МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1992

УДК 539.3

© 1992 г. А. Б. МОВЧАН, С. А. НАЗАРОВ, О. Р. ПОЛЯКОВА

# ПРИРАЩЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ УДЛИНЕНИИ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНЫ

Получены формулы для производных коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) по длине трещины, которая развивается вдоль фиксированной гладкой кривой. Кроме самих КИН эти формулы содержат множители при младших членах асимптотики напряженно-деформированного состояния и симметрическую матрицу, составленную из коэффициентов в разложениях весовых функций. На основе критерия $K_2=0$ исследуется задача о слабом искривлении трещины в плоскости, содержащей малый дефект.

**1. Сингулярности решений и весовые функции.** Пусть $\Omega$ — область на плоскости $\mathbf{R}^2$ и $\Gamma$ — простая гладкая дуга, пересекающая $\Omega$ по непустому связному множеству $\Gamma_0$. В окрестности $\Gamma$ введем координаты $n$ и $s$, где $s$ — длина дуги, $|n|$ — расстояние до $\Gamma$ вдоль нормали $\mathbf{n}$. Пусть еще $M$ — отрезок дуги $\Gamma$ с концами $P_0$ и $P_1$, целиком лежащий в $\Omega$. Рассмотрим задачу о деформации области $\Omega_0=\Omega\setminus M$ под действием самоуравновешенной нагрузки $\mathbf{p}$, приложенной к контуру $\partial\Omega$. Соответствующие уравнения имеют вид

$$\mu\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x})+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{x})=0,\quad \mathbf{x}\in\Omega_0 \tag{1.1}$$

$$\sigma^{(n)}(\mathbf{u},\mathbf{x})=\mathbf{p}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\partial\Omega \tag{1.2}$$

$$\sigma^{(n)}(\mathbf{u},\mathbf{x})=0,\quad \mathbf{x}\in M \tag{1.3}$$

В (1.1)—(1.3) $\mathbf{u}$ — вектор смещений, $\sigma^{(n)}=\sigma\mathbf{n}$, $\sigma$ — тензор напряжений. Решение задачи (1.1)—(1.3) допускает асимптотическое представление

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{l}(\mathbf{x})+\sum_{j=1}^{2}\{K_j r^{1/2}[\Phi^{1j}(\theta)+kr\Upsilon^{1j}(\theta)]+ +K_j^3 r^{3/2}\Phi^{3j}(\theta)\}+O(r^{5/2}|\ln r|),\quad r\to 0 \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{l}(\mathbf{x})$ — линейная вектор-функция, $(r,\theta)$ — полярные координаты с центром в вершине $P_1$ и с полярной осью, направленной вдоль касательной к дуге $\Gamma$, $\theta\in(-\pi,\pi)$, $k$ — кривизна дуги в точке $P_1$. Из коэффициентов $K_j$ интенсивности напряжений (КИН) составим столбец $\mathbf{K}$, а из множителей $K_j^3$ при младших сингулярных членах — столбец $\mathbf{K}^3$. Угловые части в (1.4) имеют вид

$$\Phi^{11}(\theta)=(4\mu)^{-1}(2\pi)^{-1/2}([2\varkappa-1)\cos{}^1/_2\theta-\cos{}^3/_2\theta,\ -[2\varkappa+1]\sin{}^1/_2\theta+ +\sin{}^3/_2\theta),\ \Phi^{12}(\theta)=(4\mu)^{-1}(2\pi)^{-1/2}(-[2\varkappa-1]\sin{}^1/_2\theta+ +3\sin{}^3/_2\theta,\ -[2\varkappa+1]\cos{}^1/_2\theta+\cos{}^3/_2\theta)$$

$$\Phi^{31}(\theta)=(12\mu)^{-1}(2\pi)^{-1/2}([2\varkappa-3]\cos{}^1/_2\theta+\cos{}^5/_2\theta,\ [2\varkappa+3]\sin{}^1/_2\theta- -\sin{}^5/_2\theta),\ \Phi^{32}(\theta)=(12\mu)^{-1}(2\pi)^{-1/2}([2\varkappa-3]\sin{}^1/_2\theta+ +5\sin{}^5/_2\theta,\ -[2\varkappa+3]\cos{}^1/_2\theta+5\cos{}^5/_2\theta)$$

$$\Upsilon^{11}(\theta)=(48\mu)^{-1}(2\pi)^{-1/2}(-[2\varkappa-3]\sin{}^1/_2\theta-5\sin{}^5/_2\theta,\ [2\varkappa+3]\cos{}^1/_2\theta-$$
$$-5\cos{}^5/_2\theta),\ \Upsilon^{12}(\theta)=(48\mu)^{-1}(2\pi)^{-1/2}([2\varkappa-3]\cos{}^1/_2\theta-$$
$$-23\cos{}^5/_2\theta,\ [2\varkappa+3]\sin{}^1/_2\theta+23\sin{}^5/_2\theta) \qquad (1.5)$$

Здесь и далее указываются полярные компоненты векторов, $\varkappa=(3\mu+\lambda)(\mu+\lambda)^{-1}$. Введем еще решения $\zeta^j$ однородной задачи (1.1)–(1.3), подчиненные асимптотическим условиям

$$\zeta^j(x)=r^{-1/2}\Psi^{1j}(\theta)+o(1),\ r\to 0,\ j=1,\ 2 \qquad (1.6)$$

$$\Psi^{11}(\theta)=-(1+\varkappa)^{-1}(8\pi)^{-1/2}([2\varkappa+1]\cos{}^3/_2\theta-3\cos{}^1/_2\theta,\ -[2\varkappa-1]\sin{}^3/_2\theta+$$
$$+3\sin{}^1/_2\theta),\ \Psi^{12}(\theta)=-(1+\varkappa)^{-1}(8\pi)^{-1/2}(-[2\varkappa+1]\sin{}^3/_2\theta+$$
$$+\sin{}^1/_2\theta,\ -[2\varkappa-1]\cos{}^3/_2\theta+\cos{}^1/_2\theta)$$

Такие решения носят название весовых функций и входят [1–3] в интегральную формулу для КИН

$$K_j=\int\limits_{\partial\Omega}\mathbf{p}(\mathbf{x})\cdot\zeta^j(\mathbf{x})\,ds_x,\quad j=1,2 \qquad (1.7)$$

Разложения (1.6) можно уточнить

$$\zeta^j(\mathbf{x})=r^{-1/2}[\Psi^{1j}(\theta)+kr\Upsilon^{2j}(\theta)]+C_\Omega^{j1}r^{1/2}\Phi^{11}(\theta)+$$
$$+C_\Omega^{j2}r^{1/2}\Phi^{12}(\theta)+O(r^{3/2}|\ln r|) \qquad (1.8)$$

$$\Upsilon^{21}(\theta)=8(1+\varkappa)^{-1}(2\pi)^{-1/2}(3[2\varkappa-1]\sin^1/_2\theta-9\sin^3/_2\theta,\ 3[2\varkappa+1]\cos^1/_2\theta-$$
$$-9\cos^3/_2\theta),\ \Upsilon^{22}(\theta)=8(1+\varkappa)^{-1}(2\pi)^{-1/2}(3[2\varkappa-1]\cos^1/_2\theta-$$
$$-11\cos{}^3/_2\theta,\ -3[2\varkappa+1]\sin{}^1/_2\theta+11\sin{}^3/_2\theta)$$

Матрица $\mathbf{C}_\Omega$, составленная из коэффициентов $C_\Omega^{jk}$ зависит от области $\Omega_0$ в целом, и согласно (1.7) является симметрической (см. также [4]).

Поясним, как строятся младшие члены разложений (1.4) и (1.8). В случае прямолинейной трещины в представления $\mathbf{u}$ и $\zeta^j$ входят решения $r^{1/2}\Phi^1(\theta)$ и $r^{-1/2}\Psi(\theta)$ модельных задач о плоскости с разрезом $\Xi=\mathbf{R}^2\backslash\{(r,\theta):r\geqslant 0,\ \theta=\pi\}$. Эти решения оставляют невязки в краевых условиях на искривленной трещине. Заметим, что берега такой трещины задаются уравнениями $\theta^\pm=\pm\pi-{}^1/_2kr+O(r^2)$, а нормаль к берегам в полярных координатах имеет вид $(\pm kr+O(r^2),\ \pm 1+O(r^2))$. Раскладывая угловые части в ряды Тейлора по степеням $\theta$ в окрестности точек $\theta=\pm\pi$, получаем соотношения

$$\sigma^{(n)}(r^{1/2}\Phi^{1j}(\theta))\,|_{n=\pm 0}=r^{-1/2}(\sigma^{(n)}(\Phi^{1j}(\pm\pi))+\partial_\theta\sigma^{(n)}(\Phi^{1j}(\pm\pi))(\theta\mp\pi)+$$
$$+O((\theta\mp\pi)^2))\,|_{\theta=\pm\pi-{}^1/_2kr+O(r^2)}=\pm{}^1/_2kr\left\{\begin{pmatrix}\sigma_{rr}\\0\end{pmatrix}-\partial_\theta\begin{pmatrix}\sigma_{r\theta}\\\sigma_{\theta\theta}\end{pmatrix}\right\}(r^{1/2}\Phi^{1j}(\theta))\,|_{\theta=\pm\pi}+O(r^{1/2}) \qquad (1.9)$$

Здесь и далее используется обозначение $\partial_\theta=\partial/\partial\theta$. Решение $r^{3/2}\Upsilon^{1j}(\theta)$ компенсирует невязку (1.9). Оно удовлетворяет однородному уравнению Ламе и граничным условиям $\sigma_{\theta\theta}=0$, $\sigma_{r\theta}=3(8\pi)^{-1/2}K_2kr^{1/2}$ при $\theta=\pm\pi$. Поскольку решения $r^{3/2}\Upsilon^{1j}(\theta)$ находятся с точностью до линейной комбинации величин $r^{3/2}\Phi^{3j}(\theta)$ с произвольными коэффициентами, то за счет выбора угловых частей $\Upsilon^{1j}$ можно добиться выполнения таких требований на продолжении трещины:

$$\sigma_{nn}(\mathbf{u};\ \mathbf{x})\sim(2\pi r)^{-1/2}(K_1+rK_1{}^3),\qquad \sigma_{ns}(\mathbf{u};\ \mathbf{x})\sim(2\pi r)^{-1/2}(K_2+rK_2{}^3)$$

Аналогично определяется поправка $r^{1/2}\Upsilon^{2j}(\theta)$ в разложении (1.8).

**2. Приращение КИН при увеличении трещины.** Пусть $\Omega$ и $\Gamma$ — те же множества, что и в п. 1. Пусть еще $\Gamma_0\equiv\Omega\cap\Gamma=\{\mathbf{x}:n=0,\ s_-<s<s_+\}$ и $s_0=0$ — точка интервала $(s_-,\ s_+)$. Рассмотрим задачу о квазистатическом удлинении трещины $M(\tau)=\{\mathbf{x}:n=0,\ 0\leqslant s\leqslant S(\tau)\}$ под действием самоуравновешенной нагрузки $\mathbf{p}(\tau,\ x)$, приложенной к контуру $\partial\Omega$; здесь $\tau$ — параметр нагружения, $S(\tau)$ — длина трещины. Функцию $\tau\mapsto S(\tau)$ считаем извест-

ной и предполагаем, что она положительная и монотонно возрастающая.

Обозначим через $\mathbf{u}(\tau, \mathbf{x})$ и $\boldsymbol{\zeta}(\tau, \mathbf{x})$ названные в п. 1 решения задачи (1.1)—(1.3) для области $\Omega(\tau)=\Omega\setminus M(\tau)$. Разложения (1.4) и (1.8) этих, зависящих от параметра $\tau$, вектор-функций доставляют величины $K_j(\tau)$, $K_j^3(\tau)$ и $C_\Omega(\tau)$. Подчеркнем, что используются полярные координаты $(r_\tau, \theta_\tau)$, следящие за изменением положения «подвижной» вершины $P(\tau)$ трещины $M(\tau)$, а в соотношениях (1.4), (1.8) участвует кривизна $k(\tau)$ дуги Г в точке $P(\tau)$. Если нагрузка $\mathbf{p}$ и длина $S$ гладко зависят от параметра $\tau$, то $\tau\mapsto K_j(\tau)$ — также гладкие функции. Поэтому для расчета приращения КИН необходимо найти производные $K_j'(\tau)$.

Пусть в момент $\tau=0$ вершина $P(\tau)$ расположена в начале координат и ось $Ox_1$ направлена по касательной к Г. Задачу о трещине $M(\tau)$, где $\tau$ — малое положительное число, будем интерпретировать как сингулярно возмущенную задачу о трещине $M(0)$. Следуя [5, 4], вдали от вершины асимптотику решения задачи (1.1)—(1.3) ищем в виде

$$\mathbf{u}(\tau,\mathbf{x})\sim\mathbf{u}(0,\mathbf{x})+(S(\tau)-S(0))\,[a_1\boldsymbol{\zeta}^1(0,\mathbf{x})+a_2\boldsymbol{\zeta}^2(0,\mathbf{x})]+\tau\mathbf{v}^\circ(\mathbf{x}) \qquad (2.1)$$

где $\mathbf{v}^\circ(\mathbf{x})$ — решение задачи в области $\Omega$ при нагрузке $\partial_\tau\mathbf{p}(0,\mathbf{x})$ (соответствующий столбец КИН обозначим $K^\circ$).

Вблизи точки $P(0)$ возникает пограничный слой. Для описания этого явления введем «растянутые» координаты $y=\varepsilon^{-1}(x_1, x_2)$; $\varepsilon=S(\tau)-S(0)$ — малый параметр. В координатах $\mathbf{y}$ трещина определяется соотношениями

$$y_1\leqslant 1,\quad y_2={}^1/_2\varepsilon k(0)\,y_1^2+O(\varepsilon^2 y_1^3) \qquad (2.2)$$

Таким образом, после формального перехода к $\varepsilon=0$, получаем задачу об упругой плоскости с разрезом $\mathbf{M}=\{\mathbf{y}: y_1\leqslant 1,\ y_2=0\}$. Упомянутый пограничный слой будем искать в виде

$$\mathbf{u}(\tau,\mathbf{x})\sim\mathbf{w}^0(\mathbf{y})+\varepsilon^{1/2}\mathbf{w}^1(\mathbf{y})+\varepsilon\mathbf{w}^2(\mathbf{y})+\varepsilon^{3/2}\mathbf{w}^3(\mathbf{y}) \qquad (2.3)$$

Из условий сращивания асимптотических разложений (2.1) и (2.3), учитывая формулу (1.4) при $\tau=0$, находим, что $\mathbf{w}^0$ — постоянный вектор $\mathbf{l}(0, 0)$, а $\mathbf{w}^1$ — решение однородной задачи в $\mathbf{R}^2\setminus\mathbf{M}$, подчиненное условию на бесконечности

$$\mathbf{w}^1(\mathbf{y})=\rho_0^{1/2}[K_1(0)\,\boldsymbol{\Phi}^{11}(\theta_0)+K_2(0)\,\boldsymbol{\Phi}^{12}(\theta_0)]+o(\rho_0^{1/2}) \qquad (2.4)$$

Здесь $(\rho_0, \theta_0)$ — полярные координаты с центром в точке $y=0$, $\theta_0\in(-\pi, \pi)$, $\rho_0=\varepsilon^{-1}r_0$. Пусть $(\rho, \theta)$ — аналогичные координаты с центром в точке $\mathbf{y}=(1, 0)$. Тогда нужное решение задается равенством

$$\mathbf{w}^1(\mathbf{y})=\rho^{1/2}[K_1(0)\,\boldsymbol{\Phi}^{11}(\theta)+K_2(0)\,\boldsymbol{\Phi}^{12}(\theta)] \qquad (2.5)$$

Продолжая процедуру, находим, что $\mathbf{w}^2(\mathbf{y})=\mathbf{l}(0, y)-\mathbf{l}(0, 0)$.

Обратимся к вектору $\mathbf{w}^3$. Естественно, он удовлетворяет однородной системе Ламе в $\mathbf{R}^2\setminus\mathbf{M}$. При постановке краевых условий на берегах $\mathbf{M}_\pm$ разреза М необходимо учесть невязку, оставленную вектором (2.5) на $M_\pm(\tau)$. В координатах $\mathbf{y}$ трещина $M(\tau)$ «слабо искривлена». В силу (2.2) $\mathbf{n}_y^\pm=\pm((0, -1)+\varepsilon k y_1(1, 0))+O(\varepsilon^2 y_1^2)$, и значит, раскладывая функцию $w^{1}$ в ряд Тейлора по переменной $y_2$, получаем

$$\sigma_{12}(\mathbf{w}^3;\ y_1, \pm0)=k(0)\,y_1(\sigma_{11}(\mathbf{w}^1, y_1, \pm0)+$$
$$+{}^1/_2 y_1\sigma_{11}(\partial\mathbf{w}^1/\partial y_1, y_1, \pm0)),\quad \sigma_{22}(\mathbf{w}^3, y_1, \pm0)=0 \qquad (2.6)$$

Для того чтобы определить поведение $\mathbf{w}^3$ при $\rho_0\to\infty$, произведем сращивание разложений. Заметим, что

$$\mathbf{w}^1(\mathbf{y})=\rho_0^{1/2}\sum_{j=1}^{2}K_j(0)\,\{\boldsymbol{\Phi}^{1j}(\theta_0)+\alpha\rho_0^{-1}\boldsymbol{\Psi}^{1j}(\theta_0)\}+O(\rho_0^{-3/2}) \qquad (2.7)$$

Поэтому в формуле (2.1) $a_j=K_j(0)\alpha$, где $j=1$, 2 и $\alpha=(4\mu)^{-1}(1+\varkappa)$. В разложении (1.4) осталось учесть члены, содержащие $r_0^{3/2}$, а в разложении (1.8) — члены, содержащие $r_0^{1/2}$. Следовательно, искомые условия таковы:

$$\mathbf{w}^3(\mathbf{y})=\sum_{j=1}^{2}\{a_j\rho_0^{1/2}[k(0)\Upsilon^{2j}(\theta_0,0)+C_\Omega^{j1}\Phi^{11}(\theta_0)+C_\Omega^{j2}\Phi^{12}(\theta_0)]+$$
$$+K_j^\circ\rho_0^{1/2}\Phi^{1j}(\theta_0)+\rho_0^{3/2}[K_j(0)k(0)\Upsilon^{1j}(\theta_0,0)+K_j^3(0)\Phi^{3j}(\theta_0)]\}+o(\rho_0^{1/2}),\ \rho_0\to\infty \tag{2.8}$$

Соотношения (2.8) выделяют решение, растущее при $\rho_0\to\infty$ и обладающее бесконечной упругой энергией. Правая часть краевых условий (2.6) имеет порядок $\rho^{-3/2}$ при $\rho\to0$, что также приводит к появлению «неэнергетической» особенности $O(\rho^{-1/2})$ у поля $\mathbf{w}^3$. Отсюда вытекает необходимость дополнительных асимптотических условий в вершине $Q$ разреза $\mathbf{M}$. Сначала поясним причину возникновения особенности. В формуле (2.5) предполагалось, что точка $P(\tau)$ в «растянутых» координатах определялась равенством $\mathbf{y}=(1,0)$. На самом деле вершина $P(\tau)$ расположена в точке $O^\varepsilon=(1+O(\varepsilon^2),\ ^1/_2\varepsilon k(0)+O(\varepsilon^2))$ и разложение (2.5) следует писать, используя декартовы $\mathbf{y}^\varepsilon$ или полярные $(R_\varepsilon,\theta_\varepsilon)$ координаты с центром $Q^\varepsilon$. В главном переход от $\mathbf{y}^\circ=(y_1-1,y_2)$ к $\mathbf{y}^\varepsilon$ осуществляется посредством параллельного переноса на вектор $(0,\varepsilon d)$ и поворота на угол $\varepsilon\beta$, где $2d=\beta=k(0)$. Иными словами, в силу (2.2) с точностью $O(\varepsilon^2)$ справедливы формулы

$$y_1^\varepsilon\sim y_1^\circ+\varepsilon\beta y_2^\circ,\ y_2^\varepsilon\sim y_2^\circ-\varepsilon(\beta y_1^\circ+d) \tag{2.9}$$

Пусть $K_j(\varepsilon)$ гладкие функции и $\mathbf{X}^j(y^\varepsilon)$ — вектор $R_\varepsilon^{1/2}\Phi^{1j}(\theta_\varepsilon)$, записанный в декартовых координатах $\mathbf{y}^\varepsilon$. Разложим произведение $K_j(\varepsilon)X^j(\mathbf{y}_\varepsilon)$ в ряд Тейлора по переменной $\varepsilon$. Поскольку зависимость вектора $\mathbf{X}^j(\mathbf{y}^\varepsilon)$ от параметра $\varepsilon$ определяется как соотношениями (2.9), так и поворотом самого вектора $\mathbf{X}^j$ на угол $\beta$, имеем

$$K_j(\varepsilon)\mathbf{X}^j(\mathbf{y}^\varepsilon)\sim K_j(0)\mathbf{X}^j(\mathbf{y}^\circ)+\varepsilon\{K_j'(0)\mathbf{X}^j(\mathbf{y}^\circ)+K_j(0)\mathbf{Y}(\mathbf{y}^\circ)\} \tag{2.10}$$

В силу (2.9) вектор $\mathbf{Y}(\mathbf{y}^\circ)$ в декартовых координатах $\mathbf{y}^\circ$ с центром (1, 0) имеет вид

$$\mathbf{Y}=-d\partial_2\mathbf{X}^j+\beta\{y_2^\circ\partial_1\mathbf{X}^j-y_1^\circ\partial_2\mathbf{X}^j+(-X_2^j,\ X_1^j)\} \tag{2.11}$$

Первое слагаемое в правой части (2.11) обозначим $\rho^{-1/2}\mathbf{T}^{1j}(\theta)$. Можно проверить, что в полярных координатах $(\rho,\theta)$ выражение из фигурных скобок есть $\rho^{1/2}\mathbf{T}^{2j}(\theta)\equiv-\rho^{1/2}\partial_\theta\Phi^{1j}(\theta)$.

Таким образом, сравнивая (2.10) и (2.3), (2.5), заключаем, что в вершине разреза $\mathbf{M}$, полученного спрямлением исходной трещины, следует назначить такую асимптотику:

$$\mathbf{w}^3(\mathbf{y})=\sum_{j=1}^{2}\{k(0)K_j(0)[\rho^{-1/2}\mathbf{T}^{1j}(\theta)+\rho^{1/2}\mathbf{T}^{2j}(\theta)]+K_j'(0)\rho^{1/2}\Phi^{1j}(\theta)\}+o(\rho^{1/2}),\quad \rho\to0 \tag{2.12}$$

Результаты [6, 3], касающиеся общих эллиптических краевых задач в областях с коническими (угловыми) точками, показывают, что система Ламе $\mathbf{L}\mathbf{w}^3=0$ в $\mathbf{R}^2\setminus\mathbf{M}$ с краевыми условиями (2.6) и асимптотическим условием (2.8) имеет единственное решение с асимптотикой

$$\mathbf{w}^3(\mathbf{y})=\sum_{j=1}^{2}k(0)K_j(0)\rho^{-1/2}\mathbf{T}^{1j}(\theta)+o(1),\qquad \rho\to0 \tag{2.13}$$

Соотношение (2.12) содержит лишние по сравнению с (2.13) слагаемые порядка $\rho^{1/2}$, которые согласно (2.6) являются младшими членами асимптотики $\mathbf{w}^3$. Значит, множители $K_j'(0)$ в (2.12) находятся однозначно. Для их определения подставим вектор функции $\mathbf{w}^3$ и $\rho^{-1/2}\mathbf{\Psi}^{1l}(\theta)$, $l=1, 2$, в формулу Бетти для области $\{\mathbf{y}\in\mathbf{R}^2\backslash\mathbf{M}: |\mathbf{y}|<\delta^{-1}, (y_1-1)^2+y_2^2\geqslant\delta^2\}$ и перейдем к пределу при $\delta\to0$. Контурный интеграл состоит из двух окружностей $\mathbf{S}_\pm$ радиусов $\delta^{\pm1}$, а также из двух отрезков $\mathbf{M}_\delta^\pm$ на берегах разреза $\mathbf{M}$. При вычислении интеграла по $\mathbf{M}_\delta^\pm$ принимаем во внимание краевые условия (2.6). Интеграл по $\mathbf{S}_+$ находится с учетом асимптотики (2.12). Наконец, окружность имеет центр в точке $o$ — поэтому для вычисления соответствующего интеграла нужно перейти к полярным координатам $(\rho_0, \theta_0)$ при помощи соотношений (2.8) и

$$\rho^{-3/2}\mathbf{\Psi}^{1j}(\theta)=\rho_0^{-1/2}\mathbf{\Psi}^{1j}(\theta_0)-{}^1/_2\rho_0^{-3/2}\mathbf{\Psi}^{3j}(\theta_0)+O(\rho_0^{-5/2}),\ \rho_0\to\infty$$

$$\mathbf{\Psi}^{31}(\theta)=(1+\varkappa)^{-1}(8\pi)^{-1/2}(-[2\varkappa+3]\cos{}^5/_2\theta+5\cos{}^1/_2\theta,\ [2\varkappa-3]\sin{}^5/_2\theta+$$
$$+5\sin{}^1/_2\theta),\quad \mathbf{\Psi}^{32}(\theta)=(1+\varkappa)^{-1}(8\pi)^{-1/2}([2\varkappa+3]\sin{}^5/_2\theta-$$
$$-\sin{}^1/_2\theta,\ [2\varkappa-3]\cos{}^5/_2\theta+\cos{}^1/_2\theta)$$

В результате получаем равенство

$$\mathbf{K}'(0)=\mathbf{K}^\circ+(4\mu)^{-1}(1+\varkappa)\mathbf{C}_\Omega\mathbf{K}(0)+{}^1/_2\mathbf{K}^3(0) \qquad (2.14)$$

Формула (2.14), содержащая столбцы $\mathbf{K}(0)$, $\mathbf{K}^3(0)$ коэффициентов разложения (1.4) и матрицу $\mathbf{C}_\Omega$ из (1.8), по виду не отличается от своего скалярного аналога, полученного в [4] для случая прямолинейной трещины нормального отрыва. Как и в [7, 8, 4], равенство (2.14) помогает в изучении вопроса о локальной устойчивости роста трещины. Кроме того, оно оказывается полезным при тарировке КИН в зависимости от длины трещины: применение интерполяционных соотношений позволяет без потери точности снизить количество конкретных значений длин $s^j$, для которых необходимо численно решать задачу. Наконец, равенство (2.14) удобно использовать при исследовании искривления трещины на основе критерия $K_2=0$ (см. [9–14] и др.) – в следующем разделе это обстоятельство иллюстрируется на примере задачи о конечной трещине в плоскости, содержащей малый дефект. Подчеркнем, что формула (2.14) выведена для случая подрастания трещины с одной стороны (вторая вершина неподвижна или отсутствует у краевой трещины); в п. 3 указаны, в частности, несущественные изменения алгорифма, дающие возможность учесть взаимное влияние вершин.

**3. Искривление трещины в плоскости, содержащей включение.** Применим процедуру вычисления асимптотики КИН, изложенную в п. 2, к определению траектории квазистатически растущей трещины. Пусть трещина $M_\varepsilon(a)$ задается соотношениями $x_2=\varepsilon h(x_1)$, $|x_1|<a$, где $h$ — гладкая функция, $\varepsilon$, $a>0$. Упругая плоскость находится в условиях всестороннего растяжения интенсивности $p$ и содержит малый дефект, занимающий множество $\omega_\varepsilon=\{x: \varepsilon^{-1/2}(x_1-A_1, x_2-A_2)\in\omega\}$ и характеризующийся матрицей упругой поляризации $P$ (см. [15–17]). Выберем масштаб так, чтобы $|A|=1$, где $A=(A_1, A_2)$ — центр включения $\omega_\varepsilon$. Безразмерный параметр $\varepsilon$ будем считать малым и найдем два члена асимптотики (по степеням $\varepsilon$) КИН $K_j(\varepsilon, a)$ в вершине $(\pm a, \varepsilon h(\pm a))$.

Решение ищем как сумму $\mathbf{u}^0+\varepsilon\mathbf{u}^1+\ldots$, в которой $\mathbf{u}^0$ — решение [18] задачи о всестороннем растяжении однородной плоскости с прямолинейной трещиной

$$u_1^0(a, x)=(2\mu)^{-1}\{{}^1/_2\varkappa-1)\operatorname{Re}Z(a, z)-x_2\operatorname{Im}d_zZ(a, z)\}+p[2(\lambda+\mu)]^{-1}x_1$$
$$u_2^0(a, x)=(2\mu)^{-1}\{{}^1/_2(\varkappa+1)\operatorname{Im}Z(a, z)-x_2\operatorname{Re}d_zZ(a, z)\}+p[2(\lambda+\mu)]^{-1}x_2$$
$$Z(a, z)=p(z^2-a^2)^{1/2},\quad z=x_1+ix_2 \qquad (3.1)$$

Обозначая через $K_j(\pm a, 0)$, $K_j^3(\pm a, 0)$ коэффициенты в разложении вида (1.4) поля $u^0$, непосредственно из формул (3.1) получаем

$$K_1(\pm a, 0)=p(\pi a)^{1/2},\quad K_2(\pm a, 0)=0$$
$$K_1^3(\pm a, 0)=3(4a)^{-1}p(\pi a)^{1/2},\ K_2^3(\pm a, 0)=0 \qquad (3.2)$$

Для того чтобы определить $\mathbf{u}^1$, необходимо учесть как искривление трещины, так и наличие включения. Согласно [17, 5], система Ламе для $\mathbf{u}^1$ выглядит следующим образом:

$$-\mu\Delta\mathbf{u}^1(a,\mathbf{x})-(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}^1(a,\mathbf{x})=\mathbf{F}(a,\mathbf{x})\equiv\sum_{j,k=1}^{3}l_j(\mathbf{u}^\circ;A)P_{jk}\mathbf{V}^k(\partial_x)\delta(\mathbf{x}-d),$$
$$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\setminus M_0(a) \tag{3.3}$$

Здесь $\delta$ — функция Дирака, $l_j(\mathbf{u};\mathbf{x})=\mathbf{V}^j(\partial_x)\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{V}^1(x)=(x_1,0)$, $\mathbf{V}^2(x)=(0,x_2)$, $\mathbf{V}^3(x)=2^{-1/2}(x_2,x_1)$. Отметим, что в окрестности малого включения возникает явление пограничного слоя; оно описано в [16, 17]. Поскольку при вычислении КИН участвует лишь дальнее поле, порожденное дефектом $\omega_\varepsilon$, то сам пограничный слой не понадобится — вся необходимая информация о дефекте представлена в правой части системы (3.2).

Краевые условия, снесенные на берега трещины $M_0(a)$, получаются с помощью рассуждений, использованных при выводе формулы (2.6):

$$\sigma_{2j}(\mathbf{u}^1;x_1,\pm0)=h'(x_1)\sigma_{1j}(\mathbf{u}^0;x_1,\pm0)-h(x_1)\sigma_{2j}(\partial_2\mathbf{u}^0;x_1,\pm0),\ |x_1|<a \tag{3.4}$$

В силу (3.1) правая часть (3.4) равна нулю. Осталось выяснить поведение поля $\mathbf{u}^1$ вблизи вершины прямолинейного разреза. Применяя формулы (2.10), (2.11) и повторяя сопровождавшие их рассуждения, приходим к соотношению

$$\mathbf{u}^1(a,\mathbf{x})=\mp\alpha h(\pm a)K_1(\pm a,0)r_\pm^{-1/2}\boldsymbol{\Psi}^{12}(\theta_\pm)+\mathbf{l}^\pm+$$
$$+r_\pm^{1/2}\{(\partial_\varepsilon K_1)(\pm a,0)\boldsymbol{\Phi}^{11}(\theta_\pm)+[(\partial_\varepsilon K_2)(\pm a,0)-{}^1/_2h'(\pm a)K_1(\pm a,0)\pm$$
$$\pm{}^1/_2h(\pm a)K_1^3(\pm a,0)]\boldsymbol{\Phi}^{12}(\theta_\pm)\}+O(r_\pm|\ln r_\pm|),\ r_\pm\to0 \tag{3.5}$$

где $\mathbf{l}^\pm$ — (несущественный) постоянный вектор $(r_\pm,\theta_\pm)$ — полярные координаты с центром в точке $(\pm a,0)$.

Весовые функции $\boldsymbol{\zeta}^{2\pm}$, «обслуживающие» вершины трещины $(\pm a,0)$, вычисляются по формулам Вестергарда [18]:

$$\zeta_1^{2\pm}(a,\mathbf{x})=(2\mu)^{-1}\{{}^1/_2(\varkappa+1)\operatorname{Im}Z^\pm(a,z)+x_2\operatorname{Re}d_zZ^\pm(a,z)\}$$
$$\zeta_2^{2\pm}(a,\mathbf{x})=(2\mu)^{-1}\{-{}^1/_2(\varkappa-1)\operatorname{Re}Z^\pm(a,z)-x_2\operatorname{Im}d_zZ^\pm(a,z)\} \tag{3.6}$$

в которых полагаем $Z^\pm(a,z)=(-2\alpha)^{-1}(a\pi)^{-1/2}[(z\pm a)^{1/2}(z\mp a)^{-1/2}-1]$. Разложения (1.8) функций $\boldsymbol{\zeta}^{2\pm}$ конкретизируются следующим образом:

$$\boldsymbol{\zeta}^{2\pm}(a,x)=\pm r_\pm^{-1/2}\boldsymbol{\Psi}^{12}(\theta_\pm)\mp b_1\mathbf{e}^2\mp b_2r_\pm^{1/2}\boldsymbol{\Phi}^{12}(\theta_\pm)+O(r_\pm)$$
$$\boldsymbol{\zeta}^{2\pm}(a,x)=\mp b_1\mathbf{e}^2\pm2b_2r_\mp^{1/2}\boldsymbol{\Psi}^{12}(\theta_\mp)+O(r_\mp)$$
$$b_1=\mu(a\pi)^{-1/2}[2(\lambda+3\mu)]^{-1},\ b_2=(8a\alpha)^{-1},\ e^2=(0,1) \tag{3.7}$$

Далее понадобится еще одна асимптотическая формула

$$\boldsymbol{\zeta}^{2\pm}(a,x)=-\mu(a\pi)^{1/2}(\partial_2\mathbf{T}^1(x)+\partial_1\mathbf{T}^2(x))+O(a|x|^{-2}),\ |x|\to\infty \tag{3.8}$$

где $\mathbf{T}^j$ — столбцы двумерного тензора Сомильяны с особенностью в начале координат.

Введем поле перемещений

$$\mathbf{v}^1(a,x)=\mathbf{u}^1(a,x)+\alpha\sum_\pm h(\pm a)K_1(\pm a,0)\boldsymbol{\zeta}^{2\pm}(a,x) \tag{3.9}$$

Из представлений (3.5), (3.7) вытекает, что оно удовлетворяет тем же уравнениям, что и поле $\mathbf{u}^1$, но ограничено в окрестности вершин трещины. В силу [3] КИН $N_2^\pm(a)$ для решения $\mathbf{v}^1$ задачи (3.2), (3.9) определен равенством

$$N_2(a)=\int_{\mathbb{R}^2}\boldsymbol{\zeta}^{2\pm}(a,\mathbf{x})\cdot\mathbf{F}(a,\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

(сравни с (1.7)) или согласно (3.2) — равенством

$$N_2^{\pm}(a)=\sum_{j,k=1}^{3} P_{jk}l_j(\mathbf{u}^\circ;A)\int_{\mathbf{R}^2}\zeta^{2\pm}(a,\mathbf{x})\mathbf{V}^k(\partial_x)\delta(\mathbf{x}-A)d\mathbf{x}=$$

$$=-\sum_{j,k=1}^{3} P_{jk}l_j(\mathbf{u}^\circ;A)l_k(\mathbf{u}^\circ;A) \qquad (3.10)$$

Подставляя асимптотические разложения (3.5), (3.7) полей $\mathbf{u}^1$ и $\zeta^{2\pm}$ в формулу (3.9), получаем соотношения, связывающие КИН:

$$(\partial_\varepsilon K_2)(\pm a,0)={}^1/_2 h'(\pm a)K_1(\pm a,0)\mp{}^1/_2 h(\pm a)K_1^3(\pm a,0)+$$
$$+(8a)^{-1}\{h(\pm a)K_1(\pm a,0)+2h(\mp a)K_1(\mp a,0)\}+N_2^{\pm}(a) \qquad (3.11)$$

Заметим, что в отличие от (2.14) здесь учтено взаимное влияние вершин: в силу (3.7) каждое слагаемое из суммы в (3.9) вносит вклад в фигурную скобку (3.11).

Итак, завершено построение асимптотик

$$K_1(\pm a,\varepsilon)=(\pi a)^{1/2}p+O(\varepsilon),\ K_2(\pm a,\varepsilon)=\varepsilon(\partial_\varepsilon K_2)(\pm a,0)+O(\varepsilon^2) \quad (3.12)$$

На основе формул (3.11), (3.12) определим (приближенно) траекторию квазистатически растущей трещины. Сначала заметим, что $K_1(+a,\varepsilon)\approx\approx K_1(-a,\varepsilon)$, т. е. согласно критерию Париса [19] и благодаря малости дефекта трещина развивается в главном симметрично. Значит, допущение о проецировании трещины на отрезок $[-a,a]$ правомочно. Критерий $K_2==0$ [9] назначает условие $(\partial_\varepsilon K_2)(\pm a,0)=0$ при всех $a$. Положим $h_\pm(a)==h(\pm a)$ и воспользуемся формулой (3.11). С учетом равенств (3.2) и соотношения $h_\pm'(a)=\pm h'(\pm a)$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений на полупрямой $\mathbf{R}_+=\{a\in\mathbf{R}: a\geqslant 0\}$:

$$\begin{aligned} &h_+'(a)-(2a)^{-1}h_+(a)+(2a)^{-1}h_-(a)=-2(p^2a\pi)^{-1/2}N_2^+(a)\\ &h_-'(a)-(2a)^{-1}h_-(a)+(2a)^{-1}h_+(a)=2(p^2a\pi)^{-1/2}N_2^-(a)\end{aligned} \qquad (3.13)$$

Систему (3.13) снабдим начальными условиями

$$h_+(0)=h_-(0)=0,\ h_+'(0)=h_-'(0)=0 \qquad (3.14)$$

Второе из них подразумевает, в частности, гладкость дуги $M_\varepsilon(a)$. Кроме того, из (3.14) следует, что начало координат выбрано в точке зарождения трещины, а ось абсцисс направлена по касательной к ней.

Общее решение системы (3.13) определяется равенствами

$$\begin{aligned} &h_+(a)=c_1+I_1(a)+a(c_2+I_2(a))\\ &h_-(a)=c_1+I_1(a)-a(c_2+I_2(a))\end{aligned} \qquad (3.15)$$

в которых

$$I_1(a)=(-p^2\pi)^{-1/2}\int_0^a (N_2^+(t)-N_2^-(t))t^{-1/2}\,dt \qquad (3.16)$$

$$I_2(a)=(-p^2\pi)^{-1/2}\int_0^a (N_2^+(t)+N_2^-(t))t^{-3/2}\,dt$$

(Далее окажется, что интегралы (3.16) сходящиеся). Из (3.16) и первого условия (3.14) вытекает, что $c_1=0$. Согласно (3.10) $N_2^{\pm}(a)=ba^{1/2}+O(a^{3/2})$, $a\to 0$, где

$$b=-\mu\pi^{1/2}\sum_{j,k=1}^{3} l_j^\circ P_{jk} l_k(\partial_2\mathbf{T}^1+\partial_1\mathbf{T}^2, A) \tag{3.17}$$

$$l_1^\circ=l_2^\circ={}^1/_2 p(\lambda+\mu)^{-1},\quad l_3^\circ=0$$

Значит производные $h_\pm'$ ограничены в точке $a=0$ лишь в случае $b=0$. Это равенство, во-первых, дает сходимость интеграла $I_2$, а во-вторых, позволяет удовлетворить последнее соотношение в (3.14) за счет выбора постоянной $c_2$. Кроме того, требование $b=0$ определяет направление развития трещины из фиксированной точки $O$ (в наших обозначениях — выбор системы декартовых координат $\mathbf{x}$). Рассмотрим плоскость с дефектом $\omega_\varepsilon$ до появления трещины. Согласно [17] поле смещений с точностью $O(\varepsilon^{3/2})$ совпадает в окрестности точки $O$ с полем

$$\mathbf{U}^\varepsilon(\mathbf{x})={}^1/_2 p(\lambda+\mu)^{-1}x+\varepsilon\sum_{j,k=1}^{3} l_j^\circ P_{jk}(V_1^k(\partial_x)\mathbf{T}^1(x-A)+V_2^k(\partial_x)\mathbf{T}^2(x-A))$$

(сравни с (3.2)). Значит, равенство $b=0$ эквивалентно обращению в нуль касательного напряжения $\sigma_{12}(\mathbf{U}^\varepsilon;\ 0)$, т. е. оси системы координат нужно направить вдоль главных осей тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}^\varepsilon;\ 0)$. Заметим, что точно такой же результат (см., например, [15]) дает применение критерия максимального высвобождения энергии.

Векторы $\mathbf{u}^\circ$ и $\boldsymbol{\zeta}^{2\pm}$, фигурирующие в (3.10), зависят от параметра $a$, являясь решением задач о трещине длины $2a$:

$$\mathbf{u}^\circ(a, \mathbf{x})=a\mathbf{u}^\circ(1, a^{-1}\mathbf{x}),\qquad \boldsymbol{\zeta}^{2\pm}(a, \mathbf{x})=a^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}^{2\pm}(1, a^{-1}\mathbf{x}) \tag{3.18}$$

Эта зависимость проявляется в подынтегральных выражениях из (3.16); упростим интегралы $I_j(a)$. Следующие равенства проверяются непосредственно (сравни с (2.11)):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\zeta}^{2+}(1, \eta)-\boldsymbol{\zeta}^{2-}(1, \eta)&=(\alpha p)^{-1}\pi^{-1/2}\partial_\varphi\mathbf{u}^\circ(1, \eta)\\ \boldsymbol{\zeta}^{2+}(1, \eta)+\boldsymbol{\zeta}^{2-}(1, \eta)&=(\alpha p)^{-1}\pi^{-1/2}\partial_2\mathbf{u}^\circ(1, \eta)\end{aligned} \tag{3.19}$$

Здесь $\partial_2=\partial/\partial\eta_2$, $(\rho, \varphi)$ — полярные координаты с центром в середине трещины. Подставим (3.10) в (3.16) и воспользуемся представлениями (3.18), где $a=t$. Применим формулы (3.19) для интегралов $I_1(a)$ и $I_2(a)$ соответственно. После замены $t\mapsto s=t^{-1}$ переменной интегрирования находим, что

$$-2\alpha\pi p^2 I_1(a)=2\int_{1/a}^{\infty}\sum_{j,k=1}^{3} l_j(\mathbf{u}^\circ;\ sA)P_{jk}l_k(\partial_\varphi\mathbf{u}^\circ;\ sA)\,ds=\partial_\varphi\int_{1/a}^{\infty} w(s;\ \varphi_0)\,ds$$

$$-2\alpha\pi p^2 I_2(a)=2\int_{1/a}^{\infty} s\sum_{j,k=1}^{3} l_j(\mathbf{u}^\circ, sA)P_{jk}l_k(\partial_2\mathbf{u}^\circ;\ sA)\,ds=$$

$$=\cos\varphi_0\partial_\varphi\int_{1/a}^{\infty} w(s, \varphi)\,ds+\sin\varphi_0\int_{1/a}^{\infty} s\partial_s w(s, \varphi_0)\,ds$$

$$w(\rho, \varphi)=p^{-2}\sum_{j,k=1}^{3} l_j(\mathbf{u}^\circ;\ \eta)P_{jk}l_k'(\mathbf{u}^\circ;\ \eta)\,|_{\eta=(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)} \tag{3.20}$$

Заметим, что в силу (3.1) функция (3.20) обладает асимптотикой $w^{(0)}+2w^{(2)}(\varphi)\rho^{-2}+O(\rho^{-3})$ при $\rho\to\infty$, где

$$w^{(0)}=p^{-2}\sum_{j,k=1}^{3} l_j^\circ P_{jk}l_k^\circ,\qquad w^{(2)}(\varphi)=p^{-1}\sum_{j,k=1}^{3} l_j^\circ P_{jk}l_k(b_1\partial_1\mathbf{T}^1+b_2\partial_2\mathbf{T}^2;\ A)$$

$$b_1=(\lambda+2\mu)b_0,\quad b_2=\lambda b_0,\quad b_0=-\pi a^2 p(2\mu+\lambda)(2\mu+3\lambda)(\lambda+\mu)^{-2}$$

Положим

$$W(\rho,\varphi)=\int\limits_{\rho}^{\infty}(w(s,\varphi)-w^{(0)})\,ds=-2w^{(2)}(\varphi)\rho^{-1}+O(\rho^{-2})$$

Используя принятые обозначения, получаем, что в (3.15)

$$I_1(a)=-(2\alpha\pi)^{-1}\partial_\varphi W(a^{-1}\varphi_0),\quad I_2(a)=-(2\alpha\pi)^{-1}\{\cos\varphi_0\partial_\varphi W(a^{-1},\varphi_0)-$$
$$-\sin\varphi_0 W(a^{-1},\varphi_0)-a^{-1}\sin\varphi_0(w(a^{-1},\varphi_0)-w^{(0)})\},\quad c_2=(\alpha\pi)^{-1}\partial_\varphi w^{(2)}(\varphi_0) \tag{3.21}$$

Подчеркнем, что всюду $\varphi_0$ – угол, под которым виден дефект $\omega_\varepsilon$ из середины трещины. Величина $\varphi_0$ определяется из уравнения

$$(P_{11}+P_{22})(\varkappa-1-4\cos 2\varphi_0)\sin 2\varphi_0+P_{12}(\varkappa-1)\sin 2\varphi_0+$$
$$+2^{1/2}(P_{13}+P_{23})(2\sin^2 2\varphi_0-1)=0$$

Если оказывается, что угол $\varphi_0$ мал или близок к $\pi$, то при развитии трещина проходит около включения и полученные формулы сохраняют асимптотический характер лишь в случае $1-a\gg\varepsilon$. При условиях $\varphi\gg\varepsilon$ и $\pi-\varphi\gg\varepsilon$ развитие трещины можно рассматривать вплоть до полного разрушения плоскости, а на бесконечности кривая $M_\varepsilon(a)$ асимптотически приближается к прямой, определяемой из (3.15), (3.21).

Пусть плоскость находится в условиях двуосного нагружения и $\sigma_{kk}(\mathbf{u}^\varepsilon;\,\mathbf{x})\sim p_k$, $\sigma_{12}(\mathbf{u}^\varepsilon;\,\mathbf{x})\sim 0$ при $|\mathbf{x}|\to\infty$. Тогда краевое условие (3.4) перестает быть однородным, а левая часть системы (3.13) приобретает дополнительные интегральные члены

$$\mp 2(\pi a)^{-1}(p_1p_2^{-1}-1)\int\limits_{c}^{a}\left\{\left(\frac{a\pm t}{a\mp t}\right)^{1/2}h_+'(t)-\left(\frac{a\mp t}{a\pm t}\right)^{1/2}h_-'(t)\right\}dt$$

В [13–17] аналогичные уравнения, описывающие траекторию квазистатически растущей и слабоискривляющейся трещины, выводились с использованием других подходов к асимптотическому анализу задачи. В отличие от известных уравнений система (3.12), (3.13) позволяет учесть влияние формы и упругих свойств включения на геометрию трещины. Матрица упругой поляризации $P$ доставляет всю необходимую информацию о дефекте.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Bueckner H. F.* A novel principle for computation of stress intensity factor // Z. angew. Math. Mech. 1970. V. 50. P. 529–546.
2. *Rice J. R.* Some remarks on elastic crack-tip stress fields // Int. J, Solids Structures. 1972. V. 8. N 5. P. 751–758.
3. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
4. *Назаров С. А.* Локальная устойчивость и неустойчивость трещин нормального отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 124–129.
5. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1981. 208 с.
6. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московск. матем. общества. 1967. Т. 16. С. 209–292.
7. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука. 1974. 416 С.
8. *Nemat-Nasser S., Sumi Y., Keer L. M.* Unstable growth of tension cracks in brittle solids: stable and unstable bifurcations, shapthrough and imperfection sensitivity // Int. J. Solids Structures. 1980. V. 16. N 11. P. 1017–1035.
9. *Erdogan F., Sih G. C.* On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear // J. of Basic Eng. 1963. V. 85. N 4. P. 519–525.
10. *Баничук Н. В.* Определение формы криволинейной трещины методом малого параметра // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 2. С. 130–137.
11. *Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л.* Плоская задача о криволинейных трещинах в упругом теле // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 3. С. 69–82.

12. *Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л.* Хрупкое разрушение тел с произвольными трещинами. В кн.: Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука. 1975. С. 156–171.
13. *Cotterell B., Rice J. R.* Slightly curved or kinked cracks // Int. J. Fracture. 1980. V. 16. N 2. P. 155–169.
14. *Solveig Melin.* Why do cracks avoid each other? Report LUTFD2/(TFHF-3014)/1–48. Department of Solid Mech. Lund. Sweden. 1982.
15. *Зорин И. С., Мовчан А. Б., Назаров С. А.* Об использовании тензора упругой поляризации в задачах механики трещин // Механика твердого тела. 1988. № 6. С. 128–134.
16. *Бабич В. М., Зорин И. С., Иванов М. И., Мовчан А. Б., Назаров С. А.* Интегральные характеристики в задачах теории упругости: Препринт Р-6-89. Ленинград: Матем. ин-т АН СССР, 1989. 62 с.
17. *Зорин И. С., Мовчан А. Б., Назаров С. А.* О применении тензоров упругой емкости, поляризации и присоединенной деформации // Исследования по упругости и пластичности. Вып. 16. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. С. 75–91.
18. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука. 1976. 576 с.
19. *Ирвин Д., Парис П.* Основы теории роста трещин и разрушения. В сб. Разрушение. Т. 3. М.: Мир, 1976. С. 17–66.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
17.X.1990