МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1992

УДК 539.3

© 1992 г. Ю. А. РОССИХИН

ВОЛНЫ РЭЛЕЯ ТИПА «РАСХОДЯЩЕГОСЯ КРУГА» В УПРУГИХ СЛАБО АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Изучено распространение нестационарных поверхностных волн типа «расходящегося круга» вдоль свободной от напряжений плоскости, ограничивающей упругое анизотропное полупространство. Модули упругости полупространства мало отличаются от упругих коэффициентов некоторого изотропного материала [1].

Поверхностная волна представляется в виде линии пересечения трех комплексных объемных конических волн, на каждой из которых терпят разрывы характеристики напряженно-деформированного состояния среды. Подобная интерпретация поверхностной волны является непосредственным обобщением тех представлений, которыми пользовался С. Л. Соболев для изучения поведения волн Рэлея в изотропной упругой среде [2]. Выражения для скачков скоростей перемещений находятся при помощи метода возмущений, а в качестве малого параметра используется величина, характеризующая отклонение анизотропных коэффициентов жесткости от изотропных [3].

Показано, что в плоскости распространения волн Рэлея существуют особые направления, при подходе к которым волновые характеристики стремятся к бесконечности. В окрестностях особых направлений прямые разложения для скачков скоростей перемещений становятся непригодными; при построении равномерно пригодного разложения применяется метод растянутых параметров [4, 5]. Другим источником неравномерности является бесконечный временной интервал. Для регуляризации решения при больших значениях времени используются методы, разработанные в [6].

1. Постановка задачи. Определяющие соотношения. Предположим, что поверхностная волна L распространяется вдоль ненапряженной плоскости $x_3=0$, ограничивающей упругое анизотропное полупространство $x_3>0$, и представляет собой линию пересечения трех объемных комплексных конических волн S_n ($n=1, 2, 3$), на которых терпят разрыв компоненты тензоров напряжений и деформаций. Нормальные скорости распространения линии, квазипоперечных и квазипродольной волн равны соответственно g, $G_{(n)}$.

Динамическое поведение анизотропного упругого полупространства со свободной от напряжений границей описывается следующей системой уравнений и граничных условий:

$$\sigma_{ij}=\lambda_{ijkl}u_{k,\,l}, \qquad \sigma_{ij,\,j}=\rho v_i^{\bullet} \tag{1.1}$$

$$\lambda_{3jkl}u_{k,\,l}=0 \qquad (x_3=0) \tag{1.2}$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, λ_{ijkl} — тензор модулей упругости, u_i и v_i — компоненты векторов перемещений и скоростей перемещений, ρ — плотность. Точки означают производные по времени t, индекс после запятой — производную по соответствующей координате (латинские индексы принимают значения 1—3, греческие — 1, 2).

Используя динамическое, кинематические и геометрические условия совместности первого порядка [7]:

$$[\sigma_{ij}]\nu_j=-\rho G[u_i^{\bullet}], \; [u_i^{\bullet}]=-G\lambda_i, \; [u_{k,\,l}]=\lambda_k\nu_l$$

$$[v_i^{\bullet}]=-GL_i+d[v_i]/dt, \; [v_{i,\,j}]=L_i\nu_j+g^{\alpha\beta}[v_i]_{,\alpha}x_{j,\,\beta}$$

из уравнений (1.1), (1.2) находим

$$(\lambda_{ijkl}\nu_{j(n)}\nu_{l(n)}-\rho G_{(n)}^{2}\delta_{ik})\lambda_{k(n)}=0 \qquad (1.3)$$

$$(\lambda_{ijkl}\nu_{j(n)}\nu_{l(n)}-\rho G_{(n)}\delta_{ik})L_{k(n)}=\Omega_{i(n)} \qquad (1.4)$$

$$\Omega_{i(n)}(\lambda_{j(n)})=\rho G_{(n)}d(G_{(n)}\lambda_{i(n)})/dt+\lambda_{ijkl}\{\nu_{j(n)}d(\lambda_{k(n)}\nu_{l(n)})/dt+$$

$$+G_{(n)}g_{(n)}^{\alpha\beta}x_{j,\beta(n)}(\lambda_{k(n)}\nu_{l(n)})_{,\alpha}+g_{(n)}^{\alpha\beta}\nu_{j(n)}x_{l,\beta(n)}(G_{(n)}\lambda_{k(n)})_{,\alpha}\},$$

$$\sum_{n=1}^{3}\lambda_{3jkl}\lambda_{k(n)}\nu_{l(n)}=0 \qquad (1.5)$$

$$\sum_{n=1}^{3}\lambda_{3jkl}L_{k(n)}\nu_{l(n)}=\sum_{n=1}^{3}g_{(n)}^{\alpha\beta}(G_{(n)}\lambda_{k(n)})_{,\alpha}x_{l,\beta(n)} \quad (x_3=0) \qquad (1.6)$$

Здесь знак [...] используется для обозначения разности значений некоторой величины на различных сторонах волновой поверхности $S_n(t)$; d/dt — полная производная по времени от величин, взятых на волновой поверхности; $\lambda_{i(n)}$, $L_{i(n)}$ — величины, характеризующие интенсивность волновых фронтов; нижний индекс n, стоящий в скобках, указывает на порядковый номер объемной волны; ν_i — компоненты вектора нормали к поверхности $S_n(t)$; $g_{(n)}^{\alpha\beta}$ — компоненты метрического тензора поверхности $S_n(t)$; $x_{i,\alpha}=\partial x_i/\partial u^\alpha$, u^α — поверхностные координаты; верхние и нижние латинские индексы означают соответствующие контравариантные и ковариантные компоненты вектора или тензора.

Предположим, что материал полупространства слабо анизотропен [1]:

$$\lambda_{ijkl}=\lambda_{ijkl}^{(0)}+\varepsilon\lambda_{ijkl}^{(1)}$$
$$\lambda_{ijkl}^{(0)}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \qquad (1.7)$$

Здесь и в дальнейшем верхние индексы, стоящие в скобках, обозначают нулевое и первое приближения соответствующих величин; $\lambda_{ijkl}^{(0)}$ — компоненты изотропного тензора упругости; λ, μ — параметры Ламе; δ_{ij} — символ Кронекера, $\lambda_{ijkl}^{(1)}$ — компоненты некоторого тензора четвертого ранга; ε — малая величина.

2. Уравнения волновых поверхностей и линий. Прежде всего получим уравнения волновых поверхностей и линий, ограничиваясь членами нулевого и первого порядка малости относительно величины ε.

Используя известные формулы для волновой поверхности S и волновой линии L [7]:

$$\left.\frac{dx_i}{dt}\right|_S=G\nu_i, \quad \left.\frac{dx_i}{dt}\right|_L=gN_i, \quad \left.\frac{d\nu_i}{dt}\right|_S=-g^{\alpha\beta}G_{,\alpha}x_{i,\beta}$$
$$dN_i/dt|_L=-g^{\alpha\beta}g_\alpha x_{i,\beta}$$

а также учитывая, что

$$\nu_iN_i=Gg^{-1}, \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_S=\frac{d}{d\sigma}G=\frac{d}{d\sigma^{(0)}}G^{(0)}, \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_L=\frac{d}{d\Sigma}g\frac{d}{d\Sigma^{(0)}}g^{(0)}$$

имеем

$$x_i=x_i^{(0)}+\varepsilon x_i^{(0)}=\nu_3^{(0)}\,(-u^1+r^*)\,k_i+(\sigma^{(0)}+G^{(0)}g^{(0)^{-1}}r^*)\nu_i^{(0)}+$$

$$+\varepsilon\left\{-\frac{G_{,\theta}^{(1)}}{G^{(0)}}\frac{g^{(0)^3}}{G^{(0)^2}}\left[r\ln\left(\frac{r}{r^*-u^1}\right)-r+r^*-u^1\right]s_i-\right.$$

$$-\frac{g_{,\theta}^{(1)}}{g^{(0)}}\left[\left(\frac{g^{(0)}}{G^{(0)}}\sigma^{(0)}+r^*\right)\ln\left(\frac{r^*-u^1}{r^*}\right)+u^1\right]s_i+\left(\frac{G^{(1)}g^{(0)}-g^{(1)}G^{(0)}}{\nu_3^{(0)}g^{(0)^2}}k_i+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{G^{(1)}}{g^{(0)}}\nu_i^{(0)}\right)\left(\sigma^{(0)}+\frac{G^{(0)}}{g^{(0)}}u^1\right)-\frac{g^{(1)}}{g^{(0)}}\left(\nu_3^{(0)}\,k_i+\frac{G^{(0)}}{g^{(0)}}\nu_i^{(0)}\right)\,u^1\right\} \tag{2.1}$$

$$\nu_i=\nu_i^{(0)}+\varepsilon\left[-G_{,\theta}^{(1)}\,\frac{g^{(0)}}{G^{(0)^2}}\ln\left(\frac{r}{r^*-u^1}\right)s_i-\right.$$

$$\left.-\frac{g_{,\theta}^{(0)}}{G^{(0)}}\ln\left(\frac{r^*-u^1}{r^*}\right)s_i+\frac{G^{(1)}g^{(0)}-g^{(1)}G^{(0)}}{\nu_3^{(0)}g^{(0)^2}}k_i\right]$$

$$r=-\nu_3{}^{(0)^2}(u^1+g^{(0)}t)+r^{(0)},\quad r^{(0)}=g^{(0)}t+r^*$$

Здесь σ, Σ — длины дуг, отсчитываемые вдоль нормальных траекторий точек движущейся волновой поверхности S и линии L соответственно; $\sigma^{(0)}=G^{(0)}t$, $\Sigma^{(0)}=q^{(0)}t$ — расстояния, отсчитываемые вдоль прямых лучей для поверхности и линии в изотропной упругой среде; r^* — начальный радиус поверхностной волны.

Из соотношений (2.1) видно, что при $u^1=-g^{(0)}t$ координата x_3 обращается в нуль и объемные волны пересекаясь вдоль одной линии, выходят на граничную плоскость. В этом случае получим:

$$x_i|_{x_3=0}=(\nu_3{}^{(0)}k_i+G^{(0)}g^{(0)^{-1}}\nu_i{}^{(0)})r^{(0)}+\varepsilon\left\{g^{(1)}g^{(0)^{-1}}\Sigma^{(0)}N_i^{(0)}-\right.$$

$$\left.-g_{,\theta}^{(1)}\,g^{(0)-1}[r^{(0)}\ln(r^{(0)}r^{*-1})-\Sigma^{(0)}]s_i\right\}$$

$$\nu_i|_{x_3=0}=\nu_i^{(0)}+\varepsilon[-g_{,\theta}^{(1)}C^{(0)^{-1}}\ln(r^{(0)}r^{*-1})s_i+ \tag{2.2}$$

$$+(G^{(1)}g^{(0)}-g^{(1)}G^{(0)})\nu_3^{(0)^{-1}}g^{(0)^{-2}}k_i]$$

$$N_i=N_i^{(0)}-\varepsilon g_{,\theta}^{(1)}\,g^{(0)^{-1}}\ln(r^{(0)}r^{*-1})\,s_i$$

В формулах (2.1) и (2.2) индекс, указывающий на порядковый номер объемной волны, для простоты опущен. Эти соотношения позволяют получить основные формулы теории волновых поверхностей и линии, распространяющихся в слабо анизотропной среде со свободной границей. Они содержат четыре неизвестные функции $G_{(n)}^{(1)}$, $g^{(1)}$, которые вместе с интенсивностями объемных и поверхностной волн подлежат определению.

3. Построение решения. Для построения решения системы уравнений (1.3)—(1.6) используем прямые разложения входящих туда величин по малому параметру ε, ограничиваясь нулевым и первым приближениями. Кроме того, разложим векторы $\lambda_{i(n)}$, $L_{i(n)}$ в нулевом и первом приближениях по трем взаимно ортогональным единичным векторам $\mathbf{v}^{(0)}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{s}$:

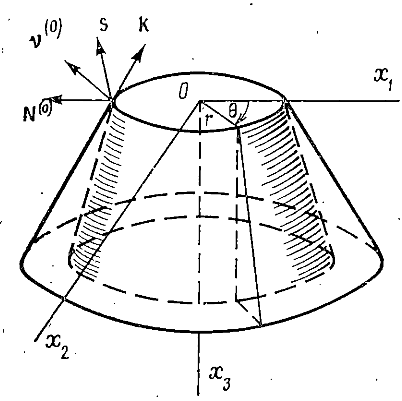
$$\lambda_{i(n)}^{(0,1)}=h_{(n)}^{(0,1)}\nu_{i(n)}^{(0)}+p_{(n)}^{(0,1)}s_{i(n)}+q_{(n)}^{(0,1)}k_{i(n)} \tag{3.1}$$

$$L_{i(n)}^{(0,1)}=H_{(n)}^{(0,1)}\nu_{i(n)}^{(0)}+P_{(n)}^{(0,1)}s_{i(n)}+Q_{(n)}^{(0,1)}k_{i(n)}$$

$$\mathbf{v}^{(0)}=\|G^{(0)}g^{(0)-1}\cos u^2,\ G^{(0)}g^{(0)-1}\sin u^2,\ (1-G^{(0)2}g^{(0)-2})^{1/2}\|$$

$$\mathbf{k}=\|\nu_3{}^{(0)}\cos u^2,\ \nu_3{}^{(0)}\sin u^2,\ -G^{(0)}g^{(0)-1}\|,\ \mathbf{s}=\|-\sin u^2,\ \cos u^2,\ 0\|$$

На фиг. 1 условно изображены две комплексные конические поверхности в изотропной среде (нулевое приближение) — поперечная и продольная объемные волны, распространяющиеся со скоростями $G^{(0)}=G_{(1)}^{(0)}=G_{(2)}^{(0)}$ и $G_{(3)}^{(0)}$, которые при выходе на граничную плоскость пересекаются по окружности — поверхностной волне, распространяющейся со скоростью $g^{(0)}$. Показаны три единичные взаимно ортогональных вектора: $\mathbf{v}^{(0)}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{s}$, которые направлены соответственно по нормалям, образующим и касательным к направляющим конических поверхностей, а также единичный вектор $\mathbf{N}^{(0)}=\|\cos u^2,\ \sin u^2\|$, перпендикулярный поверхностной волне. Кроме декартовых координат, на фиг. 1 изображены ортогональные поверхностные координаты u^1 и u^2, сохраняющие постоянные значения при движении вдоль нормалей к коническим поверхностям $du^\alpha/dt|_s=0$, а также полярные координаты r, $\theta=u^2$.



Фиг. 1

Если в выражениях (1.3), (1.5) учесть формулы (3.1), то в результате процедуры, подробно описанной в [3], находим нулевое приближение

$$\rho G_{(3)}^{(0)^2}=\lambda+2\mu,\quad \lambda_{i(3)}^{(0)}=h_{(3)}^{(0)}\nu_{i(3)}^{(0)},\quad \rho G_{(\alpha)}^{(0)^2}=\rho G^{(0)2}=\mu \tag{3.2}$$

$$h_{(\alpha)}^{(0)}=0,\quad p_{(\alpha)}^{(0)}=\pm\psi a_{(1)}a_{(2)}h_{(3)}^{(0)},\quad q_{(\alpha)}^{(0)}=\pm\psi a_{(\alpha+1)}h_{(3)}^{(0)}$$

$$a_{(\alpha)}=-s_{ik}^{(0)}s_ik_k(s_{ik}^{(0)}s_is_k-2\rho G^{(0)}G_{(\alpha)}^{(1)})^{-1},\quad s_{ik(n)}^{(0)}=\lambda_{ijkl}^{(1)}\nu_{j(n)}^{(0)}\nu_{l(n)}^{(0)}$$

$$\psi=\psi^*(a_{(2)}-a_{(1)})^{-1},\quad \psi^*=-2G_{(3)}^{(0)}g^{(0)-1}(1-G_{(3)}^{(0)^2}g^{(0)-2})^{1/2}(1-2G^{(0)2}g^{(0)-2})^{-1}$$

и первое приближение

$$G_{(3)}^{(1)}=s_{ik(3)}^{(0)}\nu_{i(3)}^{(0)}\nu_{k(3)}^{(0)}(2\rho G_{(3)}^{(0)})^{-1},\quad \lambda_{i(3)}^{(1)}=h_{(3)}^{(1)}\nu_{i(3)}^{(0)}+\beta_{i(3)}h_{(3)}^{(0)}$$

$$\beta_{i(3)}=(\lambda+\mu)^{-1}[s_{ik(3)}^{(0)}\nu_{k(3)}^{(0)}+(\lambda+\mu)\nu_{i(3)}^{(1)}-2\rho G_{(3)}^{(0)}G_{(3)}^{(1)}\nu_{i(3)}^{(0)}] \tag{3.3}$$

$$G_{(\alpha)}^{(1)}=m\pm\sqrt{\Delta},\quad m=(4\rho G^{(0)})^{-1}s_{ik}^{(0)}(s_is_k+k_ik_k)$$

$$\Delta=(16\rho^2G^{(0)2})^{-1}[s_{ik}^{(0)}(s_is_k-k_ik_k)]^2+(4\rho^2G^{(0)2})^{-1}(s_{ik}^{(0)}s_is_k)^2$$

$$h_{(\alpha)}^{(1)}=\pm\overset{*}{h}_{(\alpha)}\psi a_{(\alpha+1)}h_{(3)}^{(0)},\quad \overset{*}{h}_{(\alpha)}=-k_k\nu_{k(\alpha)}^{(1)}-(\lambda+\mu)^{-1}s_{ik}^{(0)}\ \nu_i^{(0)}\ (a_{(\alpha)}s_k+k_k)$$

$$p_{(\alpha)}^{(1)}=\pm\psi a_{(1)}\ a_{(2)}h_{(3)}^{(1)}+(d_{(\alpha)}a_{(\alpha)}\pm\Phi_{(\alpha)}^{(1)}\psi a_{(\alpha+1)}h_{(3)}^{(0)}$$

$$q_{(\alpha)}^{(1)}=\pm\psi a_{(\alpha+1)}h_{(3)}^{(1)}+d_{(\alpha)}h_{(3)}^{(0)},\quad \Phi_{(\alpha)}^{(1)}=f_{(\alpha)}(s_{ik}^{(0)}s_is_k-2\rho G^{(0)}G_{(\alpha)}^{(1)})^{-1}$$

$$f_{(\alpha)}=s_{ik}^{(0)}s_i\nu_k^{(0)}k_j\nu_{j(\alpha)}^{(1)}+[s_{ik}^{(0)}s_i\nu_k^{(0)}s_{jl}^{(0)}\nu_j^{(0)}(\lambda+\mu)^{-1}-s_{il(\alpha)}^{(1)}s_l]\,(a_{(\alpha)}s_l+$$

$$+k_l)+2\rho(G_{(\alpha)}^{(1)2}+2G^{(0)}G_{(\alpha)}^{(2)})a_{(\alpha)},\quad d_{(\alpha)}=(a_{(2)}-a_{(1)})^{-1}[\pm a_{(\alpha+1)}(F_1\cos\theta+$$

$$+F_2\sin\theta)\mu^{-1}(1-2G^{(0)2}g^{(0)-2})^{-1}\mp(F_2\cos\theta-F_1\sin\theta)\mu^{-1}(1-G^{(0)2}g^{(0)-2})^{-1/2}\pm$$

$$\pm(a_{(2)}\Phi_{(1)}^{(1)}-a_{(1)}\Phi_{(2)}^{(1)})\psi],\quad s_{ik(n)}^{(1)}=\lambda_{ijkl}^{(1)}(\nu_{j(n)}^{(1)}\nu_{l(n)}^{(0)}+\nu_{j(n)}^{(0)}\nu_{l(n)}^{(1)})$$

$$F_j=-\lambda_{3jkl}^{(0)}[\beta_{k(3)}\nu_{l(3)}^{(0)}+(\overset{*}{h}_{(1)}a_{(2)}-\overset{*}{h}_{(2)}a_{(1)})\psi\nu_k^{(0)}\ \nu_l^{(0)}+\nu_{k(3)}^{(0)}\nu_{l(3)}^{(1)}+(a_{(1)}s_k+$$

$$+k_k)a_{(2)}\nu_{l(1)}^{(1)}\psi-(a_{(2)}s_k+k_k)a_{(1)}\nu_{l(2)}^{(1)}\psi]-\lambda_{3jkl}^{(1)}(\nu_{k(3)}^{(0)}\nu_{l(3)}^{(0)}+\psi^*\nu_l^{(0)}k_k)$$

где $h_{(3)}^{(0)}$ и $h_{(3)}^{(1)}$ — неизвестные функции, $g^{(0)}$ — скорость волны Рэлея в изотропной упругой среде, а $g^{(1)}$ и $G_{(\alpha)}^{(2)}$ определяются из уравнений

$$K(F_j)=F_3(1-2G^{(0)2}g^{(0)-2})+(F_1\cos\theta+F_2\sin\theta)2G^{(0)}g^{(0)-1}\times$$
$$\times(1-G^{(0)2}g^{(0)-2})^{1/2}=0 \tag{3.4}$$

$$f_{(\alpha)}(s_{ik}^{(0)}k_ik_k-2\rho G^{(0)}G_{(\alpha)}^{(1)})-g_{(\alpha)}s_{ik}^{(0)}s_ik_k=0$$

$$g_{(\alpha)}=s_{ik}^{(0)}k_i\nu_k^{(0)}k_j\nu_{j(\alpha)}^{(1)}+[s_{ik}^{(0)}k_i\nu_k^{(0)}s_{il}^{(0)}\nu_j^{(0)}(\lambda+\mu)^{-1}-s_{il(\alpha)}^{(1)}k_i+$$

$$+s_{il}^{(0)}\nu_i^{(0)}k_j\nu_{j(\alpha)}^{(1)}]\,(a_{(\alpha)}s_l+k_l)+2\rho(G_{(\alpha)}^{(1)2}+2G^{(0)}G_{(\alpha)}^{(2)})$$

В соотношениях (3.2), (3.3) верхний и нижний знаки относятся соответственно к значениям индекса $\alpha=1$, 2, причем индекс $\alpha+1=1$ при $\alpha=2$; индекс α ставится у тех величин, которые принимают различные значения на первой и второй комплексных волнах.

Отметим, что несмотря на зависимость $\nu_i^{(1)}$ при $x_3=0$ от $\Sigma^{(0)}$, нормальная скорость поверхностной волны $g=g^{(0)}+\varepsilon g^{(1)}$, как это следует из соотношений (2.2), (3.3), (3.4), не зависит от $\Sigma^{(0)}$.

Для нахождения неизвестных функций $h_{(3)}^{(0)}$, $h_{(3)}^{(1)}$ необходимо привлекать нулевые и первые приближения соотношений (1.4), (1.6). Начнем с определения $h_{(3)}^{(0)}$.

Учитывая в уравнении (1.4) формулы (3.1) и (3.2), для нулевого приближения имеем для продольной волны

$$L_{i(3)}^{(0)}=H_{(3)}^{(0)}\nu_{i(3)}^{(0)}-\Omega_{i(3)}^{(0)}(\lambda+\mu)^{-1},\quad \Omega_{i(3)}^{(0)}\nu_{i(3)}^{(0)}=0 \tag{3.5}$$

и для поперечных волн

$$H_{(\alpha)}^{(0)}=\Omega_{i(\alpha)}^{(0)}\nu_i^{(0)}(\lambda+\mu)^{-1},\quad \Omega_{i(\alpha)}^{(0)}k_i=0,\quad \Omega_{i(\alpha)}^{(0)}s_i=0 \tag{3.6}$$

Вторые соотношения в (3.5), (3.6) приводятся к виду

$$dh_{(3)}^{(0)}/dt+{}^1/_2G_{(n)}^{(0)2}g^{(0)-1}h_{(3)}^{(0)}r^{-1}=0 \tag{3.7}$$

и служат уравнениями для определения производных от $h_{(3)}^{(0)}$ вдоль нормалей к продольной и поперечной комплексным волновым поверхностям при $x_3=0$. Третье соотношение в (3.6) выполняется автоматически.

Подставляя первые выражения (3.5), (3.6) в нулевое приближение формулы (1.6) и учитывая, что $g^{(0)}$ является скоростью волны Рэлея в изотропной упругой среде, получаем уравнение

$$K(M_j^{(0)})=0 \tag{3.8}$$

а также соотношения

$$\begin{gathered} P_{(1)}^{(0)}+P_{(2)}^{(0)}=\mu^{-1}(M_2^{(0)}\cos\theta-M_1^{(0)}\sin\theta)(1-G^{(0)2}g^{(0)-2})^{-1/2} \\ Q_{(1)}^{(0)}+Q_{(2)}^{(0)}=\psi^* H_{(3)}^{(0)}+\mu^{-1}(M_1^{(0)}\cos\theta+M_2^{(0)}\sin\theta)(1-2G^{(0)2}g^{(0)-2})^{-1} \\ M_j^{(0)}(\lambda_k^{(0)})=\lambda_{3jkl}[g_{(3)}^{\alpha\beta(0)}G_{(3)}^{(0)}\lambda_{k(3),\alpha}^{(0)}x_{l,\beta(3)}^{(0)}+g^{\alpha\beta(0)}G^{(0)}x_{l,\beta}^{(0)}(\lambda_{k(1),\alpha}^{(0)}+\lambda_{k(2),\alpha}^{(0)})+ \\ +(\lambda+\mu)^{-1}\Omega_{k(3)}^{(0)}\nu_{l(3)}^{(0)}-(\lambda+\mu)^{-1}(\Omega_{n(1)}^{(0)}+\Omega_{n(2)}^{(0)})\nu_n^{(0)}\nu_k^{(0)}\nu_l^{(0)}] \end{gathered} \tag{3.9}$$

Учитывая в выражениях для $M_j^{(0)}$ формулы (3.2), можно из (3.8) получить уравнение для определения $h_{(3)}^{(0)}$ на фронте поверхностной волны

$$\begin{gathered} dh_{(3)}^{(0)}/dr^{(0)}+{}^1/_2 h_{(3)}^{(0)}r^{(0)-1}=0 \\ h_{(3),\theta}^{(0)}=0,\quad h_{(3),1}^{(0)}|_{x_3=0}=-dh_{(3)}^{(0)}/dr^{(0)}+g^{(0)-1}dh_{(3)}^{(0)}/dt \end{gathered} \tag{3.10}$$

При выводе уравнения (3.10) учитывалось выражение (3.7).
Интегрируя уравнение (3.10), находим

$$h_{(3)}^{(0)}=c_0 r^{(0)^{-1/2}} \tag{3.11}$$

где $c_0=c_0'+ic_0''$ — комплексная произвольная постоянная.

Зная величину $h_{(3)}^{(0)}$, можно подсчитать выражения для скачков скоростей перемещений в нулевом приближении на фронте поверхностной волны

$$[v_r]^{(0)}=\mathrm{Re}\{([v_1]^{(0)}+[v_1]_{(3)}^{(0)})\cos\theta+([v_2]^{(0)}+[v_2]_{(3)}^{(0)})\sin\theta=ac_0'r^{(0)^{-1/2}},$$

$$[v_3]^{(0)}=\mathrm{Re}([v_3]^{(0)}+[v_3]_{(3)}^{(0)})=bc_0''r^{(0)^{-1/2}}$$

$$a=-\frac{G_{(3)}^{(0)^2}g^{(0)}}{2G^{(0)3}},\quad b=-\frac{G_{(3)}^{(0)^2}}{4G^{(0)}}\left(2-\frac{g^{(0)2}}{G^{(0)2}}\right)\left(\frac{G^{(0)2}}{g^{(0)2}}-1\right)^{-1/2}$$

Чтобы получить дифференциальное уравнение для определения величины $h_{(3)}^{(1)}$, нужно рассмотреть первые приближения соотношений (1.4), (1.6). В результате получим уравнение, которое имеет тот же самый вид, что и (3.8), только в качестве аргумента у функций K вместо $M_j^{(0)}$ будет стоять величина $M_j^{(1)}+N_j^{(1)}$:

$$\begin{gathered} M_j^{(1)}+N_j^{(1)}=M_j^{(0)}(\lambda_i^{(1)})-\lambda_{3jkl}(L_{k(3)}^{(0)}\nu_{l(3)}^{(1)}+L_{k(1)}^{(0)}\nu_{l(1)}^{(1)}+L_{k(2)}^{(0)}\nu_{l(2)}^{(1)})+ \\ +\lambda_{3jkl}^{(0)}\{g^{\alpha\beta(1)}G_{(3)}^{(0)}x_{l,\beta(3)}^{(0)}\lambda_{k(3),\alpha}^{(0)}+G^{(0)}x_{l,\beta}^{(0)}(g_{(1)}^{\alpha\beta(1)}\lambda_{k(1),\alpha}^{(0)}+g_{(2)}^{\alpha\beta(1)}\lambda_{k(2),\alpha}^{(0)})+ \\ +g_{(3)}^{\alpha\beta(0)}(\lambda_{k(3)}^{(0)}G_{(3)}^{(1)})_{,\alpha}x_{l,\beta(3)}^{(0)}+g^{\alpha\beta(0)}x_{l,\beta}^{(0)}[(\lambda_{k(1)}^{(0)}G_{(1)}^{(1)})_{,\alpha}+(\lambda_{k(2)}^{(0)}G_{(2)}^{(1)})_{,\alpha}]+ \end{gathered}$$

$$+g_{(3)}^{\alpha\beta(0)}\overset{(0)}{G}_{(3)}\overset{(0)}{\lambda}_{k(3),\alpha}\overset{(1)}{x}_{l,\beta(3)}+g^{\alpha\beta(0)}G^{(0)}(\overset{(0)}{\lambda}_{k(1),\alpha}\overset{(1)}{x}_{l,\beta(1)}+\overset{(0)}{\lambda}_{k(2),\alpha}\overset{(1)}{x}_{l,\beta(2)})\}-$$

$$-\overset{(1)}{\lambda}_{3jkl}[\overset{(0)}{L}_{k(3)}\overset{(0)}{\nu}_{l(3)}+(\overset{(0)}{L}_{k(1)}+\overset{(0)}{L}_{k(2)})\overset{(0)}{\nu_l}]+\overset{(1)}{\lambda}_{3jkl}[g_{(3)}^{\alpha\beta(0)}\overset{(0)}{\lambda}_{k(3),\alpha}\overset{(0)}{G}_{(3)}\overset{(0)}{x}_{l,\beta(3)}+$$

$$+g^{\alpha\beta(0)}G^{(0)}\overset{(0)}{x}_{l,\beta}(\overset{(0)}{\lambda}_{k(1)}+\overset{(0)}{\lambda}_{k(2)})]$$

Однако в упомянутое дифференциальное уравнение войдет не только $h_{(3)}^{(1)}$, но также неизвестная величина $H_{(3)}^{(0)}$, для определения которой приходится привлекать соотношения, содержащие скачки производных от скоростей перемещений второго порядка.

Кроме уравнения для определения $h_{(3)}^{(1)}$ можно получить следующие соотношения: для квазипродольной волны

$$L_{i(3)}^{(1)}=H_{(3)}^{(1)}-\Omega_{i(3)}^{(1)}(\lambda+\mu)^{-1}+H_{(3)}^{(0)}[\nu_{i(3)}^{(1)}+(s_{ik(3)}^{(0)}\nu_{k(3)}^{(0)}-s_{jl(3)}^{(0)}\nu_{j(3)}^{(0)}\nu_{l(3)}^{(0)}\nu_{i(3)}^{(0)})(\lambda+ \tag{3.12}$$

$$+\mu)^{-1}]+[2\rho G_{(3)}^{(0)}G_{(3)}^{(1)}(\lambda+\mu)^{-2}\delta_{ik}-\nu_{k(3)}^{(1)}\nu_{i(3)}^{(0)}(\lambda+\mu)^{-1}-s_{ik(3)}^{(0)}(\lambda+\mu)^{-2}]\Omega_{k(3)}^{(0)}$$

$$\Omega_{i(3)}^{(1)}\nu_{i(3)}^{(0)}+\Omega_{i(3)}^{(0)}\nu_{i(3)}^{(1)}+\Omega_{k(3)}^{(0)}s_{ik(3)}^{(0)}\nu_{i(3)}^{(0)}(\lambda+\mu)^{-1}=0$$

и для квазипоперечных волн

$$H_{(\alpha)}^{(1)}=\Omega_{i(\alpha)}^{(1)}\nu_i^{(0)}(\lambda+\mu)^{-1}-(s_{ik}^{(0)}\nu_i^{(0)}-2\rho G^{(0)}G_{(\alpha)}^{(1)}\nu_k^{(0)})(\lambda+\mu)^{-1}L_{k(\alpha)}^{(0)}-L_{i(\alpha)}^{(0)}\nu_{i(\alpha)}^{(1)}$$

$$\{\Omega_{i(\alpha)}^{(1)}s_i-[s_{ik}^{(0)}s_i\nu_k^{(0)}+(\lambda+\mu)s_i\nu_{i(\alpha)}^{(1)}]H_{(\alpha)}^{(0)}\}s_{ik}^{(0)}s_is_k-\{\Omega_{i(\alpha)}^{(1)}k_i- \tag{3.13}$$

$$-[s_{ik}^{(0)}k_i\nu_k^{(0)}+(\lambda+\mu)k_i\nu_{i(\alpha)}^{(1)}]H_{(\alpha)}^{(0)}\}(s_{ik}^{(0)}s_is_k-2\rho G^{(0)}G_{(\alpha)}^{(1)})=0$$

$$P_{(\alpha)}^{(0)}=a_{(\alpha)}Q_{(\alpha)}^{(0)}+\{\Omega_{i(\alpha)}^{(1)}s_i-H_{(\alpha)}^{(0)}[s_{ik}^{(0)}s_i\nu_k^{(0)}+(\lambda+\mu)s_i\nu_{i(\alpha)}^{(1)}]\}\times$$

$$\times(s_{ik}^{(0)}s_is_k-2\rho G^{(0)}G_{(\alpha)}^{(1)})^{-1}$$

где $\Omega_{i(n)}^{(1)}$ — первое приближение для $\Omega_{i(n)}$.

Вторые формулы в (3.12) и (3.13) служат уравнениями для определения неизвестных производных $dh_{(3)}^{(1)}/dt$ вдоль нормалей к квазиобъемным волнам при $x_3=0$, а третья формула (3.13) вместе с (3.9) позволяет выразить $P_{(\alpha)}^{(0)}$, $Q_{(\alpha)}^{(0)}$ через функции $h_{(3)}^{(1)}$, $H_{(3)}^{(0)}$.

Используя кинематические и геометрические условия совместности второго порядка [7]:

$$[\dot{v}_{i,j}]=L_i^*\nu_j-g^{\alpha\beta}L_{i,\alpha}Gx_{j,\beta}-g^{\alpha\beta}Gx_{j,\beta}d\lambda_{i,\alpha}/dt$$

$$[\ddot{v}_i]=-L_i^*G-GdL_i/dt-Gd^2\lambda_i/dt^2$$

из продифференцированных по времени уравнений (1.1) и (1.2) находим соотношение для определения $H_{(3)}^{(0)}$, которое по виду совпадает с (3.8), но вместо $M_j^{(0)}$ будут стоять величины $\mu_j^{(0)}$:

$$\mu_j^{(0)}=\overset{(0)}{\lambda}_{3jkl}[\{g_{(3)}^{\alpha\beta(0)}G_{(3)}^{(0)}x_{j,\beta(3)}^{(0)}d\lambda_{k(3),\alpha}^{(0)}/dt+g^{\alpha\beta(0)}G^{(0)}x_{j,\beta}^{(0)}(d\lambda_{k(1),\alpha}^{(0)}/dt+$$

$$+d\lambda_{k(2),\alpha}^{(0)}/dt)+(\lambda+\mu)^{-1}N_{k(3)}^{(0)}\nu_{l(3)}^{(0)}-(\lambda+\mu)^{-1}(N_{i(1)}^{(0)}+N_{i(2)}^{(0)})\nu_i^{(0)}\nu_k^{(0)}\nu_l^{(0)}\}+$$

$$+M_j^{(0)}(L_i^{(0)})$$

При этом также получаем для продольной волны

$$L^*_{i(3)}=H^{*(0)}_{(3)}\nu^{(0)}_{i(3)}-\Omega^{(0)}_{i(3)}(L^{(0)}_j)(\lambda+\mu)^{-1}-N^{(0)}_{i(3)}(\lambda+\mu)^{-1}$$
$$[\Omega^{(0)}_{r(3)}(L^{(0)}_j)+N^{(0)}_{i(3)}]\nu^{(0)}_{i(3)}=0 \tag{3.14}$$

и для поперечных волн

$$H^{*(0)}_{(\alpha)}=\Omega^{(0)}_{i(\alpha)}(L^{(0)}_j)\nu^{(0)}_i(\lambda+\mu)^{-1}+N^{(0)}_{i(\alpha)}\nu^{(0)}_i(\lambda+\mu)^{-1}$$
$$[\Omega^{(0)}_{i(\alpha)}(L^{(0)}_j)+N^{(0)}_{i(\alpha)}]k_i=0,\quad [\Omega^{(0)}_{i(\alpha)}(L^{(0)}_j)+N^{(0)}_{i(\alpha)}]s_i=0 \tag{3.15}$$
$$H^{*(0)}=L^{*(0)}_j\nu^{(0)}_j,\quad N^{(0)}_i=\lambda^{(0)}_{ijml}[g^{\alpha\beta(0)}x^{(0)}_{l,\beta}\nu^{(0)}_j G^{(0)}d\lambda^{(0)}_{m,\alpha}/dt-$$
$$-G^{(0)}\nu^{(0)}_j d(g^{\alpha\beta(0)}\lambda^{(0)}_{m,\alpha}x^{(0)}_{l,\beta})/dt-g^{\alpha\beta(0)}x^{(0)}_{j,\beta}G^{(0)2}(g^{\gamma\delta(0)}\lambda^{(0)}_{m,\gamma}x^{(0)}_{l,\delta})_{,\alpha}]+$$
$$+\rho G^{(0)2}d^2\lambda^{(0)}_i/dt^2$$

Учитывая выражения (3.2)—(3.6), а также вторые соотношения (3.14) и (3.15), запишем уравнение для определения $H^{(0)}_{(3)}$ в явном виде

$$\frac{dH^{(0)}_{(3)}}{dt}+\frac{1}{2}\frac{H^{(0)}_{(3)}}{r^{(0)}}=-K(\psi^{(0)}_j)$$
$$\psi^{(0)}_j=\lambda^{(0)}_{3jkl}\{g^{\alpha\beta(0)}_{(3)}G^{(0)}_{(3)}x^{(0)}_{l,\beta(3)}d\lambda^{(0)}_{k(3),\alpha}/dt+g^{\alpha\beta(0)}G^{(0)}x^{(0)}_{l,\beta}(d\lambda^{(0)}_{k(1),\alpha}/dt+$$
$$+d\lambda^{(0)}_{k(2),\alpha}/dt)+(\lambda+\mu)^{-1}[N^{(0)}_{k(3)}\nu^{(0)}_{l(3)}-(N^{(0)}_{m(1)}+N^{(0)}_{m(2)})\nu^{(0)}_m\nu^{(0)}_k\nu^{(0)}_l-$$
$$-N^{(0)}_{m(3)}\nu^{(0)}_{m(3)}\nu^{(0)}_{k(3)}\nu^{(0)}_{l(3)}+\Omega^{(0)}_{k(3)}(\chi^{(0)}_{i(3)})\nu^{(0)}_{l(3)}-\Omega^{(0)}_{m(3)}(\chi^{(0)}_{i(3)})\nu^{(0)}_{m(3)}\nu^{(0)}_{k(3)}\nu^{(0)}_{l(3)}- \tag{3.16}$$
$$-\Omega^{(0)}_m(\chi^{(0)}_i)\nu^{(0)}_m\nu^{(0)}_k\nu^{(0)}_l]+M^{(0)}_j(\chi^{(0)}_i),\quad \chi^{(0)}_{i(3)}=-G^{(0)}_{(3)}\nu^{(0)}_{3(3)}k^{(0)}_{i(3)}dh^{(0)}_{(3)}/dr^{(0)}$$
$$\chi^{(0)}_i=G^{(0)}\psi^*\nu^{(0)}_3h^{(0)}_{(3)}r^{(0)-1}\nu^{(0)}_i-G^{(0)}_{(3)}\nu^{(0)}_{3(3)}(1-2G^{(0)2}_{(3)}g^{(0)-2})h^{(0)}_{(3)}r^{(0)-1}(1-$$
$$-2G^{(0)-2}g^{(0)-2})^{-1}k_i$$

Интегрируя уравнение (3.16), находим

$$H^{(0)}_{(3)}=c^{(0)}r^{(0)\,-1/2}-r^{(0)\,-1/2}\int\limits_{r^*}^{r^{(0)}}r^{(0)-1/2}K(\psi^{(0)}_j)\,dr^{(0)} \tag{3.17}$$

где $c^{(0)}$ — произвольная постоянная.

Теперь есть все необходимое для нахождения величины $h^{(1)}_{(3)}$. После несложных, но громоздких вычислений можно показать, что уравнение для определения $h^{(1)}_{(3)}$ имеет такой же вид, как и уравнение (3.16), только в правой части вместо $K(\psi^{(0)}_j)$ будет стоять $K(\Delta^{(1)}_j+N^{(1)}_j)$, при этом

$$\Delta^{(1)}_j=M^{(0)}_j(\beta_{i(3)}h^{(0)}_{(3)})+(\lambda+\mu)^{-1}[\delta^{(1)}_{k(3)}\nu^{(0)}_{l(3)}-\delta^{(1)}_{m(3)}\nu^{(0)}_{m(3)}\nu^{(0)}_{k(3)}\nu^{(0)}_{l(3)}-$$
$$-\Omega^{(0)}_{m(3)}(\beta_{j(3)}h^{(0)}_{(3)})\nu^{(0)}_{m(3)}\nu^{(0)}_{k(3)}\nu^{(0)}_{l(3)}-\Omega^{(0)}_{m(3)}\nu^{(1)}_{m(3)}\nu^{(0)}_{k(3)}\nu^{(0)}_{l(3)}-$$

$$-\Omega^{(0)}_{m(3)} s^{(0)}_{jm(3)} v^{(0)}_{j(3)} v^{(0)}_{k(3)} v^{(0)}_{l(3)} (\lambda+\mu)^{-1} - \delta^{(1)}_m v^{(0)}_m v^{(0)}_k v^{(0)}_l] \lambda^{(0)}_{3jkl}$$

$$\delta_j^{(1)} = \rho G^{(1)} G^{(0)} d\lambda_i^{(0)}/dt + \lambda^{(1)}_{ijkl}[v_l^{(0)} v_j^{(0)} d\lambda_k/dt + G^{(0)} g^{\alpha\beta(0)} x^{(0)}_{j,\beta}(\lambda_k^{(0)} v_l^{(0)})_{,\alpha} +$$

$$+ g^{\alpha\beta(0)} v_j^{(0)} x^{(0)}_{l,\beta} G^{(0)} \lambda^{(0)}_{k,\alpha}] + \lambda^{(0)}_{ijkl}[d(\lambda_k^{(0)} v_l^{(1)})/dt + v_l^{(0)} v_j^{(1)} d\lambda_k^{(0)}/dt +$$

$$+(G^{(1)} g^{\alpha\beta(0)} x^{(0)}_{j,\beta} + G^{(0)} g^{\alpha\beta(1)} x^{(0)}_{j,\beta} + G^{(0)} g^{\alpha\beta(0)} x^{(1)}_{j,\beta})(\lambda_k^{(0)} v_l^{(0)})_{,\alpha} +$$

$$+G^{(0)} g^{\alpha\beta(0)} x^{(0)}_{j,\beta}(\lambda_k^{(0)} v_l^{(1)})_{,\alpha} + (g^{\alpha\beta(1)} v_j^{(0)} x^{(0)}_{l,\beta} + g^{\alpha\beta(0)} v_j^{(1)} x^{(0)}_{l,\beta} +$$

$$+ g^{\alpha\beta(0)} v_j^{(0)} x^{(1)}_{l,\beta}) G^{(0)} \lambda^{(0)}_{k,\alpha} + g^{\alpha\beta(0)} v_j^{(0)} x^{(0)}_{l,\beta} (G^{(1)} \lambda_k^{(0)})_{,\alpha}]$$

Зная функции $H^{(0)}_{(3)}$, $h^{(0)}_{(3)}$, можно определить скачки скоростей перемещений нулевого порядка в первом приближении на фронте поверхностной волны

$$[v_r]^{(1)} = \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{3} [v_i]^{(1)}_{(n)} N_i^{(0)}, \quad [v_3]^{(1)} = \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{3} [v_3]^{(1)}_{(n)}$$

Каждый из этих скачков в отличие от скачков нулевого порядка в нулевом приближении зависит от двух произвольных постоянных, для определения которых необходимо знать в начальный момент времени не только сам скачок, но и его скорость.

4. Регуляризация прямых разложений. Прямые разложения построенные для скачков скоростей перемещений, являются неравномерно пригодными и нарушаются в некоторых областях – в окрестности особых направлений, удовлетворяющих условию $\Delta=0$, а также при $t\to\infty$.

Как показано в [5], в окрестности особого направления $a_{(1)}, a_{(2)} \to a = -2 s^{(0)}_{ik} s_i k_k \cdot (s^{(0)}_{ik} s_i s_k - s^{(0)}_{ik} k_i k_k)^{-1}$ и нулевое приближение амплитуд $p^{(0)}_{(\alpha)}$, $q^{(0)}_{(\alpha)}$ имеет порядок $(a_{(1)}-a_{(2)})^{-1}$, а первое приближение амплитуд $p^{(1)}_{(\alpha)}$, $q^{(1)}_{(\alpha)}$ – порядок $(a_{(1)}-a_{(2)})^{-2}$. Т. е. с увеличением номера приближения сингулярность амплитуд нарастает вблизи особого направления. Для регуляризации решения в окрестности особого направления применяется метод растянутых параметров [4]. Чтобы проиллюстрировать его рассмотрим в качестве примера гексагональный монокристалл ZnO [8, 9].

Пусть волна Рэлея типа «расходящегося круга» распространяется вдоль граничной плоскости Ox_2x_1, содержащей ось шестого порядка x_1.

На фиг. 2 показана зависимость относительной скорости поверхностной волны $g^* = gG^{(0)-1}$ от угла θ при $G^{(0)}=2736$ м/с в полярной системе координат. Слабое изменение скорости g^* с изменением угла θ указывает на то, что данный монокристалл является слабо анизотропным. Кривая на фиг. 2 изображает также очертания фронта поверхностной волны, так как для слабо анизотропного кристалла полярный радиус $r = x_i N_i|_{x_3=0} = x_i N_i^{(0)}|_{x_3=0} = (g^{(0)} + \varepsilon g^{(1)})t + r^* = gt + r^*$, и его зависимость от θ определяется зависимостью g от θ.

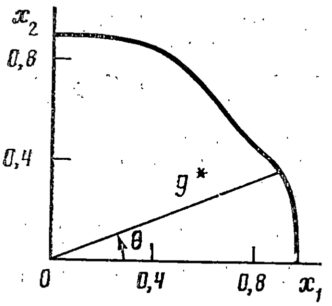
В случае слабо анизотропного гексагонального кристалла

$$\Delta = \frac{1}{16} \rho^{-2} G^{(0)-2} \left\{ \left[(5m_3 - 2R)\sin^2\theta - \frac{g^{(0)2}}{G^{(0)2}}(2m_3+R) \right] \left(\sin^2\theta - \frac{g^{(0)2}}{G^{(0)2}} \right) \right\}^2 \qquad (4.1)$$

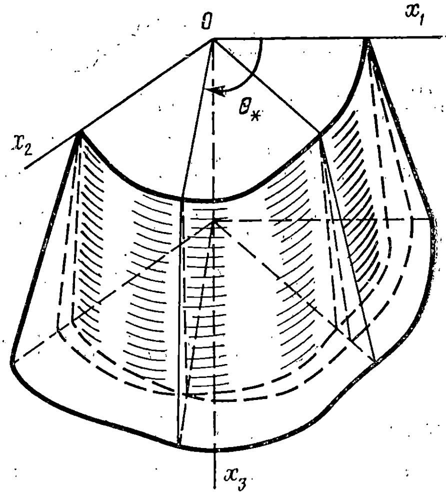
$$m_1 = \lambda^{(1)}_{1133} = \lambda^{(1)}_{2233}, \quad m_2 = \lambda^{(1)}_{3333}, \quad m_3 = \lambda^{(1)}_{2323} = \lambda^{(1)}_{1313}, \quad R = -m_1 + \frac{1}{4} m_2$$

Особые направления, как это вытекает из (4.1), задаются следующими значениями угла

$$\theta_0 = \pm \arcsin(g^{(0)} G^{(0)-1}) \qquad (4.2)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

или

$$\theta_0=\pm\arcsin(g^{(0)}G^{(0)-1}d^{1/2})$$
$$0\leqslant d=(2m_3+R)(5m_3-2R)^{-1}\leqslant G^{(0)2}g^{(0)-2} \tag{4.3}$$

Как показывает анализ прямых разложений скачков скоростей перемещений поверхностной волны в окрестности направлений (4.3), при $m_3\neq R$ их равномерная пригодность не нарушается (при $m_3=R$ формула (4.3) совпадает с формулой (4.2)). В окрестности особых направлений (4.2) прямые разложения для скачков скоростей перемещений поверхностной волны становятся непригодными и необходимо провести регуляризацию решения, для чего вводится новая переменная η по формуле $\theta=\theta_0+\Delta\eta+\varepsilon\theta_1(\Delta\eta+\ldots,\Delta\eta=\eta-\theta_0,\ \theta_1=\theta_{10}+\varepsilon\theta_{11}\Delta\eta+\ldots$

Устранение особенности в амплитудах и, следовательно, регуляризация решения происходит при $\theta_{10}=\operatorname{tg}\theta_0\,[g^{(1)}g^{(0)-1}-{}^1/_2(2m_3+R)]$.

На фиг. 3 условно изображены комплексные поверхности при $0\leqslant\theta\leqslant{}^1/_2\pi$, соответствующие квазипродольной и двум квазипоперечным волнам, которые образуют поверхностную волну. Видно, что в особом направлении $\theta_*=\theta_0+\varepsilon\theta_{10}$ ($\theta_*\approx72°$) происходит вырождение двух квазипоперечных волн в одну. Это приводит к «склейке» двух волновых поверхностей по образующей, которая подходит к особому направлению.

Можно показать, что отношение величин первого порядка к величинам нулевого порядка малости в разложениях некоторых волновых характеристик не ограничено при $t\to\infty$. Например, $x_i^{(1)}/x_i^{(0)}$, $\nu_i^{(1)}/\nu_i^{(0)}$, $N_i^{(1)}/N_i^{(0)}$ при $x_3=0$ имеют порядок $\ln r^{(0)}$, т. е. нарушается условие равномерной пригодности прямых разложений в случае бесконечной области. Чтобы сделать эти разложения равномерно пригодными на всем временном интервале, используют одновременно метод растянутых координат и метод многих масштабов [4]. Для иллюстрации комбинированного метода рассмотрим регуляризацию уравнения волновой линии (поверхностной волны) (2.2). С этой целью перепишем выражение (2.2) в безразмерном виде, введя под знак логарифма величину ε и используя тождественные преобразования логарифмической функции

$$x_i^*=A_i\zeta+\varepsilon[B_i(\zeta-1)+D_i\zeta\ln(\zeta\varepsilon)-D_i\zeta\ln\varepsilon]$$
$$x_i^*=x_ir^{*-1},\qquad \zeta=r^{(0)}r^{*-1},\qquad A_i=\nu_3^{(0)}k_i+G^{(0)}g^{(0)-1}\nu_i^{(0)} \tag{4.4}$$
$$D_i=-g^{(1)}_{,\theta}g^{(0)-1},\qquad B_i=g^{(1)}g^{(0)-1}N_i^{(0)}+g^{(1)}_{,\theta}g^{(0)-1}s_i$$

Введем новую переменную s_i с помощью формулы

$$\zeta=s_i+\varepsilon\sigma(s_i) \tag{4.5}$$

и подставим (4.5) в выражение (4.4). Выбирая $\sigma(s_i)$ так, чтобы разложение для x_i^* стало пригодным, получаем

$$x_i^*=A_is_i-D_is_i\varepsilon\ln\varepsilon+B_i(s_i-1)\varepsilon \tag{4.6}$$

где s_i – корень уравнения

$$\zeta=s_i-\varepsilon D_iA_i^{-1}s_i\ln(\varepsilon s_i) \tag{4.7}$$

Из формул (4.6), (4.7) видно, что разложение для x_i^* является равномерно пригодным, по крайней мере, до значения $s_i=0(\varepsilon^{-1})$. Чтобы разложение x_i^* оставалось пригодным при дальнейшем увеличении ζ, достаточно под $\ln \zeta$ последовательно вводить величины ε^n ($n=2, 3, \ldots$), т. е. последовательно изменять масштаб независимой переменной, стоящей под логарифмом.

Заметим, что логарифмическая особенность присутствует практически во всех асимптотических формулах данной задачи и, следовательно, рассмотренный пример является типичным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Россихин Ю. А.* Волны в слабо анизотропных средах // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 160–162.
2. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М., Л.: Гостехиздат, 1937. 998 с.
3. *Россихин Ю. А.* Поверхностные волны в упругих слабо анизотропных средах кубической симметрии // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 2. С. 89–93.
4. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
5. *Макеев В. М., Россихин Ю. А.* Построение равномерно пригодного решения для волны Релея в слабо анизотропной упругой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 75–82.
6. *Россихин Ю. А.* О равномерной пригодности лучевых разложений в задачах, связанных с распространением ударных волн в слабо анизотропной упругой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 131–138.
7. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
8. *Андерсон О.* Определения и некоторые применения изотропных упругих постоянных поликристаллических систем, полученных из данных для монокристаллов // Физическая акустика/Под ред. У. Мэзона. М.: Мир. 1968. Т. 3. Ч. Б. С. 62–121.
9. *Фарнелл Дж.* Свойства упругих поверхностных волн // Физическая акустика/Под ред. У. Мэзона, Р. Терстона. М.: Мир, 1973. Т. 6. С. 139–202.

Воронеж

Поступила в редакцию 1.III.1990