МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1992

УДК 539.3

 И. А. СОЛДАТЕНКОВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОСЫ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ

Рассматривается задача теории упругости для полосы переменной ширины при известных перемещениях ее границ. На основе представления Папковича – Нейбера и конформного отображения рассматриваемой полосы на полосу постоянной ширины задача сводится к системе интегральных уравнений относительно четырех неизвестных функций.

Для случая полосы со слабоизменяющейся шириной строится приближенное решение, отвечающее граничным перемещениям, отличие которых от заданных имеет степенной порядок малости по параметру близости границ полосы к прямым.

Аналитические результаты подтверждены численным анализом.

1. Постановка задачи. При дальнейшем изложении для краткости в местах, где это не может вызвать недоразумений будут опускаться аргументы в записях функций, а также индексы у компонент векторов и матриц. Частная производная функции нескольких переменных обозначается соответствующей переменной, взятой в качестве индекса. Для обозначения производной функции одной переменной также используется традиционное обозначение штрихом и $f^{(n)}(x)\equiv d^nf(x)/dx^n$. Для обозначения класса абсолютно интегрируемых функций одного переменного используется запись $L(-\infty, \infty)$, а для класса функций, имеющих n непрерывных производных – запись $C^n(-\infty, \infty)$. Знаком N_0^∞ будет обозначаться множество целых неотрицательных чисел.

Рассмотрим двумерную задачу для полосы П переменной ширины в плоскости $\zeta=\xi+i\eta$ (фиг. 1), при известных перемещениях ее границ. А именно. Пусть границы $\Gamma_\pm$ полосы П описываются функциями $\eta=h^\pm(\xi)$ (фиг. 1). Тогда, считая перемещения $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ точек полосы П непрерывными в замыкании $\overline{\Pi}$, представим граничные условия в виде

$$u|_{\Gamma_-}=w_1(\xi),\ v|_{\Gamma_-}=w_2(\xi),\ u|_{\Gamma_+}=w_3(\xi),\ v|_{\Gamma_+}=w_4(\xi) \tag{1.1}$$

где $w_j(\xi)$, $j=\overline{1, 4}$ – заданные функции.

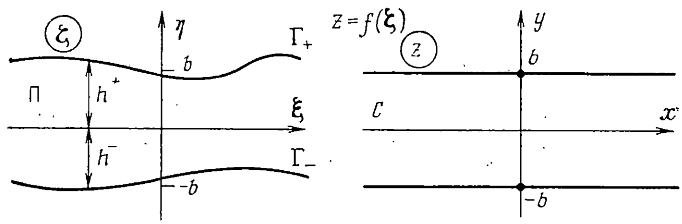
Используя представление Папковича – Нейбера [1], выразим перемещения u и v через две гармонические функции φ_1, φ_2:

$$2Gu(\xi, \eta)=-\varphi_{1\xi}(\xi, \eta)-\eta\varphi_{2\xi}(\xi, \eta) \tag{1.2}$$
$$2Gv(\xi, \eta)=\varkappa\varphi_2(\xi, \eta)-\varphi_{1\eta}(\xi, \eta)-\eta\varphi_{2\eta}(\xi, \eta)$$

где G – модуль сдвига, $\varkappa=3-4\nu$, ν – коэффициент Пуассона.

С учетом представления (1.2) имеем следующую граничную задачу для полосы П: найти гармонические в П функции φ_1, φ_2 такие, что граничные условия (1.1) удовлетворяются в силу равенств (1.2).

Перейдем от полосы П к полосе C постоянной ширины $2b$, для чего конформно отобразим П на C (фиг. 1). Рассмотрим, как при этом изменится задача (1.1), (1.2).



Фиг. 1

Пусть $z=f(\zeta)$ — аналитическая функция, осуществляющая конформное отображение П на C, а функция $\zeta=g(z)\equiv\Lambda(x, y)+i\mathrm{M}(x, y)$ — обратная к $f(\zeta)$. Функция $g(z)$ аналитическая в C, причем $\mathrm{M}_x^2+\mathrm{M}_y^2\neq 0$ при $(x, y)\in C$, так как в противном функция $f(\zeta)$ не будет аналитической в П [2]. Будем предполагать, что функции $\Lambda(x, y)$, $\mathrm{M}(x, y)$ и их первые производные непрерывно продолжимы на $\bar{C}$, причем $\mathrm{M}_x^2+\mathrm{M}_y^2\neq 0$ при $y=\pm b$. Обозначим $l(x, y)=\Lambda(x, y)-x$, $m(x, y)=\mathrm{M}(x, y)-y$. Пользуясь тем, что, в силу отображения $\zeta=g(z)$:

$$\xi=\Lambda(x,y)\equiv x+l(x,y),\quad \eta=\mathrm{M}(x,y)\equiv y+m(x,y) \tag{1.3}$$

введем в рассмотрение функции

$$\Phi_n(x, y)=\varphi_n(\Lambda(x, y), \mathrm{M}(x, y)),\ n=1, 2 \tag{1.4}$$

которые являются гармоническими в C, так как φ_1 и φ_2 гармонические в П. Пользуясь (1.3) нетрудно получить следующую связь производных от $\varphi_n(\xi, \eta)$ и $\Phi_n(x, y)$, $n=1, 2$:

$$\begin{aligned}\varphi_{n\xi}(\xi, \eta)&=[\Phi_{nx}(x, y)\,\mathrm{M}_y(x, y)-\Phi_{ny}(x, y)\mathrm{M}_x(x, y)]\times\\&\times(\mathrm{M}_x^2(x, y)+\mathrm{M}_y^2(x, y))^{-1}\\ \varphi_{n\eta}(\xi, \eta)&=[\Phi_{nx}(x, y)\,\mathrm{M}_x(x, y)-\Phi_{ny}(x, y)\mathrm{M}_y(x, y)]\times\\&\times(\mathrm{M}_x^2(x, y)+\mathrm{M}_y^2(x, y))^{-1}\end{aligned} \tag{1.5}$$

Введем также функции

$$\begin{aligned}U(x, y)&=2Gu(\Lambda(x, y), \mathrm{M}(x, y)),\\ V(x, y)&=2Gv(\Lambda(x, y), \mathrm{M}(x, y))\end{aligned} \tag{1.6}$$

Тогда, переходя в (1.2) от переменных ξ, η к переменным x, y, с учетом соотношения (1.5) нетрудно получить соотношения вида

$$U=-\Phi_{1x}-y\Phi_{2x}-\gamma_1\Phi_{1x}+\gamma_2\Phi_{1y}-\gamma_3\Phi_{2x}+\gamma_4\Phi_{2y} \tag{1.7}$$

$$V=\varkappa\Phi_2-\Phi_{1y}-y\Phi_{2y}-\gamma_2\Phi_{1x}-\gamma_1\Phi_{1y}-\gamma_4\Phi_{2x}-\gamma_3\Phi_{2y}$$

$$\gamma_1=\Delta+(1+\Delta)m_y,\quad \gamma_2=(1+\Delta)m_x,\quad \gamma_3=y\Delta+(1+\Delta)(m+ym_y+mm_y)$$

$$\gamma_4=(1+\Delta)(y+m)m_x,\quad \Delta=(\mathrm{M}_x^2+\mathrm{M}_y^2)^{-1}-1$$

причем, если ввести функции

$$\begin{aligned}W_j(x)&=2Gw_j(\Lambda(x, -b))\quad (j=1, 2)\\ W_j(x)&=2Gw_j(\Lambda(x, b))\quad (j=3, 4)\end{aligned} \tag{1.8}$$

то

$$\begin{aligned}U(x, -b)&=W_1(x),\quad V(x, -b)=W_2(x),\\ U(x, b)&=W_3(x),\quad V(x, b)=W_4(x)\end{aligned} \tag{1.9}$$

В результате имеем следующую граничную задачу для C, в которую переходит исходная задача (1.1), (1.2): найти гармонические в C функции Φ_1, Φ_2 такие, что граничные условия (1.9) удовлетворяются в силу равенств (1.7).

2. Основные интегральные уравнения. Введем в рассмотрение классы R и S функций, которые будут использоваться ниже. Будем считать, что $f(x)\in R$, если $\forall n\in N_0^\infty$:

$$f(x)\in C^1(-\infty,\infty),\quad (1+|x|^n)f(x)\in L(-\infty,\infty)$$

и $f(x)\in S$, если $\forall n\in N_0^\infty$:

$$f(x)\in C^n(-\infty,\infty);\quad f^{(n)}(x)\to 0,\quad |x|\to\infty$$

$$f^{(n)}(x)\in L(-\infty,\infty);\quad (1+|x|^2)f(x)\in L(-\infty,\infty)$$

К R и S, в частности, принадлежат бесконечно дифференцируемые и экспоненциально убывающие на бесконечности функции, например, $f(x)=\operatorname{ch}^{-1}x$, $f(x)=\exp(-x^2)\cos x$.

Возьмем $A_k(\mu)\in R$, $k=\overline{1,4}$ и представим

$$\Phi_1(x,y)=(2\pi)^{-1/2}\,\text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{A_1(\mu)}{\mu}\frac{\operatorname{ch}\mu y}{\operatorname{ch}Z}+\frac{A_2(\mu)}{\mu^2}\frac{\operatorname{sh}\mu y}{\operatorname{ch}Z}\right]e^{-i\mu x}\,d\mu$$

$$\Phi_2(x,y)=(2\pi)^{-1/2}\,\text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{A_3(\mu)}{\mu}\frac{\operatorname{ch}\mu y}{\operatorname{ch}Z}+\frac{A_4(\mu)}{\mu}\frac{\operatorname{sh}\mu y}{\operatorname{ch}Z}\right]e^{-i\mu x}\,d\mu \tag{2.1}$$

$$Z=\mu b$$

Нетрудно показать, что функции Φ_1, Φ_2, определяемые по (2.1), и их производные непрерывны и ограничены на $\overline{C}$, причем производные от Φ_1, Φ_2 можно определять дифференцированием подынтегрального выражения [3]. Непосредственно проверяется, что Φ_1, Φ_2 гармонически в C, а производные Φ_{1x}, Φ_{2x}, Φ_{2y} представляются классическими интегралами Фурье, для которых справедлива формула их обращения [4].

Наложим ограничения на функции $w_j(\xi)$, $j=\overline{1,4}$, $l(x,y)$ и $m(x,y)$. А именно, будем предполагать, что $w_j(\xi)$, а также l, m, l_y, m_y, xl, xm, xl_y, xm_y при $y=\pm b$ принадлежат классу S. Тогда можно показать, что классу S будут принадлежать и функции $W_j(x)$, $\gamma_j(x,\pm b)$, $j=\overline{1,4}$.

Перейдем теперь к рассмотрению задачи (1.7), (1.9), которую с учетом непрерывности на $\overline{C}$ функций γ_j, Φ_n, Φ_{nx}, Φ_{ny}, $n=1,2$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
W_1(x)&=(-\Phi_{1x}+b\Phi_{2x}-\gamma_1\Phi_{1x}+\gamma_2\Phi_{1y}-\gamma_3\Phi_{2x}+\gamma_4\Phi_{2y})\,|_{y=-b}\\
W_2(x)&=(\varkappa\Phi_2-\Phi_{1y}+b\Phi_{2y}-\gamma_2\Phi_{1x}-\gamma_1\Phi_{1y}-\gamma_4\Phi_{2x}-\gamma_3\Phi_{2y})\,|_{y=-b}\\
W_3(x)&=(-\Phi_{1x}-b\Phi_{2x}-\gamma_1\Phi_{1x}+\gamma_2\Phi_{1y}-\gamma_3\Phi_{2x}+\gamma_4\Phi_{2y})\,|_{y=b}\\
W_4(x)&=(\varkappa\Phi_2-\Phi_{1y}-b\Phi_{2y}-\gamma_2\Phi_{1x}-\gamma_1\Phi_{1y}-\gamma_4\Phi_{2x}-\gamma_3\Phi_{2y})\,|_{y=b}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Заметим, что $W_j(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$ (так как $W_j(x)\in S$), поэтому правые части (2.2) также должны исчезать на бесконечности. Ввиду того, что производные функций $\Phi_1(x,y)$, $\Phi_2(x,y)$ ограничены, а $\gamma_j(x,\pm b)\to 0$ при $|x|\to\infty$, слагаемые в правых частях (2.2) вида $\gamma_j\Phi_{nx,y}|_{y=\pm b}$ удовлетворяют этому требованию. Слагаемые $\Phi_{1x}(x,\pm b)$, $\Phi_{2x}(x,\pm b)$, $\Phi_{2y}(x,\pm b)$, представляемые согласно (2.1) интегралами Фурье, тоже стремятся к 0 при $|x|\to\infty$, так что в целом, правые части (2.2) будут исчезать на бесконечности, если

$$\lim_{|x|\to\infty}(\varkappa\Phi_2(x,\pm b)-\Phi_{1y}(x,\pm b))=0 \qquad (2.3)$$

Нетрудно показать [3], что для $f(\lambda)\in L(-\infty,\infty)\cap C^1(-\infty,\infty)$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\lambda} e^{-i\lambda x}\, d\lambda=\mp i\pi f(0)$$

Используя последнее равенство и представления (2.1), получим из (2.3):

$$A_2(0)-\varkappa A_3(0)=0 \qquad (2.4)$$

Таким образом, чтобы правые части (2.2), как левые исчезали на бесконечности, достаточно потребовать выполнения равенства (2.4).

Умножим теперь первое уравнение (2.2) на $(2\pi)^{-1/2}\exp(i\lambda x)$ и проинтегрируем его по x от $-\infty$ до ∞. В результате, учитывая для $\Phi_{1x}(x,\pm b)$, $\Phi_{2x}(x,\pm b)$ формулу обращения интеграла Фурье [4], получим

$$W_1{}^*(\lambda)=iA_1(\lambda)-i\frac{A_2(\lambda)}{\lambda}\operatorname{th}X-ibA_3(\lambda)+ibA_4(\lambda)+I_1(\lambda) \qquad (2.5)$$

$$I_1(\lambda)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}(-\gamma_1\Phi_{1x}+\gamma_2\Phi_{1y}-\gamma_3\Phi_{2x}+\gamma_4\Phi_{2y})\,|_{y=-b}e^{i\lambda x}\,dx \qquad (2.6)$$

Здесь и далее звездочка у символа функции обозначает ее Фурье-образ.

В выражении (2.6) функции Φ_{nx}, Φ_{ny}, $n=1, 2$ представляются интегралами согласно (2.1). При условии, что $A_k(\mu)\in R$, $\gamma_j(x,\pm b)\in S$ порядок интегрирования в (2.6) можно изменить [3] и получить выражение

$$\begin{aligned}I_1(\lambda)=(2\pi)^{-1/2}\,\text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[&(i\gamma_1^{-*}(\rho)-\gamma_2^{-*}(\rho)\operatorname{th}Z)A_1(\mu)-\\ &-\Big(i\gamma_1^{-*}(\rho)\frac{\operatorname{th}Z}{\mu}-\gamma_2^{-*}(\rho)\mu^{-1}\Big)\times\\ &\times A_2(\mu)+(i\gamma_3^{-*}(\rho)-\gamma_4^{-*}(\rho)\operatorname{th}Z)A_3(\mu)-\\ &-(i\gamma_3^{-*}(\rho)\operatorname{th}Z-\gamma_4^{-*}(\rho))A_4(\mu)\Big]d\Lambda\end{aligned} \qquad (2.7)$$

где $\rho=\lambda-\mu$, $\gamma_j^{\pm*}(\lambda)$ — Фурье-образы функций $\gamma_j(x,\pm b)$ по x.

Равенства аналогичные (2.5) и (2.7) получаются и для 3-го уравнения (2.2), тогда как для 2-го и 4-го уравнений (2.2) этого сделать не удается, так как функции $\Phi_2(x,\pm b)$ и $\Phi_{1y}(x,\pm b)$ не представляются интегралами Фурье согласно (2.1) — подынтегральные функции в выражениях для них имеют сингулярную особенность. Однако, нетрудно видеть, что производные по x от данных функции лишены указанного недостатка и для представлений $\Phi_{2x}(x,\pm b)$, $\Phi_{1yx}(x,\pm b)$ согласно (2.1) справедлива формула обращения интеграла Фурье. Поэтому, если сначала продифференцировать 2-е и 4-е уравнения (2.2) по x, а потом уже интегрировать их по x от $-\infty$ до ∞ со множителем $(2\pi)^{-1/2}\exp(i\lambda x)$, то для 2-го и 4-го уравнений (2.2) получаются уравнения типа (2.5) и (2.7). При этом функции $A_k(\lambda)\in R$, удовлетворяющие этим уравнениям, а следовательно и продифференцированным по x 2-у и 4-у уравнениям (2.2) удовлетворяют и соответствующим исходным уравнениям (2.2), так как при подстановке таких $A_k(\lambda)$ во 2-е и 4-е уравнения (2.2) их левые и правые части могут отличаться только на константу, которая должна быть нулем в силу исчезновения левых и правых частей (2.2) на бесконечности (условие (2.4) считается выполненным).

Производя указанные действия над 2-м, 3-м и 4-м уравнениями (2.2) и присоединяя к полученным таким образом соотношениям равенства (2.5) и (2.7), придем к следующей системе уравнений для $A_k(\lambda)$, $k=\overline{1,\ 4}$:

$$W_j^*(\lambda)=\alpha_{jk}(\lambda)A_k(\lambda)+(2\pi)^{-1/2}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_{jk}(\rho,\mu)A_k(\mu)\,d\mu \tag{2.8}$$

$$B_{jk}=\begin{bmatrix} s_{12}^- & -it_{12}^-/\mu & s_{34}^- & -it_{34}^- \\ t_{12}^- & is_{12}^-/\mu & t_{34}^- & is_{34}^- \\ s_{12}^+ & -it_{12}^+/\mu & s_{34}^+ & -it_{34}^+ \\ -t_{12}^+ & is_{12}^+/\mu & t_{34}^+ & is_{34}^+ \end{bmatrix},\qquad \begin{aligned} s_{lm}^{\pm} &= i\gamma_l^{\pm *}(\rho)\pm\gamma_m^{\pm *}(\rho)\,\mathrm{th}\,Z \\ t_{lm}^{\pm} &= \mp\gamma_l^{\pm *}(\rho)\,\mathrm{th}\,Z+i\gamma_m^{\pm *}(\rho) \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\alpha_{jk}(\lambda)=\begin{bmatrix} i & -ibX^{-1}\,\mathrm{th}\,X & -ib & ib\,\mathrm{th}\,X \\ \mathrm{th}\,X & -bX^{-1} & b(\varkappa X^{-1}-\mathrm{th}\,X) & b(1-\varkappa X^{-1}\,\mathrm{th}\,X) \\ i & ibX^{-1}\,\mathrm{th}\,X & ib & ib\,\mathrm{th}\,X \\ -\mathrm{th}\,X & -bX^{-1} & b(\varkappa X^{-1}-\mathrm{th}\,X) & -b(1-\varkappa X^{-1}\,\mathrm{th}\,X) \end{bmatrix}$$

$X=\lambda b$, а по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Удовлетворяющие интегральным уравнениям (2.8) функции $A_k(\lambda)$ на основе равенств (2.1) и отображения $z=f(\zeta)$ определяют решение поставленной граничной задачи для полосы П.

Если обозначить через β матрицу, обратную к α:

$$\beta_{km}(\lambda)=\begin{bmatrix} \dfrac{-in_1\,\mathrm{ch}\,X}{2d_2} & \dfrac{X\,\mathrm{sh}\,X\,\mathrm{ch}\,X}{2d_2} & \dfrac{-in_1\,\mathrm{ch}\,X}{2d_2} & \dfrac{-X\,\mathrm{sh}\,X\,\mathrm{ch}\,X}{2d_2} \\ \dfrac{iXn_2\,\mathrm{ch}\,X}{2bd_1} & \dfrac{-X^2\,\mathrm{ch}^2\,X}{2bd_1} & \dfrac{-iXn_2\,\mathrm{ch}\,X}{2bd_1} & \dfrac{-X^2\,\mathrm{ch}^2\,X}{2bd_1} \\ \dfrac{itX\,\mathrm{ch}^2\,X}{2bd_1} & \dfrac{X\,\mathrm{sh}\,X\,\mathrm{ch}\,X}{2bd_1} & \dfrac{-iX\,\mathrm{ch}^2\,X}{2bd_1} & \dfrac{X\,\mathrm{sh}\,X\,\mathrm{ch}\,X}{2bd_1} \\ \dfrac{-iX\,\mathrm{sh}\,X\,\mathrm{ch}\,X}{2bd_2} & \dfrac{-X\,\mathrm{ch}^2\,X}{2bd_2} & \dfrac{-iX\,\mathrm{sh}\,X\,\mathrm{ch}\,X}{2bd_2} & \dfrac{X\,\mathrm{ch}^2\,X}{2bd_2} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

$$n_1=\varkappa\,\mathrm{sh}\,X-X\,\mathrm{ch}\,X,\qquad n_2=\varkappa\,\mathrm{ch}\,X-X\,\mathrm{sh}\,X,\qquad \left\{\begin{matrix} d_1 \\ d_2 \end{matrix}\right\}=\frac{\varkappa}{2}\,\mathrm{sh}\,2X\pm X$$

то систему (2.8) можно представить в виде

$$P_k(\lambda)=A_k(\lambda)+(2\pi)^{-1/2}\beta_{km}(\lambda)\left(\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_{mj}(\rho,\mu)A_j(\mu)\,d\mu\right) \tag{2.11}$$

где $P_k=\beta_{kj}W_j^*$, причем $P_k(\lambda)\in R$.

3. Приближенное решение интегральных уравнений. Будем далее считать, что полосы П и C слабо отличаются друг от друга. А именно, положим

$$l(x,\ y)=\varepsilon l_0(x,\ y),\quad m(x,\ y)=\varepsilon m_0(x,\ y) \tag{3.1}$$

так что $g(z)=z+\varepsilon(l_0(x,\ y)+im_0(x,\ y))$, где ε — малый параметр, l_0, m_0 — некоторые функции.

Конформное отображение полосы П на полосу C в случае, когда они близки, может быть приближенно описано на основе вариационных принципов конформных отображений [5].

В дальнейшем будем указывать зависимость рассматриваемых функций от ε, например, $A_k(\lambda;\ \varepsilon)$, $W_j^*(\lambda;\ \varepsilon)$, $P_k(\lambda;\ \varepsilon)$ и так далее. Отметим, что введенные выше функции $l_0(x,\ y)$ и $m_0(x,\ y)$ от ε не зависят, как и граничные перемещения $w_j(\xi)$, $j=\overline{1, 4}$.

Введем в рассмотрение операторы $K_{jk}\hat{}$ и $L_{jk}\hat{}$:

$$(K_{jk}\hat{}A_k)(\lambda;\varepsilon)=(2\pi)^{-1/2}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_{jk}(\rho,\mu;\varepsilon)A_k(\mu;\varepsilon)d\mu$$

$$(L_{jk}\hat{}A_k)(\lambda;\varepsilon)=\beta_{jm}(\lambda)(K_{mk}\hat{}A_k)(\lambda;\varepsilon) \qquad (3.2)$$

и запишем уравнения (2.8) и (2.11) в виде

$$W_j^*=\alpha_{jk}A_k+K_{jk}\hat{}A_k \qquad (3.3)$$

$$P_k=A_k+L_{km}\hat{}A_m \qquad (3.4)$$

где $P_k(\lambda;\varepsilon)=\beta_{kj}(\lambda)W_j^*(\lambda;\varepsilon)$. Из определения операторов $K\hat{}$ и $L\hat{}$ (соотношения (2.9), (3.2)) и равенств (3.1) следует, что

$$K\hat{}=\varepsilon K_0\hat{},\quad L\hat{}=\varepsilon L_0\hat{} \qquad (3.5)$$

где $K_0\hat{}$ и $L_0\hat{}$ операторы, отвечающие значению $\varepsilon=1$ в (3.2).

Нетрудно показать [3], что при наложенных выше на функции $l(x, y)$, $m(x, y)$ ограничениях оператор $L\hat{}$, а следовательно и $K\hat{}$, $L_0\hat{}$, $K_0\hat{}$ отображают класс R в себя. Возьмем тогда в качестве приближенного решения уравнений (3.4) функции $A_k^{[N]}(\lambda;\varepsilon)\in R$, $k=\overline{1, 4}$ вида

$$A_k^{[N]}=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(L\hat{})_{kj}^nP_j \qquad (3.6)$$

где $(L\hat{})_{kj}^nP_j\equiv L\hat{}_{kj_1}L\hat{}_{j_1j_2}\ldots L\hat{}_{j_{n-1}j}P_j$ есть результат n-кратного действия оператора $L\hat{}$ на вектор P, $N\in N_0^\infty$.

С учетом выражения (2.10) для компонент матрицы β и соотношения $L\hat{}=\beta K\hat{}$, непосредственно проверяется выполнение условия (2.4) для $A_2^{[N]}$ и $A_3^{[N]}$.

Приближенному решению $A_k^{[N]}$, на основании равенств $z=f(\zeta)$, (2.1), (1.4) и (1.2), отвечают некоторые перемещения $u^{[N]}$, $v^{[N]}$ точек полосы П и связанные с $u^{[N]}$, $v^{[N]}$ равенствами типа (1.1) граничные перемещения $w_j^{[N]}(\xi;\varepsilon)$, $j=\overline{1, 4}$. Таким образом, функции $A_k^{[N]}$ определяют точное решение задачи теории упругости для полосы П при граничных перемещениях $w_j^{[N]}$. Рассмотрим в связи с этим вопрос о близости заданных граничных перемещений w_j и граничных перемещений $w_j^{[N]}$, которым отвечает приближенное решение $A_k^{[N]}$ вида (3.6). Справедлива следующая теорема.

Теорема. При наложенных на функции $w_j(\xi)$, $l(x, y)$, $m(x, y)$ условиях для любого $N\in N_0^\infty$ существуют константы $\varepsilon_1>0$, h_n и функции $t_j(\xi;\varepsilon)$ такие, что при $\varepsilon\in[0, \varepsilon_1]$ и $n\in N_0^\infty$

$$w_j^{[N]}(\xi;\varepsilon)-w_j(\xi)=\varepsilon^{N+1}t_j(\xi;\varepsilon)\quad (j=\overline{1, 4}) \qquad (3.7)$$

$$|t_j^{(n)}(\xi;\varepsilon)|\leqslant h_n \qquad (3.8)$$

причем ε_1 от N не зависит.

Доказательство. Обозначим через $W_j^{[N]}(x;\varepsilon)$ функции, соответствующие $w_j^{[N]}(\xi;\varepsilon)$ в силу отображения $z=f(\zeta)$ и определяемые равенствами типа (1.8). Установим вначале связь $W_j^{[N]}$ с W_j. Имеем из (3.4) и (3.6):

$$P_k^{[N]}=A_k^{[N]}+L_{km}\hat{}A_m^{[N]}=P_k+(-1)^N(L\hat{}L\hat{}^N)_{km}P_m \qquad (3.9)$$

$$P_k^{[N]}=\beta_{kj}{}^{*[N]}\quad (k=\overline{1, 4})$$

Умножим левую и правую части (3.9) на матрицу $\alpha=\beta^{-1}$ и учтем равенства $\alpha L^{\wedge}=K^{\wedge}$, $\alpha P=W^*$ и (3.5). В результате получим

$$W_j^{*[N]}=W_j^*+\varepsilon^{N+1}T_j^* \tag{3.10}$$

$$T_j^*=(-1)^N(K_0^{\wedge}L_0^{\wedge N})_{jk}P_k \quad (j=\overline{1, 4}) \tag{3.11}$$

Заметим, что $T_j^*(\lambda;\ \varepsilon)\in R$, так как $P_k(\lambda;\ \varepsilon)\in R$, а операторы $L_0^{\wedge}$ и $K_0^{\wedge}$ отображают R в себя. Поэтому существуют Фурье-прообразы $T_j(x;\ \varepsilon)$ функций $T_j^*(\lambda;\ \varepsilon)$, причем [4]:

$$T_j^{(n)}(x;\varepsilon)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(-i\lambda)^n T_j^*(\lambda;\varepsilon)e^{-i\lambda x}\,d\lambda, \qquad n\in N_0^{\infty} \tag{3.12}$$

Учитывая также, что и $W_j^*(\lambda;\ \varepsilon)\in R$, получим из (3.10) следующую связь $W_j^{[N]}$ с W_j:

$$W_j^{[N]}(x;\ \varepsilon)=W_j(x;\ \varepsilon)+\varepsilon^{N+1}T(x;\ \varepsilon) \tag{3.13}$$

Покажем теперь, что существуют константы $\varepsilon_1>0$ и H_n, такие, что при $\varepsilon\in[0,\ \varepsilon_1]$:

$$|T_j^{(n)}(x;\ \varepsilon)|\leqslant H_n, \quad n\in N_0^{\infty} \quad (j=\overline{1, 4}) \tag{3.14}$$

Прежде всего, на основании (1.3), (1.8) и (3.1) имеем

$$W_j(x;\ \varepsilon)=w_j(x+\varepsilon l_{0j}(x)) \tag{3.15}$$

где $l_{0j}(x)=l_0(x,\ -b)$ при $j=1,\ 2$, $l_{0j}(x)=l_0(x,\ b)$ при $j=3,\ 4$.

Далее, пользуясь принадлежностью функций $l_{0j}(x)$ к S, введем в рассмотрение константы

$$\varkappa_n=\max_{x,j}|l_{0j}^{(n)}(x)| \tag{3.16}$$

и возьмем $\varepsilon_1\in(0,\ \varkappa_1^{-1})$. Получим ряд неравенств, полагая везде $\varepsilon\in[0,\ \varepsilon_1]$. Имеем [4]:

$$(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_j^{(l)}(x;\varepsilon)e^{i\lambda x}\,dx=(-i\lambda)^l W_j^*(\lambda;\ \varepsilon), \qquad l\in N_0^{\infty} \tag{3.17}$$

С другой стороны, производя замену $x\to\xi$ в левой части (3.17) по правилу

$$\xi=x+\varepsilon l_{0j}(x) \tag{3.18}$$

и учитывая соотношения (3.15), $|\varepsilon l_{0j}'(x)|<1$, $|l_{0j}^{(n)}(x)|\leqslant\varkappa_n$ и $w_j(\xi)\in S$, нетрудно установить существование констант r_l таких, что

$$\left|(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_j^{(l)}(x;\varepsilon)e^{i\lambda x}\,dx\right|\leqslant r_l, \qquad l\in N_0^{\infty} \tag{3.19}$$

Из (3.17) и (3.19) непосредственно вытекает неравенство

$$|W_j^*(\lambda;\ \varepsilon)|\leqslant r_l|\lambda|^{-l} \tag{3.20}$$

справедливое для любого $l\in N_0^{\infty}$. Аналогично (3.19) можно установить неравенство

$$|W_j^{*\prime}(\lambda;\varepsilon)|=\left|(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}ixW_j(x;\varepsilon)e^{i\lambda x}\,dx\right|\leqslant r^+=\text{const} \tag{3.21}$$

В свою очередь, из неравенств (3.20) и (3.21), с учетом гладкости функций $\beta_{kj}(\lambda)$, следуют неравенства для $P_k=\beta_{kj}W_j^*$:

$$|P_k(\lambda;\ \varepsilon)|\leqslant q_l|\lambda|^{-l},\quad \lambda\in(-\infty,\ \infty) \tag{3.22}$$

$$|P_k'(\lambda;\ \varepsilon)|\leqslant q^+,\quad \lambda\in[-1,\ 1] \tag{3.23}$$

где q_l, q^+ — константы, $l\in N_0^\infty$, $k=\overline{1,\ 4}$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма. Пусть $|f(\lambda;\ \varepsilon)|\leqslant f_l(\lambda)$ и при $|\lambda|\leqslant 1: |f'(\lambda;\ \varepsilon)|\leqslant a=\text{const}$, где $l=2, 3, \ldots, (1+|\lambda|^l)f_l(\lambda)\in L(-\infty, \infty)$, $f_l(\lambda)\in C(-\infty, \infty)$. Тогда, если $g=L_0\hat{}f$ или $g=K_0\hat{}f$, то найдутся функция $g_m(\lambda)$ и константа b такие, что $|g(\lambda;\ \varepsilon)|\leqslant g_m(\lambda)$ и при $|\lambda|\leqslant 1: |g'(\lambda;\ \varepsilon)|\leqslant b$, причем $m=l-2$, $(1+|\lambda|^m)g_m(\lambda)\in L(-\infty,\ \infty)$, $g_m(\lambda)\in C(-\infty,\ \infty)$.

Доказательства данной леммы не составляет трудностей и ввиду его громоздкости опускается.

Воспользуемся полученными неравенствами и леммой. Фиксируем $n\in N_0^\infty$, возьмем $l=2(N+1)+n$ и определим функцию $D_l(\lambda)$ следующим образом

$$D_l(\lambda)=\begin{cases} q_{l+2}|\lambda|^{-(l+2)}, & q_{l+2}|\lambda|^{-(l+2)}\leqslant q_0 \\ q_0, & q_0<q_{l+2}|\lambda|^{-(l+2)} \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что $(1+|\lambda|^l)D_l(\lambda)\in L(-\infty,\ \infty)$, $D_l(\lambda)\in C(-\infty, \infty)$, а из (3.22) следует, что $|P_k(\lambda;\ \varepsilon)|\leqslant D_l(\lambda)$, $k=\overline{1,\ 4}$, причем имеет место неравенство (3.23). Таким образом, условия леммы для функций $P_k(\lambda;\ \varepsilon)$ выполнены.

Используя лемму последовательно $(N+1)$ раз для каждого действия операторов $L_0\hat{}$, $K_0\hat{}$ в выражении (3.11) для $T_j^*(\lambda;\ \varepsilon)$, $j=\overline{1,\ 4}$, можно установить существование функции $E_n(\lambda)$ такой, что

$$\left.\begin{aligned} &|T_j^*(\lambda;\ \varepsilon)|\leqslant E_n(\lambda) \\ &(1+|\lambda|^n)E_n(\lambda)\in L(-\infty,\ \infty) \end{aligned}\right. \tag{3.24}$$

Из (3.24) и (3.12) следует неравенство (3.14), так как

$$|T_j^{(n)}(x;\ \varepsilon)|\leqslant(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|\lambda|^n)E_n(\lambda)\,d\lambda\equiv H_n<\infty$$

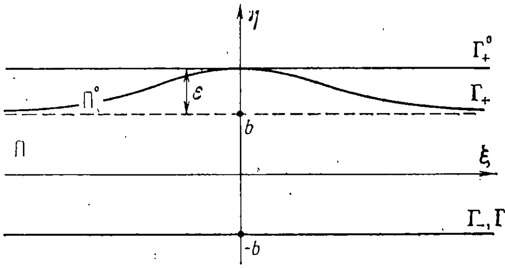
Перейдем теперь в (3.13) от переменной x к переменной ξ согласно равенству (3.18). Заметим при этом, что, в силу соотношений $|l_{0j}'(x)|\leqslant\varkappa_1$ и $\varepsilon\in[0,\ \varepsilon_1]$, где $\varepsilon_1\in(0,\ \varkappa_1^{-1})$, равенство (3.18) при заданных ξ и j однозначно разрешимо относительно x (например, методом последовательных приближений), т. е. имеет место взаимнооднозначное соответствие переменных x и ξ для каждого $j=\overline{1,\ 4}$. В результате, учитывая, что при указаном переходе от x к ξ функции $W_j^{[N]}(x;\ \varepsilon)$, $W_j(x;\ \varepsilon)$ переходят, соответственно, в $w_j^{[N]}(\xi;\ \varepsilon)$, $w_j(\xi)$, получим

$$w_j^{[N]}(\xi;\ \varepsilon)=w_j(\xi)+\varepsilon^{N+1}t_j(\xi;\ \varepsilon) \tag{3.25}$$

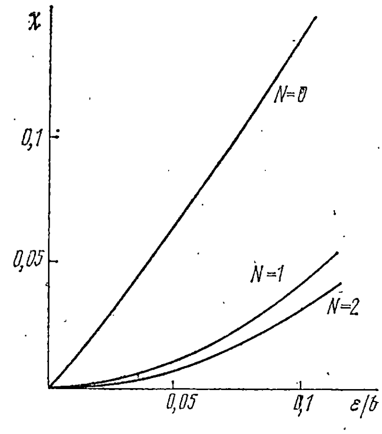
$$2Gt_j(\xi;\ \varepsilon)=T_j(x;\ \varepsilon),\quad \xi=x+\varepsilon l_{0j}(x) \tag{3.26}$$

Равенство (3.25) эквивалентно (3.7) и для завершения доказательства теоремы осталось установить неравенство (3.8).

Справедливость неравенства (3.8) для $n=0$ непосредственно следует из (3.14) и (3.26) при $h_0=H_0$. Продифференцируем (3.26) по x, принимая



Фиг. 2



Фиг. 3

во внимание связь ξ и x (3.18). В результате получим

$$t_j'(\xi;\ \varepsilon)=T_j'(x;\ \varepsilon)\,(1+\varepsilon l_{0j}'(x))^{-1}$$

откуда в силу (3.14) и того, что $\varepsilon\in[0,\ \varepsilon_1]$, где $\varepsilon_1\in(0,\ \varkappa_1^{-1})$, имеем (3.8) при $n=1$:

$$|t_j'(\xi;\ \varepsilon)|\leqslant H_1(1-\varepsilon_1\varkappa_1)^{-1}\equiv h_1$$

Аналогичным образом, дифференцируя (3.26) n раз по x и используя (3.14), нетрудно установить неравенство (3.8) для произвольного $n\in N_0^\infty$. Теорема доказана.

Согласно доказанной теореме, граничные перемещения $w_j^{[N]}(\xi;\ \varepsilon)$, отвечающие приближенному решению $A_k^{[N]}(\lambda;\ \varepsilon)$ вида (3.6) и их наперед заданное число производных $w_j^{[N](n)}(\xi;\ \varepsilon)$ будут при уменьшении ε поточечно сколь угодно мало отличаться от заданных граничных перемещений $w_j(\xi)$ и соответствующих производных $w_j^{(n)}(\xi)$, причем это отличие имеет порядок малости $O(\varepsilon^{N+1})$.

В свою очередь, из данного результата, при условии непрерывной зависимости решения задачи теории упругости от граничных перемещений (ее корректности) [6] следует, что приближенное решение граничной задачи для полосы П, определяемое функциями $A_k^{[N]}(\lambda;\ \varepsilon)$ вида (3.6) стремится при $\varepsilon\to0$ к точному решению, причем тем быстрее, чем больше число N.

4. Численная проверка приближенного решения. Результат, касающийся увеличения скорости сходимости по ε приближенного решения, определяемого функциями $A_k^{[N]}$ вида (3.6) к точному решению при увеличении N проверялся путем численной реализации процедуры интегрирования с дискретной аппроксимацией функций. Сравнивались точное напряженное состояние полосы П и напряженное состояние П, отвечающее приближенному решению $A_k^{[N]}(\lambda;\ \varepsilon)$ при различных N и ε.

Для задания точного напряженного состояния полосы П вводилась вспомогательная полоса П° постоянной ширины $2b°$, содержащая полосу П (фиг. 2) и для нее ставилась задача теории упругости при заданных перемещениях $w_j°(\xi)$ ее границ $\Gamma_\pm°$ (граничные условия типа (1.1)), решение которой известно [1]. Соответствующее напряженное состояние полосы П° целиком определяет напряженное состояние полосы П (так как П⊂П°), а также отвечающие этому состоянию граничные перемещения $w_j(\xi)$ в условиях (1.1). Напряженное состояние соответствующее приближенному решению $A_k^{[N]}$ находится непосредственно по гармоническим функциям $\varphi_1(\xi,\ \eta)$, $\varphi_2(\xi,\ \eta)$ построенным на основе $A_k^{[N]}$ [1].

При расчетах полагалось (фиг. 1): $h^-(\xi)=0$, $h^+(\xi)=b+\varepsilon\,\mathrm{ch}^{-1}[(4b)^{-1}\pi\xi]$. Соответствующая функция $g(z)$ имеет вид

$$g(z)=z+\varepsilon\frac{\mathrm{sh}[(4b)^{-1}\pi x]+i\sin[(4b)^{-1}\pi(y+b)]}{\mathrm{ch}[(4b)^{-1}\pi x]+\cos[(4b)^{-1}\pi(y+b)]}\qquad(4.1)$$

Ширина $2b°$ полосы П° принималась равной $2b+\varepsilon$, а граница $\Gamma_-°$ – совпадающей с Γ_- (фиг. 2). Перемещения границ полосы П° брались в виде

$$w_m°(\xi)=0, \quad m=1,2,3, \quad w_4°(\xi)=-\delta\,\mathrm{ch}^{-1}\left(\frac{\pi}{2b}\xi\right) \tag{4.2}$$

Пользуясь выражением (4.1) и решением для полосы П° [1], нетрудно проверить, что соответствующие функциям $g(z)$ и $w_j°(\xi)$ вида (4.1) и (4.2) функции $l(x, y)$, $m(x, y)$, $w_j(\xi)$ удовлетворяют условиям, наложенным на них выше в пп. 1, 2.

Для сравнения точного и приближенного напряженных состояний полосы П брались соответствующие им значения компоненты $\sigma_{\eta\eta}$ тензора напряжения в точке $\xi=0$, $\eta=b+\varepsilon$ верхней границы Γ_+. На фиг. 3 представлены расчетные зависимости от ε величины $\chi=|(\sigma_{\eta\eta}^{(N)}(0, b+\varepsilon)-\sigma_{\eta\eta}(0, b+\varepsilon))/\sigma_{\eta\eta}(0, b+\varepsilon)|$, характеризующей близость приближенного значения $\sigma_{\eta\eta}^{(N)}$, отвечающего решению $A_k^{[N]}$ к точному значению $\sigma_{\eta\eta}$ при различных N и $G=10^{11}$ Па, $\nu=0{,}3$, $b=1$ м, $\delta=0{,}1$ м.

Численные результаты фиг. 3 свидетельствуют об увеличении скорости сходимости по ε приближенного решения граничной задачи для полосы П определяемого функциями $A_k^{[N]}$ вида (3.6) к точному решению при увеличении числа N.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
2. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1974. 319 с.
3. *Солдатенков И. А.* Некоторые теоремы математического анализа для сингулярных интегралов: Препринт N 390. М.: ИПМ АН СССР, 1974. 44с.
4. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. М.: Наука. Ч. 1. 1971, 599 с. Ч. 2. 1973. 447 с.
5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
6. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.

Москва

Поступила в редакцию 10.IX.1990