МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1992

УДК 539.3

© 1992 г. Л. Г. ЕНИКЕЕВА, А. А. ЛОКШИН

# ОБ ЭВОЛЮЦИИ МАКСИМУМА АМПЛИТУДЫ НАПРЯЖЕНИЙ В СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОМ ПЛАВНО-НЕОДНОРОДНОМ СТЕРЖНЕ

В данной работе выводится обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее распространение максимума напряжения в одноволновом процессе, протекающем в сильно нелинейном плавно-неоднородном стержне. Одноволновое уравнение, описывающее распространение напряжений в таком стержне, было впервые выведено в [1] (малость амплитуды не предполагается). Применяемый здесь метод основывается на модификации одной идеи Габова [2].

1. Рассмотрим полубесконечный стержень плотности $\rho=\rho(\gamma x)$, $0<\gamma\ll1$, с определяющим соотношением $\varepsilon=a(\gamma x, \sigma)$, где $a_\sigma'>0$, $a(\gamma x, 0)=0$ ($\varepsilon$ — деформация, $\sigma$ — напряжение). Тогда волновое уравнение, описывающее распространение напряжений в этом стержне, в лагранжевых координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 a(\gamma x, \sigma)}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho(\gamma x)}\frac{\partial\sigma}{\partial x}=0 \tag{1.1}$$

Для уравнения (1.1) поставим следующую граничную задачу:

$$\sigma=\partial\sigma/\partial t=0,\ x>0,\ t=0$$
$$\sigma(t,\ 0)=\sigma_0(t) \tag{1.2}$$

Здесь $\sigma_0(t)$ — гладкая неотрицательная функция, равная нулю при $t<0$ и при $t>T>0$, достигающая максимума при $t=t_m$ и монотонная на участках $[0, t_m]$ и $[t_m, T]$.

В [1] было показано, что с точностью до бесконечно малых высшего порядка одноволновое уравнение, описывающее распространение напряжений в стержне (до момента образования ударной волны) имеет вид

$$(a_\sigma'(\gamma x,\ \sigma)\rho(\gamma x))^{1/2}\partial\sigma/\partial t+\partial\sigma/\partial x+\gamma f(\gamma x,\ \sigma)=0 \tag{1.3}$$

$$f(\xi,\sigma)\equiv\frac{1}{2}\frac{\rho^{1/2}(\xi)}{(a_\sigma'(\xi,\sigma))^{1/4}}\int\limits_0^\sigma (a_\sigma'(\xi,\sigma))^{-1/4}\frac{d}{d\xi}\left\{\frac{a_\sigma'(\xi,\sigma)}{\rho(\xi)}\right\}^{1/2}d\sigma$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче волновое уравнение (1.1) может быть заменено на уравнение первого порядка (1.3), намного более удобное для аналитического исследования.

2. Обозначим через $t(x)$ значение $t$, при котором величина напряжения достигает максимума для фиксированного $x$. А именно,

$$\max_t \sigma(t,\ x)=\sigma(t(x),\ x) \tag{2.1}$$

Таким образом, линия $t=t(x)$ представляет собой на плоскости $t$, $x$

кривую, вдоль которой распространяется максимум напряжения. Далее, обозначим $w(x) \equiv \sigma(t(x), x)$. Ясно, что

$$w(0) = \sigma_0(t_m) \tag{2.2}$$

Из определения (2.1) следует, что $\partial\sigma/\partial t|_{t=t(x)} = 0$. Поэтому $\partial\sigma/\partial x|_{t=t(x)} = dw/dx$. Подставляя теперь в (1.3) $t=t(x)$ и учитывая два последних соотношения, придем к искомому обыкновенному дифференциальному уравнению для $w(x)$:

$$dw/dx + \gamma f(\gamma x, w) = 0 \tag{2.3}$$

Это уравнение, дополненное условием (2.2), и определяет распределение максимумов напряжений вдоль полуоси $x>0$.

3. Заметим, однако, что уравнение (2.3) (дополненное условием (2.2)) не показывает, в какой момент времени достигается при каждом $x>0$ максимум напряжения. Иными словами, неизвестной остается кривая $t=t(x)$.

Чтобы определить эту кривую, поступим следующим образом. Запишем уравнения характеристик для (1.3)

$$dt/dx = (a_\sigma'(\gamma x, \sigma)\rho(\gamma x))^{1/2}, \quad d\sigma/dx + \gamma f(\gamma x, \sigma) = 0 \tag{3.1}$$

и рассмотрим характеристику, исходящую из точки $t=t_m$ оси $t$. Заметим теперь, что второе из уравнений (3.1) совпадает с уравнением (2.3). Поэтому из совпадения начальных условий для этих уравнений вытекает, что на рассматриваемой характеристике $\sigma(t, x) = w(x)$. Поэтому рассматриваемая характеристика совпадает с интересующей нас линией максимумов $t=t(x)$, введенной в определении (2.1).

*Замечание.* Случай, когда $\sigma_0(t) \leqslant 0$ на отрезке $[0, T]$, достигает на этом отрезке единственного минимума при $t=t_M$, а на участках $[0, t_M]$ и $[t_M, T]$ монотонна, исследуется аналогично. Интересен также более общий случай, когда граничная функция $\sigma_0(t)$, сосредоточенная на отрезке $[0, T]$, имеет несколько локальных максимумов и минимумов. Естественно ожидать, что тогда все эти максимумы и минимумы напряжения также будут распространяться вдоль соответствующих характеристик. Математическое доказательство этого факта авторам неизвестно.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Локшин А. А., Сагомонян Е. А.* Нелинейные волны в механике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1989. 144 с.
2. *Габов С. А.* О свойстве разрушения уединенных волн, описываемых уравнением Уизема // ДАН СССР. 1979. Т. 246. № 6. С. 1292–1295.



Москва

Поступила в редакцию 21.V.1990