

УДК 539.374

© 1992 г. М. Я. БРОВМАН

О ЛИНИЯХ ТОКА ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В [1] рассмотрены условия, при которых кривые могут быть линиями тока при плоской пластической деформации. В данной работе рассмотрен вопрос о проверке допущения о том, что кривые данного семейства являются линиями тока жесткопластической среды при объемной деформации в условиях осевой симметрии.

Пусть в некоторой области выбраны три семейства ортогональных криволинейных координат, описываемых дифференцируемыми функциями $\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$; $\gamma(x, y, z)$, и линиями тока являются кривые $\beta(x, y, z)$. При осевой симметрии, когда напряжения и деформации не зависят от координаты z , из условия несжимаемости следует:

$$v_\alpha = f_0(\beta) (H_2 H_3)^{-1} \quad (1)$$

где H_1, H_2, H_3 — коэффициенты первой квадратичной формы, $f_0(\beta)$ — произвольная дифференцируемая функция. Если осью симметрии является ось y , то достаточно задать линии тока в меридиональной плоскости $\gamma=0$ в координатах x, y . Пусть γ — угол поворота вокруг оси y , тогда три объемные координаты x', y', z' связаны с координатами в плоскости: x, y соотношениями $x' = x \cos \gamma$, $y' = y$, $z' = x \sin \gamma$, а коэффициенты первой квадратичной формы

$$H_1 = [(\partial x / \partial \alpha)^2 + (\partial y / \partial \alpha)^2]^{1/2}, H_2 = [(\partial x / \partial \beta)^2 + (\partial y / \partial \beta)^2]^{1/2}, H_3 = x$$

Определив по известным формулам [1, 2] компоненты тензора скорости деформации, находим компоненты дивергатора напряжений при $v_\beta = v_\gamma = 0$:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= k[f(\beta) - F_1] \{ [f(\beta) - F_1]^2 + F_2^2 \}^{-1/2}, \tau_{\alpha\gamma} = \tau_{\beta\gamma} = 0 \\ \sigma_\alpha - \sigma_\beta &= -2k(H_1)^{-1} H_2 (2a + b) \{ [f(\beta) - F_1]^2 + F_2^2 \}^{-1/2} \\ \sigma_\beta - \sigma_\gamma &= 2k(H_1)^{-1} H_2 (a - b) \{ [f(\beta) - F_1]^2 + F_2^2 \}^{-1/2} \\ \sigma_\gamma - \sigma_\alpha &= 2k(H_1)^{-1} H_2 (a + 2b) \{ [f(\beta) - F_1]^2 + F_2^2 \}^{-1/2} \\ a &= \partial \ln H_2 / \partial \alpha, b = \partial \ln H_3 / \partial \alpha, F_1 = \partial \ln (H_1 H_2 H_3) / \partial \beta \\ F_2 &= 2(H_1)^{-1} H_2 (a^2 + ab + b^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (2)$$

где k — предел текучести при сдвиге; $\tau_{\alpha\beta}, \tau_{\alpha\gamma}, \tau_{\beta\gamma}, \sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma$ — компоненты напряжений в координатах α, β, γ ; $f(\beta)$ — функция β , равная $f(\beta) = d[\ln f_0(\beta_0)] / \partial \beta$.

Подставляя $\tau_{\alpha\beta}, (\sigma_\alpha - \sigma_\beta), (\sigma_\beta - \sigma_\gamma), (\sigma_\gamma - \sigma_\alpha)$ в уравнения равновесия, получаем после их дифференцирования уравнение второго порядка для функции $f(\beta)$:

$$\begin{aligned} d^2 f(\beta) / d\beta^2 + \Phi_1 [df(\beta) / d\beta]^2 + \Phi_2 df(\beta) / d\beta + \Phi_3 &= 0 \\ \Phi_1 &= -3[f(\beta) - F_1] \{ [f(\beta) - F_1]^2 + F_2^2 \}^{-1} \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты Φ_2, Φ_3 также являются алгебраическими функциями $f(\beta)$, величин H_1, H_2, H_3 и их производных. По форме (3) совпадает с уравнением, приведенным в [1], однако функции F_1 и F_2 здесь другие.

В некоторых случаях (3) удобно использовать для проверки возможных точных решений.

Если Φ_1, Φ_2, Φ_3 не зависят от α , то (3) можно решать как обычное дифференциальное уравнение, при этом если $\Phi_3=0$, имеется хотя бы одно решение: $f(\beta)=0$.

Если $\partial\Phi_1/\partial\alpha=0$, а $\partial\Phi_2/\partial\alpha \neq 0$, $\partial\Phi_3/\partial\alpha \neq 0$, после дифференцирования (3) получим

$$df(\beta)/d\beta = -\partial\Phi_3/\partial\alpha (\partial\Phi_2/\partial\alpha)^{-1} \quad (4)$$

Если же и $\partial\Phi_1/\partial\alpha \neq 0$, то после двукратного дифференцирования получим из (3):

$$df(\beta)/d\beta = -\partial[\partial\Phi_3/\partial\alpha (\partial\Phi_1/\partial\alpha)^{-1}]/\partial\alpha \{ \partial[\partial\Phi_2/\partial\alpha (\partial\Phi_1/\partial\alpha)^{-1}]/\partial\alpha \}^{-1} \quad (5)$$

В (4) и (5) правые части уравнений должны быть функциями только β . Рассмотрим с учетом (2) случай, когда $\tau_{\alpha\beta}=0$:

$$f(\beta) = F_1, \quad \partial F_1/\partial\alpha = \partial^2[\ln(H_1 H_2 H_3)]/\partial\alpha \partial\beta = 0 \quad (6)$$

Это возможно, если выражение $(H_1 H_2 H_3)$ представимо в виде произведения функций α и β .

При плоской деформации условие, аналогичное (6), является достаточным, но при осесимметричной деформации необходимо также, чтобы дополнительно было выполнено условие

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha \partial\beta} \left(\frac{2a+b}{D^{1/2}} \right) + \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{2a+b}{D^{1/2}} \right) \frac{\partial \ln H_1}{\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{a-b}{D^{1/2}} \right) \frac{\partial \ln H_3}{\partial\beta} = 0$$

$$D^2 = a^2 + b^2 + ab \quad (7)$$

Если ортогональные кривые α, β являются линиями, на которых $\tau_{\alpha\beta} = \pm k$ (но не обязательно линиями тока), то из уравнений равновесия следует, что

$$\partial[H_1(H_2)^{-1} \partial(\ln H_1^2 H_3)/\partial\beta]/\partial\beta = \partial[(H_1)^{-1} H_2(2a+b)]/\partial\alpha \quad (8)$$

а если эти линии совпадают и с линиями тока, то дополнительно $a=b=0$ и обе части (8) равны нулю.

Рассмотрим примеры использования уравнения (3).

1. В плоскости α, β приняты декартовы координаты $x=\alpha, y=\beta, H_1=H_2=1, H_3=\alpha, F_1=0, F_2=2, a=0, b=1$. Получаем известное [2] решение о деформации цилиндрической трубы при $f(\beta)=0, v_\alpha=c_0\alpha^{-1}$, где c_0 — постоянная.

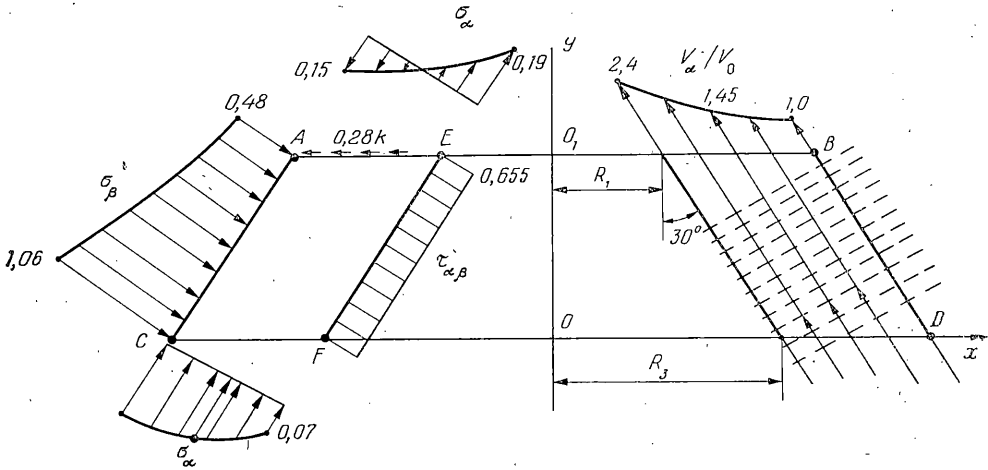
2. Если линии тока прямые, проходящие через начало координат, то $x=\alpha \cos \beta, y=\alpha \sin \beta, H_1=1, H_2=\alpha, H_3=\alpha \cos \beta, F_1=\text{tg } \beta$ и получаем известное [2] решение, при котором $\tau_{\alpha\beta}$ является функцией только переменной β . Поскольку уравнение (6) и (7) выполнены, существует также известное [2] частное решение при $\tau_{\alpha\beta}=0, v_\alpha=c_0\alpha^{-2}$.

3. Если линиями тока являются окружности с центрами в начале координат, то $H_1=\beta, H_2=1, H_3=\beta \cos \alpha, F_1=2\beta^{-1}, F_2=2\beta^{-1} \text{tg } \alpha$. Уравнение (3) выполнено при $f(\beta)=2\beta^{-1}$ и при этом также выполнены уравнения (6), (7), что при $\tau_{\alpha\beta}=0, v_\alpha=c_0\beta(\cos \alpha)^{-1}$ определяет известное [3] частное решение.

4. Линии тока — параллельные прямые, наклонные к осям координат. При этом (в полуплоскости $x \geq 0$), $\alpha=y-cx, \beta=y+x/c, x=c(\beta-\alpha)/c^2+1, y=\alpha+c^2\beta/c^2+1$ (c — постоянная)

$$H_1=(c^2+1)^{-1/2}, H_2=c(c^2+1)^{-1/2}, a=0, b=-(\beta-\alpha)^{-1}, F_1=(\beta-\alpha)^{-1},$$

$$F_2=2c(\beta-\alpha)^{-1}.$$



Фиг. 1

В правой части фиг. 1 показаны линии $\beta = \text{const}$ (сплошные) и $\alpha = \text{const}$ (штриховые). Такая деформация близка к той, которая реализуется при редуцировании труб с изменением диаметра без изменения толщины. Деформация происходит на оправке, а по наружной поверхности $BD(AC)$ в процессе прессования (или волочения) за счет течения жидкости (или сыпучей среды) создается трение, совпадающее по направлению со скоростью деформируемого материала. Наиболее простое решение $f(\beta) = 0$ имеет место при $c = 1/\sqrt{3}$, т. е. когда угол оправки равен 60° . Это решение

$$v_\alpha = c_0(\beta - \alpha)^{-1}, \tau_{\alpha\beta} = 0,661k, \sigma_\alpha = C - 0,37k \ln(\beta - \alpha) \quad (9)$$

$$\sigma_\beta = C - 0,75k - 0,37k \ln(\beta - \alpha), \sigma_\tau = C - 1,5k - 0,37k \ln(\beta - \alpha)$$

где c_0, C — постоянные, определяемые граничными условиями.

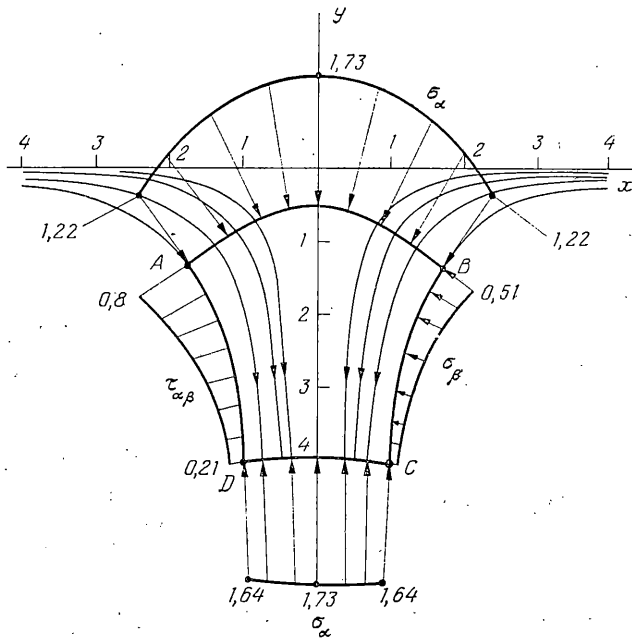
На фиг. 1 показаны эпюры напряжений (в долях величины k) $\tau_{\alpha\beta}, \sigma_\alpha$ — на поверхностях AE, EF и CF ($y = \text{const}$), σ_β — на поверхности AC ($\beta = \text{const}$). Постоянная C в решении (9) определена из условия равенства нулю суммарного усилия (вдоль оси y) в сечении AO_1B с внутренним радиусом R_1 и наружным $R_2 = 2,4R_1$. Поскольку $\beta - \alpha = 2,31x$, то

$$C = 0,74k(R_2^2 - R_1^2)^{-1} \int_{R_1}^{R_2} x \ln(2,31x) dx = \\ = k[0,13 - 0,37(R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1)(R_2^2 - R_1^2)^{-1}]$$

Суммарная величина усилия, направленного вдоль оси y в сечении COD , ограниченном окружностями радиуса R_3 и R_4 :

$$P = \pi \sqrt{3} \int_{R_3}^{R_4} \sigma_\alpha x dx = 0,5\pi k (R_4^2 - R_3^2) \times \\ \times [C - 0,13 - 0,37(R_4^2 \ln R_4 - R_3^2 \ln R_3)(R_4^2 - R_3^2)^{-1}]$$

Эпюры напряжений на фиг. 1 построены при $R_2 = 2,4R_1; R_4 = 1,7; R_3 = 3,4R_1$. В правой части фиг. 1 приведены эпюры скоростей v_α/v_0 в сечении AO_1B (здесь v_0 — скорость в точке B):



Фиг. 2

Отметим, что для тонкостенных труб с начальным радиусом x_0 и конечным x_1 , если суммарное усилие равно нулю при $x=x_0 > x_1$, то $C = 0,37k \ln(2,31x_0)$, а при $x=x_1$, $\sigma_\alpha = 0,37k \ln(x_0/x_1)$. Суммарное усилие волокна $P = 2kx_1 \delta \ln(x_0/x_1)$, где δ — толщина трубы.

5. Линия тока — гиперболы, определяемые координатами $\alpha = y^2 - 0,5x^2$, $\beta = x^2y$, $H_1 = (x^2 + 4y^2)^{-1/2}$, $H_2 = x^{-1}(x^2 + 4y^2)^{-1/2}$, $F_1 = -6(2\alpha y + \beta)(4\alpha y + 3\beta)^{-2}$, $a = (2x^2 - 4y^2)(x^2 + 4y^2)^{-2}$, $b = (x^2 + 4y^2)^{-1}$. При $f(\beta) = 0$, $\Phi_3 = 0$ и поэтому $f(\beta) = 0$ удовлетворяет уравнению (3) и определяет решение $v_\alpha = c_0(4\alpha + 3\beta/y)^{1/2}$, где c_0 — постоянная

$$\tau_{\alpha\beta} = k\sqrt{3}[6\beta(2\alpha y + \beta)]^{1/2}(3\beta + 4\alpha y)^{-1}$$

$$\sigma_\alpha = k\sqrt{3}(4\alpha y - 2\beta)(4\alpha y + 3\beta)^{-1}, \sigma_\beta = k\sqrt{3}\beta(4\alpha y + 3\beta)^{-1}, \sigma_\tau = 0$$

Здесь функция $y(\alpha, \beta)$ определена уравнением $y^2 - \alpha y - 0,5\beta = 0$ согласно обычным алгебраическим формулам.

На фиг. 2 показан пример, полученный численным расчетом для области ABCD, ограниченной линией BC, где $\beta = -4$ (поверхность инструмента образована вращением BC вокруг оси y) и линиями AB ($\alpha = 0,25$) и CD ($\alpha = 16$). На AB и CD показаны эпюры σ_α (в долях величины k), на BC — эпюра σ_β и на AD — эпюра $\tau_{\alpha\beta}$. Тонкими линиями показаны линии тока $\beta = \text{const}$. В некоторых случаях определение решения в криволинейных координатах может оказаться удобным для непосредственного определения контактных напряжений на границах рассматриваемой области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бровман М. Я. О линиях тока при плоской пластической деформации // Известия АН СССР. МГТ. 1989. № 2. С. 185—187.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
3. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.

Краматорск

Поступила в редакцию
23.X.1989