

УДК 539.3

© 1992 г. Д. Я. БАРДЗОКАС, А. Л. КАЛАМКАРОВ, О. Б. РУДАКОВА

## О КРУЧЕНИИ КОМПОЗИЦИОННОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВАЛА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Сложность решения задач механики сильно неоднородных композиционных материалов связана с тем, что коэффициенты соответствующих дифференциальных уравнений являются быстро изменяющимися функциями от пространственных координат. Поэтому, как правило, решаются уравнения не в строгой постановке, а некоторые упрощенные — с усредненными коэффициентами. Например, для композиционных сред с тонкой периодической структурой такое усреднение уравнений проводится в соответствии с асимптотическим методом осреднения периодических сред [1, 2], см. также обзор [3]. Вдали от границы области этот метод позволяет получить приемлемое приближение к точному решению уже в нулевом приближении [4]. Однако в окрестности границы тела решение краевых задач по методу осреднения приводит к дополнительным весьма сложным погранслойным задачам [2, 5]. Например, в наиболее простом случае слоистого композиционного материала локальные задачи решаются точно [2, 4], но погранслойные задачи могут быть решены только численно (см. [6]). С другой стороны, одним из эффективных методов решения краевых задач математической физики является метод интегральных преобразований. Поэтому представляется весьма перспективной возможность такого развития и обобщения этого метода, при котором новые обобщенные интегральные преобразования позволили бы находить аналитические решения краевых задач механики композитов с быстросциллирующими коэффициентами.

В данной работе рассмотрена задача о кручении многослойного композиционного полого цилиндрического вала конечной длины. На основании общей схемы работы [7], а также метода осреднения построено новое обобщенное интегральное преобразование, которое использовано далее для получения аналитического решения поставленной задачи. В предельном частном случае однородного материала и постоянных коэффициентов уравнения полученное обобщенное интегральное представление сводится к известным соотношениям преобразования, использованного в [8].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о кручении композиционного полого цилиндрического вала конечной длины. Будем предполагать, что цилиндр состоит из  $N$  цилиндрических слоев одинаковой малой толщины  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll R_0 - r_0$ ), см. фигуру 1. Внутри каждого слоя материал обладает некоторой неоднородностью, причем структура всех слоев одинакова. В цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$  ненулевые компоненты напряжений  $\sigma_{r\theta}, \sigma_{z\theta}$  выражаются через компоненту перемещений  $u_\theta(r, z)$  следующим образом:

$$\sigma_{r\theta} = \mu^{(\varepsilon)}(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right), \quad \sigma_{z\theta} = \mu^{(\varepsilon)}(r) \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \quad (1.1)$$

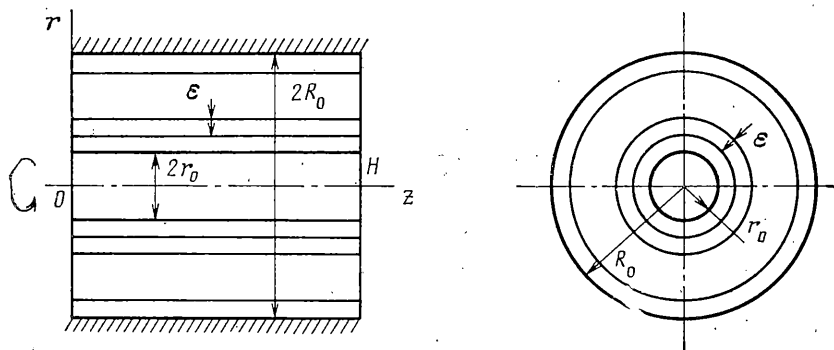
где  $\mu^{(\varepsilon)}(r) = \mu(\rho)$  — модуль сдвига, представляющий собой некоторую заданную кусочно-гладкую однопериодическую функцию переменной  $\rho = r/\varepsilon$ .

С помощью функции перемещения  $\Psi(r, z)$ , определяемой равенством

$$u_\theta(r, z) = r\Psi(r, z) \quad (1.2)$$

формулы для напряжений (1.1) принимают вид

$$\sigma_{r\theta} = \mu(\rho)r \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad \sigma_{z\theta} = \mu(\rho)r \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Подставляя (1.3) в уравнение равновесия  $\partial\sigma_{r\theta}/\partial r + \partial\sigma_{rz}/\partial z + 2\sigma_{r\theta}/r = 0$ , получим следующее уравнение относительно функции перемещения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu(\rho) r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right] + \frac{2\mu(\rho)}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \mu(\rho) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.4)$$

Пусть внешняя боковая поверхность цилиндрического вала  $r=R_0$  жестко закреплена, а скручивающая нагрузка приложена к левому торцу  $z=0$ . Кроме того, будем полагать, что внутренняя поверхность  $r=r_0$  и другой торец  $z=H$  свободны от нагрузки. Тогда граничные условия данной задачи можно записать в виде

$$\Psi(R_0, z) = 0, \quad \partial \Psi / \partial r |_{r=r_0} = 0, \quad 0 \leq z \leq H \quad (1.5)$$

$$\sigma_{z\theta} |_{z=0} = \mu(\rho) r \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{z=0} = f(r), \quad \sigma_{z\theta} |_{z=H} = \mu(\rho) r \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0 \quad (1.6)$$

Здесь функция  $f(r)$  задает распределение скручивающих усилий на торце  $z=0$ ,  $r_0 \leq r \leq R_0$ , причем  $f(R_0) = 0$ .

**2. Построение обобщенного интегрального преобразования.** В соответствии с общей схемой работы [7] рассмотрим вспомогательное уравнение вида

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ A(\rho) r \frac{\partial u}{\partial r} \right] + 2A(\rho) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = B(\rho) \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.1)$$

Решение уравнения (2.1) будем искать в области  $r_0 \leq r \leq R_0$ ,  $t \geq 0$  при следующих условиях:

$$u |_{t=0} = f(r), \quad r_0 \leq r \leq R_0 \quad (2.2)$$

$$\partial u / \partial r |_{r=r_0} = 0, \quad u |_{r=R_0} = 0 \quad (2.3)$$

Здесь  $A(\rho)$ ,  $B(\rho)$  — некоторые заданные однопериодические функции от «быстрой» переменной  $\rho = r/\varepsilon$ .

После применения преобразования Лапласа к (2.1) получим уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ A(\rho) r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right] + 2A(\rho) \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - pB(\rho) \bar{u} = -f(r)B(\rho)$$

$$\bar{u} = \int_0^{\infty} \exp(-pt) u(r, t) dt \quad (2.4)$$

Решение неоднородного уравнения (2.4) можно записать в виде

$$\bar{u}(r, p) = - \int_{r_0}^{r_0} \frac{f(\xi) B(\xi/\varepsilon)}{A(\xi)/\varepsilon W(\xi)} G(r, \xi, p) d\xi \quad (2.5)$$

$$G(r, \xi, p) = \begin{cases} \bar{u}_1(r, p) \bar{u}_2(\xi, p) & \text{при } r \leq \xi \\ \bar{u}_1(\xi, p) \bar{u}_2(r, p) & \text{при } \xi \leq r \end{cases}$$

$\bar{u}_1, \bar{u}_2$  — линейно-независимые решения однородного уравнения (2.4),  $W = W(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$  — вронскиан этих функций, причем пользуясь уравнением (2.4) можно доказать, что

$$W = C/(A(\rho)r^3), \quad C = \text{const} \quad (2.6)$$

Пользуясь методом осреднения [1—4], будем искать решения однородного уравнения (2.4) в форме ряда по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\bar{u} = u_0(r) + \varepsilon u_1(r, \rho) + \varepsilon^2 u_2(r, \rho) + \dots \quad (2.7)$$

где  $u_1(r, \rho), u_2(r, \rho), \dots$  — однопериодические функции по переменной  $\rho$ .

Подставляя (2.7) в однородное уравнение (2.4), разделяя переменные  $r$  и  $\rho$  при дифференцировании и приравнивая нулю члены со степенями  $\varepsilon^{-1}, \varepsilon^0$ , получим следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[ A(\rho) \frac{\partial u_1}{\partial \rho} \right] = -A'(\rho) u_0'(r) \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ A(\rho) \frac{\partial u_2}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ A(\rho) \frac{\partial u_1}{\partial r} \right] + A(\rho) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_1}{\partial \rho} \right) + \\ & + A(\rho) \frac{2}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \rho} + A(\rho) \left[ \frac{1}{r} (r u_0'(r))' + \frac{2}{r} u_0'(r) \right] - p B(\rho) u_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Переходя к последовательному определению функций  $u_1, u_2$ , полагаем

$$u_1 = N_1(\rho) u_0'(r) \quad (2.10)$$

Тогда из равенства (2.8) получим уравнение для определения локальной однопериодической функции  $N_1(\rho)$ :

$$\frac{d}{d\rho} \left[ A(\rho) \frac{dN_1}{d\rho} + A(\rho) \right] = 0, \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (2.11)$$

Периодическое решение (2.11) имеет вид

$$N_1(\rho) = C_1 \int_0^\rho A^{-1}(\xi) d\xi - \rho + N_{10} \quad (2.12)$$

$$C_1 = (\langle A^{-1} \rangle)^{-1}, \quad \langle A^{-1} \rangle = \int_0^1 A^{-1}(\xi) d\xi,$$

где  $N_{10}$  — произвольная постоянная, которую можно определить так, чтобы выполнялось условие

$$\langle N_1 \rangle = \int_0^1 N_1(\rho) d\rho = 0 \quad (2.13)$$

Теперь с учетом (2.10) из (2.9) получим уравнение относительно функции  $u_2(r, \rho)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ A(\rho) \frac{\partial u_2}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial}{\partial \rho} [A(\rho) N_1(\rho)] u_0''(r) + \\ & + \left[ A(\rho) + A(\rho) \frac{\partial N_1}{\partial \rho} \right] \left[ \frac{1}{r} (r u_0')' + \frac{2}{r} u_0' \right] - p B(\rho) u_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Условие разрешимости (2.14) в классе однопериодических функций по переменной  $\rho$  приводит к равенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} (r u_0')' + \frac{2}{r} u_0' - p \kappa^2 u_0 = 0 \\ & \kappa^2 = \langle B \rangle \langle A^{-1} \rangle \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из уравнения (2.15) определяется функция  $u_0(r)$ . Выберем в качестве линейно-независимых решений уравнения (2.15) следующие функции:

$$\begin{aligned} u_{01} &= \frac{1}{r} I_1(r \kappa \sqrt{p}) K_2(r_0 \kappa \sqrt{p}) + \frac{1}{r} K_1(r \kappa \sqrt{p}) I_2(r_0 \kappa \sqrt{p}) \\ u_{02} &= \frac{1}{r} I_1(r \kappa \sqrt{p}) K_1(R_0 \kappa \sqrt{p}) - \frac{1}{r} K_1(r \kappa \sqrt{p}) I_1(R_0 \kappa \sqrt{p}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $I_n(z)$ ,  $K_n(z)$  — модифицированные функции Бесселя.

Далее в соответствии с разложением (2.7) и пользуясь (2.10), (2.16), определим два независимых решения однородного уравнения (2.4):

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= [(1/r) I_1(r \kappa \sqrt{p}) K_2(r_0 \kappa \sqrt{p}) + (1/r) K_1(r \kappa \sqrt{p}) I_2(r_0 \kappa \sqrt{p})] + \\ & + \varepsilon \kappa \sqrt{p} N_1(\rho) [(1/r) I_2(r \kappa \sqrt{p}) K_2(r_0 \kappa \sqrt{p}) - (1/r) K_2(r \kappa \sqrt{p}) I_2(r_0 \kappa \sqrt{p})] + \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 &= [(1/r) I_1(r \kappa \sqrt{p}) K_1(R_0 \kappa \sqrt{p}) - (1/r) K_1(r \kappa \sqrt{p}) I_1(R_0 \kappa \sqrt{p})] + \\ & + \varepsilon \kappa \sqrt{p} N_1(\rho) [(1/r) I_2(r \kappa \sqrt{p}) K_1(R_0 \kappa \sqrt{p}) - (1/r) K_2(r \kappa \sqrt{p}) I_1(R_0 \kappa \sqrt{p})] + \dots \end{aligned}$$

В дальнейшем ограничимся только двумя членами ряда (2.7).

В соответствии с формулами (2.17) вычислим вронсиан решений  $\bar{u}_1$ ,  $\bar{u}_2$ , сохраняя при этом члены порядка  $\varepsilon$ . Можно показать, что с учетом равенства (2.13) формула для вронсиана имеет вид

$$\begin{aligned} W(\bar{u}_1, \bar{u}_2) &= C_1 r^{-3} A^{-1}(\rho) [I_1(R_0 \kappa \sqrt{p}) K_2(r_0 \kappa \sqrt{p}) + \\ & + I_2(r_0 \kappa \sqrt{p}) K_1(R_0 \kappa \sqrt{p})] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Отметим, что формула (2.18) согласуется с доказанной выше общей формулой для вронсиана (2.6). Подставляя (2.18) в (2.5), получим

$$\bar{u} = - \frac{1}{C_1} \int_{r_0}^{R_0} \frac{G(r, \xi, p) f(\xi) B(\xi/\varepsilon) \xi^3 d\xi}{[I_1(R_0 \kappa \sqrt{p}) K_2(r_0 \kappa \sqrt{p}) + I_2(r_0 \kappa \sqrt{p}) K_1(R_0 \kappa \sqrt{p})]} \quad (2.19)$$

После перехода к оригиналу в (2.19) находим

$$u(r, t) = - \frac{1}{C_1} \int_{r_0}^{R_0} J(r, \xi, t) f(\xi) B(\xi/\varepsilon) \xi^3 d\xi \quad (2.20)$$

где введено обозначение

$$J(r, \xi, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{G(r, \xi, p) \exp(pt) dp}{[I_1(R_0 \kappa \sqrt{p}) K_2(r_0 \kappa \sqrt{p}) + I_2(r_0 \kappa \sqrt{p}) K_1(R_0 \kappa \sqrt{p})]} \quad (2.21)$$

Если учесть известные соотношения для функций Бесселя  $I_1(iz) = -iJ_1(z)$ ,  $I_2(iz) = -J_2(z)$ ,  $K_1(iz) = -1/2\pi [J_1(z) - iY_1(z)]$ ,  $K_2(iz) = 1/2i\pi [J_2(z) - iY_2(z)]$ , ( $J_n(z)$ ,  $Y_n(z)$  — функции Бесселя 1-го и 2-го рода), то можно показать, что выражение

$$\Lambda(p) = I_1(R_0 \kappa \sqrt{p}) K_2(r_0 \kappa \sqrt{p}) + I_2(r_0 \kappa \sqrt{p}) K_1(R_0 \kappa \sqrt{p})$$

имеет простые нули при  $p = -\gamma_n^2 \kappa^{-2}$ , ( $\sqrt{p} = i\gamma_n/\kappa$ ), где  $\gamma_n$  — корни уравнения

$$J_1(R_0 \gamma_n) Y_2(r_0 \gamma_n) - J_2(r_0 \gamma_n) Y_1(R_0 \gamma_n) = 0 \quad (2.22)$$

Заметим, что численные значения первых десяти корней уравнения (2.22) при различных значениях отношения  $r_0/R_0$  приведены в [8].

Поскольку подынтегральное выражение в (2.21) имеет простые полюса при  $p = -\gamma_n^2 \kappa^{-2}$ , то по теореме о вычетах находим

$$J(r, \xi, t) |_{r \leq \xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{u}_1(r, -\gamma_n^2/\kappa^2) \bar{u}_2(\xi, -\gamma_n^2/\kappa^2)}{\Lambda'(p) |_{p=-\gamma_n^2/\kappa^2}} \exp(-\gamma_n^2 t/\kappa^2) \quad (2.23)$$

Используя соотношение (2.22), можно показать, что имеют место следующие равенства:

$$\Lambda'(p) |_{p=-\gamma_n^2/\kappa^2} = \frac{i\kappa^2}{2\gamma_n^2} \left[ \frac{J_2(r_0 \gamma_n)}{J_1(R_0 \gamma_n)} - \frac{J_1(R_0 \gamma_n)}{J_2(r_0 \gamma_n)} \right] \quad (2.24)$$

$$\bar{u}_1(r, -\gamma_n^2/\kappa^2) \bar{u}_2(\xi, -\gamma_n^2/\kappa^2) = -i \frac{\pi^2 J_1(R_0 \gamma_n)}{4 J_2(r_0 \gamma_n)} W_n(r) W_n(\xi) \quad (2.25)$$

$$W_n(r) = [(1/r) J_1(r \gamma_n) Y_2(r_0 \gamma_n) - (1/r) Y_1(r \gamma_n) J_2(r_0 \gamma_n)] - \varepsilon \gamma_n N_1(r/\varepsilon) [(1/r) J_2(r \gamma_n) Y_2(r_0 \gamma_n) - (1/r) Y_2(r \gamma_n) J_2(r_0 \gamma_n)] + \dots \quad (2.26)$$

Подставляя (2.24), (2.25) в (2.23), приходим к выражению для  $J(r, \xi, t)$ , справедливому при  $r \leq \xi$  и при  $r \geq \xi$ :

$$J(r, \xi, t) = -\kappa^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{-1} W_n(r) W_n(\xi) \exp(-\gamma_n^2 t/\kappa^2) \quad (2.27)$$

$$Q_n = \frac{2}{\pi^2 \gamma_n^2} \left[ \frac{J_2^2(r_0 \gamma_n)}{J_1^2(R_0 \gamma_n)} - 1 \right] \quad (2.28)$$

Теперь с учетом (2.27) формула (2.20) принимает вид

$$u(r, t) = \frac{1}{C_1 \kappa^2} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{-1} W_n(r) \exp(-\gamma_n^2 t/\kappa^2) \int_{r_0}^{R_0} f(\xi) B\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) W_n(\xi) \xi^3 d\xi \quad (2.29)$$

Искомое разложение получим из (2.29) при  $t=0$  в силу (2.2)

$$f(r) = \frac{1}{\langle B \rangle} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Q_n} W_n(r) \int_{r_0}^{R_0} f(\xi) B(\xi/\varepsilon) W_n(\xi) \xi^3 d\xi \quad (2.30)$$

Соотношение (2.30) удобнее представить в форме следующего представления функции  $f(r)$  в виде ряда

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n W_n(r) \quad (2.31)$$

коэффициенты которого определяются по формуле

$$A_n = \frac{1}{\langle B \rangle Q_n} \int_{r_0}^{R_0} f(\xi) B(\xi/\varepsilon) W_n(\xi) \xi^3 d\xi \quad (2.32)$$

Таким образом, соотношения (2.31), (2.32) в сочетании с (2.26), (2.28), (2.22) определяют новое обобщенное интегральное представление функции  $f(r)$ . В предельном частном случае постоянных функций  $A(\rho) = B(\rho) = \text{const}$  найденное представление сводится к известным формулам разложения, использованного в [8], поскольку локальная функция  $N_1(\rho)$ , согласно (2.12), (2.13), в этом случае равна нулю.

Отметим некоторые свойства функций  $W_n(r)$  (формула (2.26)). Непосредственно дифференцируя выражение для  $W_n(r)$ , можно показать, что функции  $W_n(r)$  являются приближенным решением уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r A(\rho) \frac{dW_n}{dr} \right] + 2A(\rho) \frac{1}{r} \frac{dW_n}{dr} + B(\rho) \frac{\gamma_n^2}{\kappa^2} W_n = 0 \quad (2.33)$$

Кроме того, функции  $W_n(r)$  приближенно удовлетворяют условиям

$$W_n(R_0) \cong 0, \quad dW_n/dr|_{r=r_0} \cong 0 \quad (2.34)$$

причем равенство  $W_n(R_0) = 0$  выполняется строго для первого члена разложения (2.26). Для второго члена оно в силу (2.13) выполняется после осреднения по слою материала, граничащему с контуром  $r=R_0$ . Выполнение условия  $dW_n/dr|_{r=r_0} = 0$  легко проверяется с помощью формулы

$$\frac{dW_n}{dr} = - \frac{\gamma_n C_1}{A(\rho)} \left[ \frac{1}{r} J_2(r\gamma_n) Y_2(r_0\gamma_n) - \frac{1}{r} Y_2(r\gamma_n) J_2(r_0\gamma_n) \right] + \dots$$

**3. Решение задачи о кручении композиционного вала.** Применим построенное в п. 2 обобщенное интегральное представление функции  $f(r)$  (2.31), (2.32) для решения задачи (1.4)–(1.6).

Решение уравнения (1.4) будем искать в виде ряда

$$\Psi(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(z) W_n(r) \quad (3.1)$$

полагая при этом  $A(\rho) = B(\rho) = \mu(\rho)$  в определении  $W_n(r)$ .

Подставляя (3.1) в (1.4) и учитывая (2.33), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функций  $\Psi_n(z)$ :

$$d^2 \Psi_n(z) / dz^2 - \gamma_n^2 \kappa^{-2} \Psi_n(z) = 0 \quad (3.2)$$

Так как решение (3.2) имеет вид  $\Psi_n(z) = C_n \operatorname{ch}(\gamma_n z / \kappa) + D_n \operatorname{sh}(\gamma_n z / \kappa)$ , то функция перемещения  $\Psi(r, z)$  будет равна

$$\Psi(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \operatorname{ch}(\gamma_n z / \kappa) + D_n \operatorname{sh}(\gamma_n z / \kappa)] W_n(r) \quad (3.3)$$

Перейдем теперь к удовлетворению граничных условий (1.5), (1.6). Условия (1.5) выполняются с принятой точностью в силу соотношений (2.34), (3.1). Из граничных условий (1.6) найдем постоянные  $C_n$ ,  $D_n$ . Подстановка формулы (3.3) в условия (1.6) приводит к следующим равенствам:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \kappa^{-1} D_n W_n(r) = \mu^{-1}(\rho) f(r) / r, \quad r_0 \leq r \leq R_0 \quad (3.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \kappa^{-1} \left[ C_n \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n H}{\kappa}\right) + D_n \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_n H}{\kappa}\right) \right] W_n(r) = 0, \quad r_0 \leq r \leq R_0 \quad (3.5)$$

Из соотношений (3.4), (3.5) на основании формул (2.31), (2.32) получим

$$C_n = -D_n \operatorname{cth}\left(\frac{\gamma_n H}{\kappa}\right), \quad D_n = \frac{\kappa}{\langle \mu \rangle \gamma_n Q_{n, r_0}} \int_{r_0}^{R_0} f(\xi) W_n(\xi) \xi^2 d\xi \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.3) получим решение задачи в виде

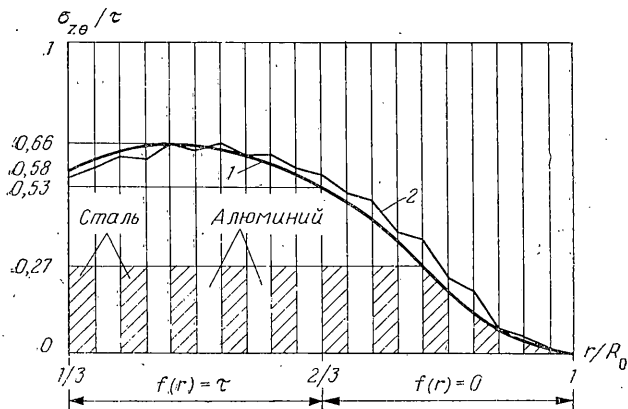
$$\Psi(r, z) = - \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\operatorname{ch}[\gamma_n \kappa^{-1}(H-z)]}{\operatorname{sh}(\gamma_n \kappa^{-1} H)} W_n(r) \quad (3.7)$$

При этом напряжения в цилиндре определяются по формулам

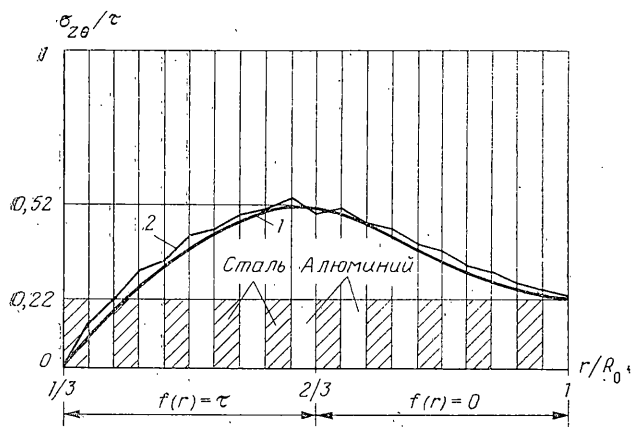
$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} &= -\mu(\rho) \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\operatorname{ch}[\gamma_n \kappa^{-1}(H-z)]}{\operatorname{sh}(\gamma_n \kappa^{-1} H)} r W_n'(r) \\ \sigma_{z\theta} &= \mu(\rho) \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\gamma_n \operatorname{sh}[\gamma_n \kappa^{-1}(H-z)]}{\kappa \operatorname{sh}(\gamma_n \kappa^{-1} H)} r W_n(r) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Все параметры и функции, входящие в соотношения (3.6)–(3.8) определены выше в формулах (2.22), (2.26), (2.28), постоянная  $\kappa$  равна  $\kappa = \langle \mu(\rho) \rangle \langle \mu^{-1}(\rho) \rangle^{1/2}$ .

В заключение, следует отметить, что полученное аналитическое решение имеет универсальный характер по отношению к выбору вида функции  $\mu(\rho)$ , которая и определяет структуру неоднородности материала внутри каждого повторяющегося слоя (см. фиг. 1). Эта функция, в частности, может быть кусочно-постоянной, т. е. принимать различные постоянные значения в областях, занятых разнородными компонентами композиционного материала. В случае, если функция  $\mu(\rho)$  некоторым образом фиксирована, полученное решение может быть значительно упрощено. При этом возникает необходимость вычисления интегралов, содержащих быстроосциллирующую составляющую (см. формулы (2.32), (3.6), (2.26)). Такие интегралы могут быть легко вычислены с принятой



Фиг. 2



Фиг. 3

В данной статье точностью порядка  $\varepsilon$  на основании следующей формулы:

$$\int_0^{r_0} f(r) B \left( \frac{r}{\varepsilon} \right) dr = \langle B \rangle \int_0^{r_0} f(r) dr + \varepsilon \langle \rho(B(\rho) - \langle B \rangle) \rangle [f(r_0) - f(0)] + O(\varepsilon^2) \quad (3.9)$$

4. Численный расчет в случае слоистого композиционного вала. Для определения численных значений поправок, даваемых развитым выше методом, рассмотрим осесимметричный слоистый композиционный вал, составленный из периодически чередующихся идеально скрепленных цилиндрических слоев стали и алюминия с модулями сдвига равными  $\mu_1 = 88$  ГПа и  $\mu_2 = 25$  ГПа соответственно. Положим также, что толщины каждого из этих слоев одинаковы и равны  $\varepsilon/2$ , причем  $\varepsilon = 0,1 \cdot (R_0 - r_0)$  (см. Фиг. 1).

Определим напряжения в данном слоистом композиционном полом цилиндре в случае, когда скручивающая нагрузка на торце  $z=0$ ,  $r_0 \leq r \leq R_0$  имеет вид

$$f(r) = \sigma_{z0}(r, 0) = \begin{cases} \tau = \text{const}, & r_0 \leq r \leq r^* < R_0 \\ 0, & r^* \leq r \leq R_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Далее при расчетах будем полагать  $r_0/R_0 = 1/3$ ,  $r^*/R_0 = 2/3$ ,  $H/R_0 = 4$ .

В указанном случае однопериодическое решение локальной задачи (2.12) может быть представлено в виде

$$N_1(\rho) = N_{10} - \rho + C_1 \begin{cases} \rho/\mu_1, & 0 \leq \rho \leq 1/2 \\ \rho/\mu_1 + (\rho - 1/2)/\mu_2, & 1/2 \leq \rho \leq 1 \end{cases} \quad (4.2)$$



Здесь  $C_1 = 2\mu_1\mu_2/(\mu_1 + \mu_2)$  и из условия (2.13) определим

$$N_{10} = 1/4(\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2) \quad (4.3)$$

Кроме того, получим

$$\kappa = (\mu_1 + \mu_2)/(2\mu_1^{1/2}\mu_2^{1/2}) \quad (4.4)$$

Воспользуемся далее решением задачи в квадратурах, найденным в п. 3. После подстановки в него соотношений (4.1)–(4.4) оно значительно упростится. Применяя формулу (3.9) для вычисления интегралов, содержащих быстроосциллирующие функции, с точностью до членов порядка  $\varepsilon$  и вычисляя все полученные в результате интегралы численно, по формулам (3.8) найдем распределения напряжений  $\sigma_{z0}$  и  $\sigma_{r0}$  в различных сечениях скручиваемого слоистого вала.

На фиг. 2 и 3 показаны распределения напряжений в сечении  $z/R_0 = 0,1$ , причем кривые 1 соответствуют осредненному решению (нулевое приближение), а осциллирующие кривые 2 на этих фигурах соответствуют решению с учетом членов порядка  $\varepsilon$ .

Отметим, что результаты, представленные на фиг. 2, 3, получены при удержании в разложениях (3.8) трех первых членов, как и в [8]. При этом осредненные решения (кривые 1 на фиг. 2, 3) качественно близки к решениям, найденным в [8] при других предположениях о строении вала.

Анализируя фиг. 2, 3, можно сделать вывод, что учет членов порядка  $\varepsilon$  позволил получить не только осцилляцию относительно осредненного решения, но и некоторое смещение значений напряжений относительно него.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sanchez-Palencia E. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory // Lect. Notes in Phys. 1980. V. 127. 398 p.
2. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984. 352 с.
3. Каламкарое А. Л., Кудрявцев Б. А., Паргон В. З. Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. Сер. мех. деформир. тверд. тела. М.: ВИНТИ. 1987. Т. 19. С. 78–147.
4. Победра Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
5. Каламкарое А. Л., Кудрявцев Б. А., Паргон В. З. Метод пограничного слоя в механике разрушения композитов периодической структуры // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 322–328.
6. Паргон В. З., Каламкарое А. Л., Борисковский В. Г. К исследованию локальных полей в окрестности макротрещины в композиционном материале периодической структуры // ФХММ. 1990. № 1. С. 3–9.
7. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики // Вопросы математической физики. Л.: Наука. 1976. С. 93–105.
8. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л., Наумов В. Э. О кручении неоднородных валов // В сб.: Механика деформируемого тела. М.: Наука, 1986. С. 23–33.

Афины, Москва

Поступила в редакцию  
4.X.1990