 5. С. 3–41.
2. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 4. С. 475–486.
3. Perkins T. K., Kern L. R. Width of hydraulic fractures // J. Petrol. Technol. 1961. V. 13. N 9. P. 937–949.
4. Nordgren R. P. Propagation vertical hydraulic fracture // Soc. Petrol. Eng. J. 1972. V. 12. N 4. P. 306–314.
5. Заковский А. Ф., Одишария М. Г., Хараидзе Д. М. Распространение трещины гидроразрыва большой протяженности в непроницаемой горной породе // Математическое моделирование задач механики сплошной среды. М.: Энергоатомиздат, 1989. С. 24–30.
6. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 67–78.
7. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 6. С. 679–698.
8. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
9. Daneshy A. A. On the design of vertical hydraulic fractures // J. Petrol. Technol. 1973. V. 25. N 1. P. 83–97.
10. Settari A. Simulation of hydraulic fracturing processes // Soc. Petrol. Eng. Journal. 1980. V. 20. N 6. P. 487–500.
11. Cleary M. P. Comprehensive design formulae for hydraulic fracturing // SPE Paper No. 9259, 55th Annual Fall Technical Conf. and Exhibition, Dallas, 1980.
12. Nolte K. G., Smith M. B. Interpretation of fracturing pressures // J. Petrol. Technol. 1981. V. 33. N 9. P. 1767–1775.
13. Palmer I. D., Carrol H. B. Jr. Three-dimensional hydraulic fracture propagation in the presence of stress variations // Soc. Petrol. Eng. Journal. 1983. V. 23. N 6. P. 870–878.
14. Biot M. A., Massé L., Medlin W. L. A two-dimensional theory of fracture propagation // SPE Prod. Eng. 1986. V. 1. N 1. P. 17–30.
15. Meyer B. R. Design formulae for 2-D and 3-D vertical hydraulic fracture model comparison and parametric studies // SPE Paper No. 15240. SPE Unconventional Gas Technology Symposium, Louisville, KY, May 18–21, 1986.
16. Разрушение/Под ред. Г. Либовица. Т. 2. М.: Мир, 1975. 764 с.
17. Торок Дж. С., Адвани С. Х. Течение неньютоновской жидкости в пласте (приложение к гидроразрыву) // Энергетические машины и установки. 1988. № 1. С. 135–139.
18. Сейвинс Дж. Неньютоновское течение в пористой среде // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. 1974. № 2. С. 59–115.
19. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.III.1990