МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1992

УДК 539.3.01

1992 г. С. Е. МИХАЙЛОВ

НЕКОТОРЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОСВЯЗНЫХ ТЕЛ С ОДНОМЕРНЫМИ УПРУГИМИ ОКАЙМЛЕНИЯМИ И УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

С использованием упругих потенциалов двойного слоя первого и второго рода получены ГИУ плоской задачи теории упругости для неодносвязных тел с замкнутыми упругими окаймлениями, обладающими переменными продольной и изгибной жесткостями, кривизной и толщиной. Эти уравнения кроме членов, возникающих в соответствующих ГИУ для задачи с заданными граничными смещениями, содержат также операторы Вольтерра. и конечномерные операторы. Исследованы спектральные свойства ГИУ, связь этих свойств с гладкостью границы и связностью области и предложены основанные на них методы решения ГИУ. Представлены асимптотики решений ГИУ около угловых точек границы и указана их связь с соответствующими асимптотиками решения исходной краевой задачи [1] В [1] задача для бесконечной плоскости с круговым отверстием, подкрепленным стержнем нулевой толщины, сводилась к иному интегральному уравнению с помощью комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили, а в [2] такой же подход применялся для случая некругового отверстия, внешность которого конформно отображается на круг с помощью дробно-линейной функции.

1. Краевая задача. Пусть D — конечная или бесконечная область на плоскости с границей $\partial D=U_{\beta=0}^{m}\partial_\beta$, являющейся совокупностью простых замкнутых не пересекающихся кусочно-ляпуновских контуров ∂_β с конечным числом угловых точек, внутренний угол в которых $\omega\neq 2\pi$, 0. Контур ∂_0 охватывает все остальные контуры ∂_β, и если он отсутствует, то область D бесконечна. С помощью длины дуги s параметризуем контуры ∂_β так, чтобы при положительном обходе область D оставалась слева. Тогда $k_i(s)=y_i'(s)$ — единичная касательная, $n_i(s)=e_{ij}k_j(s)$ — внешняя нормаль к ∂D. Здесь и далее штрих означает дифференцирование по длине дуги s, $e_{ij}=\delta_{1i}\delta_{2j}-\delta_{1j}\delta_{2i}$ — альтернирующий символ, δ_{ij} — дельта-символ Кронекера, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 2, если не оговорено иное.

Положим, что вдоль контуров ∂_β область D соединяется с краевыми одномерными упругими окаймлениями L_β, обладающими переменными продольными и изгибными жесткостями и толщиной (стержнями для случая плоского напряженного состояния или цилиндрическими оболочками для случая плоской деформации). Совокупность средних линий (линий центров тяжести сечений) окаймлений обозначим через $L=U_{\beta=0}^{m} L_\beta$ и параметризуем их длиной дуги τ в направлении положительного обхо-

[1] Некоторые из описанных здесь результатов были представлены в работе: *Михайлов С. Е., Наместникова И. В.* Плоские задачи для неодносвязных упруго подкрепленных пластин. // Механика неоднородных структур. Тезисы докл. II Всесоюзн. конф. Львов. 1987. Т. 2. С. 207–208.

да D. Тогда имеются зависимости [3]: $\tau=\tau(s)$, $ds=\vartheta(\tau)d\tau$, $\vartheta(\tau):=\{[1+\chi(\tau)h(\tau)]^2+h^2(\tau)\}^{1/2}$ и $x_i(s)=x_i^\circ[\tau(s)]+h[\tau(s)]n_i^\circ[\tau(s)]$, где $k_i^\circ(\tau):=\dot{x}_i^\circ(\tau)$ — касательная, $n_i^\circ(\tau):=e_{ij}k_j^\circ(\tau)$ — нормаль к средней линии стержня L, $h(\tau)$ — расстояние по нормали n_i° от точек $x_i^\circ(\tau)$ на L до точек $x_i[\tau(s)]$ на ∂D, причем $h<0$, если ∂D лежит левее L при положительном обходе; для стержня нулевой толщины $h(\tau)=0$, $\tau=s$, $\vartheta(\tau)=1$, $n_i^\circ(\tau)=n_i(\tau)$[2]. Здесь и далее знак $:=$ обозначает равенство по определению; точка сверху — дифференцирование по τ; $\chi(\tau)=k_i^\circ(\tau)\dot{n}_i^\circ(\tau)$ — кривизна L ($\chi(\tau)>0$, если центр окружности, касательной к L в точке τ, лежит слева от стержня при положительном обходе).

Будем рассматривать систему уравнений Ламе в области D:

$$c_{ijkl}u_{k,lj}(x)=0, \quad (x\in D) \tag{1.1}$$

$$c_{ijkl}:=\Lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{1.2}$$

Здесь $\Lambda>0$, $\mu>0$ — постоянные Ламе для случая плоской деформации; для случая плоского напряженного состояния фигурирующую в (1.2) и далее постоянную Λ необходимо заменить на $\Lambda^*:=2\Lambda\mu/(\Lambda+2\mu)$. Пусть еще $\varkappa:=(\Lambda+3\mu)/(\Lambda+\mu)>1$ — постоянная плоской теории упругости.

Взаимодействие упругой области D с упругими окаймлениями L описывается граничными условиями задачи (r) [3]:

$$\delta_i(s;\,u)=v_{0i}[\tau(s),h;\,p^{(e)}]\,(s\in\partial D,\ i=1\div 2) \tag{1.3}$$

$$\delta_i(s;\,u):=u_i(s)-v_{0i}[\tau(s),\,h;\,p^{(p)}]-C_i^{(\beta)}-C_3^{(\beta)}e_{ij}x_j(s)\quad (s\in\partial_\beta)$$

$$v_{0i}(\tau,\,h)=v_{0i}^\circ(\tau)-hk_i^\circ n_j^\circ \dot{v}_{0j}^\circ(\tau)$$

Здесь u_i — искомые перемещения в области D и на ее границе; $C_i^{(\beta)}$ ($i=1\div 3$, $\beta=0\div m$) — подлежащие определению произвольные постоянные, характеризующие перемещение стержня как жесткого целого; $v_{0i}^\circ[\tau,\,h;\,p^{(p)}]$ ($\tau\in\partial_\beta$) — перемещения центральной оси замещенного в некоторой точке $\tau_1^{(\beta)}\in\partial_\beta$ замкнутого стержня L_β, вызванные совокупностью $p^{(p)}=\{p_i^{(p)},\,m^{(p)}\}$ распределенных усилий $p_i^{(p)}(\tau;\,u)$ и моментов $m^{(p)}(\tau;\,u)$: порожденных искомыми контактными напряжениями $\sigma_{ij}(s;\,u)$:

$$v_{0i}^\circ[\tau;\,p^{(p)}]=\int\limits_{\tau_1^{(\beta)}}^{\tau}[\Pi_{ij}p_j^{(p)}+\Pi_i^{(m)}m^{(p)}](\tau_0)\,d\tau_0\,(\tau\in L_\beta,\ \beta=0\div m)$$

$$p_i^{(p)}(\tau(s);\,u):=-\sigma_{ij}(s;\,u)n_j(s)\vartheta(\tau)H_0$$

$$m^{(p)}(\tau(s);\,u):=-\sigma_{ij}(s;\,u)n_j(s)\vartheta(\tau)H_0h(\tau)k_i^\circ(\tau) \tag{1.4}$$

Аналогично, $v_{0i}^\circ[\tau;\,p^{(e)},\,m^{(e)}]$ — перемещение центральной оси стержня под действием совокупности $p^{(e)}=\{p_i^{(e)},\,m^{(e)},\,F_{Ri}^{(\beta\alpha)},\,M_R^{(\beta\alpha)}\}$, заданных распределенных вдоль L усилий и моментов $p_i^{(e)}(\tau)$, $m^{(e)}(\tau)$, а также сосредоточенных сил и моментов $F_{Ri}^{(\beta\alpha)}$, $M_R^{(\beta\alpha)}$, приложенных в точках $\tau_R^{(\beta\alpha)}$ ($\alpha=1\div N_{R\beta}$, $\beta=0\div m$):

$$v_{0i}^\circ[\tau;\,p^{(e)}]=\int\limits_{\tau_1^{(\beta)}}^{\tau}\Big\{[\Pi_{ij}p_j^{(e)}+\Pi_i^{(m)}m^{(e)}](\tau_0)+\sum_{\alpha=1}^{N_{R\beta}}[[\Pi_{ij}^1(\tau_0,\tau_R^{(\beta\alpha)})F_{Rj}^{(\beta\alpha)}+$$

$$+\Pi_i^{(1m)}(\tau_0,\tau_R^{(\beta\alpha)})M_R^{(\beta\alpha)}]\,H\,(\tau_0-\tau_R^{(\beta\alpha)})+\Pi_{ij}^\circ(\tau_0,\tau_R^{(\beta\alpha)})F_{Rj}^{(\beta\alpha)}+$$

$$+\Pi_i^{(0m)}(\tau_0,\tau_R^{(\beta\alpha)})M_R^{(\beta\alpha)}]\Big\}\,d\tau_0\quad(\tau\in L_\beta,\ \beta=0\div m) \tag{1.5}$$

[2] Здесь параметры L, s, h используются вместо параметров L_0, s_-, h_- работы [4] соответственно.

Интегральные операторы Π_{ij} и $\Pi_i^{(m)}$, являющиеся суммами операторов Вольтерра и конечномерных (вырожденных) операторов, а также функций Π_{ij}^1, $\Pi_{ij}^{(1m)}$, Π_{ij}°, $\Pi_{ij}^{(0m)}$ представлены в [3] через жесткостные и геометрические параметры окаймлений, $\tau_1^{(\beta)}$ — произвольные точки начала отсчета на окаймлениях L_β, в которых не приложены заданные сосредоточенные силы или моменты; H_0 — толщина пластины для плоского напряженного состояния и $H_0=1$ для случая плоской деформации, $H(s)$ — функция Хевисайда.

Граничные условия (1.3) необходимо также дополнить интегральными условиями равновесия каждой связной части окаймления:

$$-\int\limits_{L_\beta} p_i^{(p)}(\tau)\,d\tau=F_i^{(e\beta)}:=\int\limits_{L_\beta} p_i^{(e)}(\tau)\,d\tau+\sum_{\alpha=1}^{N_{R\beta}} F_{Ri}^{(\beta\alpha)} \qquad (i=1\div 2) \tag{1.6}$$

$$-\int [m^{(p)}(\tau)-p_i^{(p)}(\tau)e_{ij}x_j^{\circ}(\tau)]\,d\tau=M^{(e\beta)}:=$$
$$=\int\limits_{L_\beta}[m^{(e)}(\tau)-p_i^{(e)}(\tau)e_{ij}x_j^{\circ}(\tau)]\,d\tau+$$
$$L_\beta$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{N_{R\beta}}[M_R^{(\beta\alpha)}+F_{Ri}^{(\beta\alpha)}e_{ij}x_j^{\circ}(\tau_R^{(\beta\alpha)})] \qquad (\beta=0\div m) \tag{1.7}$$

Эти условия, как указано в [3], обеспечивают однозначное решение задачи (r) с точностью до жесткого смещения подкрепленного тела (без поворота для случая бесконечного тела).

Будем далее полагать, что для конечной области D:

$$\sum\nolimits_{\beta=0}^{m} F_i^{(e\beta)}=0, \qquad \sum\nolimits_{\beta=0}^{m} M^{(e\beta)}=0 \tag{1.8}$$

а для бесконечной области

$$\sum\nolimits_{\beta=1}^{m} F_i^{(e\beta)}=0$$

Эти условия, как показано в [3], являются необходимыми для существования решения задачи (1.1)—(1.7) (задачи (r)) в классе функций u_i с ограниченной энергией для конечной области и ограниченных кроме того на бесконечности для бесконечной области. Данные условия являются условиями равенства нулю главного вектора и момента приложенных к окаймлениям (а значит и к телу) внешних сил.

Для того, чтобы главная часть граничных условий имела тот же порядок гладкости, что и граничные напряжения, продифференцируем (1.3) по s и перейдем к условиям эквивалентным (1.3) вследствие произвольности $C_i^{(\beta)}$:

$$\delta_i'(s_0;\ u):=u_i'(s_0)-v_{0i}^{\cdot}[\tau(s_0),\ h;\ p^{(p)}]/\vartheta(\tau(s_0))-C_3^{(\beta)}n_i(s_0)=$$
$$=v_{0i}^{\cdot}[\tau(s_0),\ h;\ p^{(e)}]/\vartheta(\tau(s_0)) \tag{1.9}$$

$$C_i^{(\beta)}=u_i(s_1^{(\beta)})-C_3^{(\beta)}e_{ij}x_j(s_1^{(\beta)}) \quad (s_0,\ s_1^{(\beta)}\in\partial_\beta,\ \beta=0\div m) \tag{1.10}$$

которые также дополняются условиями (1.6), (1.7).

2. Вывод граничных интегральных уравнений. Обозначим через $G(\tau)$ и $G_1(\tau)$ продольную и изгибную жесткости подкрепления соответственно и пусть $a(\tau):=\chi(\tau)G^{-1}(\tau)$, $b(\tau):=G_1^{-1}(\tau)+\chi^2(\tau)G^{-1}(\tau)$, $g(\tau):=G^{-1}(\zeta)$. Если

$$|a(\tau)|,\ b(\tau),\ g(\tau),\ |h^{\cdot}(\tau)|<\infty \quad (\tau\in L) \tag{2.1}$$

то, как видно из [3], члены $v_{0i}^{\cdot}$ в левой части интегродифференциальных граничных условий (1.9), связанные с перемещениями стержня под действием контактных усилий со стороны пластины, являются младшими по сравнению с u_i'. Таким образом, главная часть граничных условий (1.9) совпадает с продифференцированными граничными условиями при заданных на границе ∂D смещениях. Поэтому, как и в задаче с заданными смещениями[3] будем далее выражать искомое решение через упругие потенциалы двойного слоя первого или второго рода, U^{II}, U^{IV}, соответственно, удовлетворяющие системе (1.1) в D [4]:

$$U_i^{\mathrm{II}}(x):=\pi^{-1}\int\limits_{\partial D}\Gamma_{i\alpha,l}[z]c_{j\eta\alpha l}q_j(s)n_\eta(s)\,ds$$

$$U_i^{\mathrm{IV}}(x):=\pi^{-1}\int\limits_{\partial D}\Gamma_{i\alpha,l}[z]c_{j\eta\alpha l}^{(N)}q_j(s)n_\eta(s)\,ds$$

$$q_j(s):=\int\limits_{s_1^{(\beta)}}^{s}Q_j(s_0)\,ds_0\quad(s,s_1^{(\beta)}\in\partial_\beta)\tag{2.2}$$

$$\int\limits_{\partial_\beta}Q_j(s)\,ds=0\quad(\beta=0\div m),\quad Q_j(s)\in L_p(\partial D)\quad(1<p<\infty)\tag{2.3}$$

Здесь $z_j=x_j-y_j$, $y\in\partial D$, $r^2=z_jz_j$. Тензор $\Gamma_{ij}(z)=[-\varkappa\delta_{ij}\ln(r)+z_iz_j/r^2]/[\mu(\varkappa+1)]$ — фундаментальное решение системы (1.1): $c_{i\gamma kl}\Gamma_{kj,l\gamma}(z)=-2\pi\delta_{ij}\delta(z)$.

При условиях (2.3) потенциалы $U_i^{\mathrm{II}}(\infty)=U_{\mathrm{I}}^{\mathrm{IV}}(\infty)=0$; $|U_{i,j}^{\mathrm{II}}(x)|$, $|U_{i,j}^{\mathrm{IV}}(x)|<C_0R^2$ для достаточно больших R. Если $u_i^*\in C^1(D)\cap C^2(D)$ — любое решение системы Ламе (1.1) (в случае бесконечной области удовлетворяющее условию регулярности $|u_i^*(\infty)|<\infty$, $|u_{i,j}^*(x)|<C_0R^2$ для достаточно больших R) и плотность Q_j потенциала U_i^{II} или U_i^{IV} удовлетворяет (2.3) то для суммы $u_i^*+U_i^{\mathrm{II}}$ или $u_i^*+U_i^{\mathrm{IV}}$ имеет место формула Грина — Бетти, упругая энергия от этой суммы ограничена, потенциалы U^{II}, U^{IV} непрерывно продолжимы на границу, а граничные напряжения принадлежат $L_p(\partial D)$. Отсюда при условиях (2.1) следует, что ограничена и суммарная энергия пластины D и подкрепляющих ее стержней, имеющих перемещение $v_{0i}[\tau(s),\ h;\ p^{(p)}(u_i^*+U_i)]$. Значит в классе таких комбинаций имеют место теоремы существования и единственности, сформулированные в работе [3] для задачи (r).

Пусть $x_i^{(\beta)}$ — произвольные фиксированные точки внутри контуров $\partial_\beta(\beta=1\div m)$, $r^{(\beta)2}:=[x_i-x_i^{(\beta)}]^2$; $\Gamma_{ij}^{(\beta)}(x):=\Gamma_{ij}[x-x^{(\beta)}]$, $W_i^{(\beta)}(x):=e_{ij}[x_j-x_j^{(\beta)}]/r^{(\beta)2}$ — поля перемещений от сосредоточенных в точке $x_j^{(\beta)}$ сил и момента соответственно.

Тогда для $y_i(s_0)\in\partial D$ имеем $W_i^{(\beta)\prime}[y(s_0)]:=n_i(s_0)/r^{(\beta)2}-2[y_i(s_0)-x_i^{(\beta)}][y_j(s_0)-x_j^{(\beta)}]n_j(s_0)/r^{(\beta)4}$. Будем сначала искать решение задачи (r) в виде

$$u_i(x)=U_i^{\mathrm{II}}(x)+\sum\nolimits_{\beta=1}^{m}\{A_j^{(\beta)}\Gamma_{ij}^{(\beta)}(x)+B^{(\beta)}W_i^{(\beta)}(x)\}\tag{2.4}$$

$$A_j^{(\beta)}=F_j^{(e\beta)}/(2\pi H_0),\quad B^{(\beta)}=M^{(e\beta)}/(4\pi\mu H_0)\tag{2.5}$$

---

[3] См.: *Михайлов С. Е., Котов Ю. И.* Интегральные уравнения плоских задач теории упругости для областей с отверстиями и углами. М., 1986, 73 с.— Деп. ВИНИТИ 17.09.86; № 6695-В86.

Используя условие (1.9), приходим к ГИУ $\mathrm{II}^{(r)}$ ($\lambda=1$):

$$Q_i(s_0)-\lambda[\mathbf{K}_{ij}^{\mathrm{II}r}Q_j](s_0)=h_i^{\mathrm{II}r}(s_0), \qquad \mathbf{K}_{ij}^{\mathrm{II}r}:=\mathbf{K}_{ij}^{\mathrm{II}}+\mathbf{K}_{ij}^{\sim\mathrm{II}r}$$

$$[\mathbf{K}_{ij}^{\mathrm{II}}Q_j](s_0):=\int\limits_{\partial D}[\pi r^2(1+\varkappa)]^{-1}\{[4z_iz_jr^{-2}+(\varkappa-1)\delta_{ij}]z_ln_l(s_0)+$$
$$+(\varkappa-1)[n_i(s_0)z_j-n_j(s_0)z_i]\}Q_j(s)ds$$

$$[\mathbf{K}_{ij}^{\sim\mathrm{II}r}Q_j](s_0):=v_{0i}{}^{\cdot}\{\tau(s_0),h;p^{(p)}[U^{\mathrm{II}}(Q)]\}/\vartheta(\tau(s_0)) \tag{2.6}$$

$$h_i^{\mathrm{II}r}(s_0):=-\sum\nolimits_{\gamma=1}^{m}[A_j^{(\gamma)}\delta_i'(s_0;\Gamma_{\cdot j}^{(\gamma)})+B^{(\gamma)}\delta_i'(s_0;W^{(\gamma)})]+$$
$$+v_{0i}{}^{\cdot}[\tau(s_0),h;p^{(e)}]/\vartheta(\tau(s_0))+C_3^{(\beta)}n_i(s_0) \qquad (s_0\in\partial_\beta,\ \beta=0\div m) \tag{2.7}$$

Отметим, что для подкреплений нулевой толщины ($h=0$) оператор $\mathbf{K}_{ij}^{\sim\mathrm{II}v}$ представляется в виде

$$[\mathbf{K}_{ij}^{\sim\mathrm{II}r}Q_j](s_0)=\{\Pi_{ij}p_j^{(p)}[U^{\mathrm{II}}(Q)]\}(s_0)+\{\Pi_i^{(m)}m^{(p)}[U^{\mathrm{II}}(Q)]\}(s_0) \tag{2.8}$$

Вследствие выбора постоянных $A_j^{(\beta)}$, $B^{(\beta)}$ в виде (2.5) условия (1.6), (1.7) преобразуются в следующие

$$\int\limits_{\partial_\beta}\sigma_{ij}[U^{\mathrm{II}}(Q)](s)n_j(s)ds=0, \qquad \int\limits_{\partial_\beta}\sigma_{ij}[U^{\mathrm{II}}(Q)](s)n_j(s)e_{i\gamma}x_\gamma(s)ds=0$$
$$(\beta=1\div m) \tag{2.9}$$

Для конечной области D, кроме того, с учетом (1.8):

$$\int\limits_{\partial D}\sigma_{ij}[U^{\mathrm{II}}(Q)](s)n_j(s)ds=0, \qquad \int\limits_{\partial D}\sigma_{ij}[U^{\mathrm{II}}(Q)](s)n_j(s)e_{i\gamma}x_\gamma(s)ds=0 \tag{2.10}$$

Если плотность Q потенциала $U^{\mathrm{II}}(Q)$ удовлетворяет (2.3) то условия (2.10) для конечной области D также удовлетворены. Принимая во внимание непрерывность вектора усилий $\sigma_{ij}(U^{\mathrm{II}})n_j$ при переходе через ∂D получаем, что (2.9) сводятся к таким же условиям для граничных напряжений изнутри конечных областей D_β^- ($\beta=1\div m$), лежащих внутри ∂_β. А эти условия выполнены при выполнении (2.3).

Таким образом, условия (2.9)—(2.10), а значит и (1.6), (1.7), выполнены для представлений (2.4), (2.5) с любыми плотностями Q_j, удовлетворяющими условиям (2.3) и, в частности, являющимися решениями ГИУ II^r. Подлежащие определению постоянные $C_3^{(\beta)}$ в (2.7) будут определяться условиями разрешимости ГИУ II^r.

Решение этой же задачи (r) можно искать в виде

$$u_i(x)=U_i^{\mathrm{VI}}(x)+\sum\nolimits_{\beta=1}^{m}A_j^{(\beta)}\Gamma_{ij}^{(\beta)}(x) \tag{2.11}$$

где $A_j^{(\beta)}$ имеют вид (2.5). Тогда после подстановки в условия (1.9) приходим к ГИУ IV^r ($\lambda=1$):

$$Q_i(s_0)=-\lambda[\mathbf{K}_{ij}^{\mathrm{IV}r}Q_j](s_0)=h_i^{\mathrm{IV}r}(s_0), \qquad \mathbf{K}_{ij}^{\mathrm{IV}r}:=\mathbf{K}_{ij}^{\mathrm{IV}}+\mathbf{K}_{ij}^{\sim\mathrm{IV}r}$$

$$[\mathbf{K}_{ij}^{\mathrm{IV}}Q_j](s_0):=\int\limits_{\partial D}[\pi r^2\varkappa]^{-1}[2z_iz_jr^{-2}+(\varkappa-1)\delta_{ij}]z_ln_l(s_0)Q_j(s)\,ds$$

$$h_i^{\mathrm{IV}}(s_0):=-\sum\nolimits_{\gamma=1}^{m}A_j^{(\gamma)}\delta_i{}'(s_0;\Gamma_{\cdot j}^{(\gamma)})+v_{0i}{}^{\bullet}[\tau(s_0),h;p^{(e)}]/\vartheta(\tau(s_0))+$$
$$+C_3^{(\beta)}n_i(s_0)\qquad(s_0\in\partial_\beta,\ \beta=0\div m)\qquad(2.12)$$

Оператор $\widetilde{\mathbf{K}}_{ij}^{\mathrm{IV}r}$ дается правой частью выражения (2.6) после замены там U^{II} на U^{IV}. При $h=0$ оно переходит в (2.8). Вследствие выбора постоянных $A^{(\beta)}$ в виде (2.5) условия (1.6), (1.7) преобразуются в следующие

$$\int\limits_{\partial_\beta}\sigma_{ij}[U^{\mathrm{IV}}(Q)](s)n_j(s)\,ds=0,\qquad\int\limits_{\partial_\beta}\sigma_{ij}[U^{\mathrm{IV}}(Q)](s)n_j(s)e_{i\gamma}x_\gamma(s)\,ds=M^{(e\beta)}/H_0$$
$$(\beta=1\div m)\qquad(2.13)$$

Для конечной области D, кроме того, с учетом (1.8):

$$\int\limits_{\partial D}\sigma_{ij}[U^{\mathrm{IV}}(Q)](s)n_j(s)\,ds=0,\qquad\int\limits_{\partial D}\sigma_{ij}[U^{\mathrm{IV}}(Q)](s)n_j(s)e_{i\gamma}x_\gamma(s)\,ds=0\qquad(2.14)$$

Как и выше, условия (2.14) удовлетворяются вследствие равенства нуль главного вектора и момента граничных усилий для любых плотностей Q_j потенциалов U^{IV} удовлетворяющих (2.3).

Принимая во внимание, что

$$\sigma_{ij}[U^{\mathrm{IV}}(Q)](s)n_j(s)=-2\mu(\varkappa-1)\varkappa^{-1}e_{ij}Q_j+\sigma_{ij}^-[U^{\mathrm{IV}}(Q)](s)n_j(s)$$

а левые части условий (2.13) от напряжений σ_{ij}^- в конечных областях D_β^- ($\beta=1\div m$) равны нулю, из (2.13) получим

$$\int\limits_{\partial_\beta}Q_j(s)\,ds=0\qquad(2.15)$$

$$\int\limits_{\partial_\beta}Q_j(s)[x_j(s)-x_j^{(\beta)}]\,ds=-\varkappa M^{(e\beta)}[2\mu(\varkappa-1)H_0]^{-1}\qquad(\beta=1\div m)\qquad(2.16)$$

Так как при выполнении (2.3) выполняются и условия (2.15), получаем, что условия (1.6) выполнены для представлений (2.11), (2.5) с любыми плотностями Q_j удовлетворяющими (2.3). Условия (1.7) сводятся к (2.16), и их удовлетворение, как будет показано ниже, обеспечивается надлежащим выбором постоянных $C_3^{(\beta)}$ в (2.12).

3. Спектральные свойства, возмущение и методы решения ГИУ II^r, IV^r. Итак, получен новый класс граничных интегральных уравнений теории упругости II^r и IV^r. Ядра этих уравнений имеют сильные стационарные особенности в угловых точках, а ядро $\mathbf{K}_{ij}^{\mathrm{II}r}$ еще и особенность типа Коши. Принимая во внимание, что операторы $\widetilde{\mathbf{K}}_{ij}^{\mathrm{II}r}$ и $\widetilde{\mathbf{K}}_{ij}^{\mathrm{IV}r}$ — суммы операторов Вольтерра и конечномерных операторов и, как следует из [3], при условии (2.1) являются компактными в L_p $(1<p<\infty)$, получим, что области фредгольмовости операторов $\mathbf{K}^{\mathrm{II}r}$ и $\mathbf{K}^{\mathrm{IV}r}$ в L_p те же, что и, соответственно, у операторов $\mathbf{K}^{\mathrm{II}}$, $\mathbf{K}^{\mathrm{IV}}$, изученных ранее.[4] В частности, для ГИУ II^r существуют числа $p_\pm^{\mathrm{II}}>2$, а для ГИУ IV^r — числа $p_\pm^{\mathrm{IV}}>2$ такие, что соответствующие уравнения являются фредгольмовы-

[4] См. указ. публ. с. 39.

ми в лебеговых пространствах $L_p(\partial D)$ $(1<p<p_\pm)$ при $\lambda=\pm 1$. С другой стороны, для этих ГИУ существуют действительные числа p_0^{II}, $p_0^{IV}>1$ такие, что соответствующие ГИУ фредгольмовы в пространствах $L_p(\partial D)$ $(1<p<p_0)$ в замкнутом единичном круге $|\lambda|\leqslant 1$. Отметим, что $p_+^{IV}=p_-^{IV}=p_0^{IV}$.

Используя доказанную в [3] теорему единственности для задачи (r) и проводя рассуждения, аналогичные сделанным для ГИУ II и IV, удается показать, что число $\lambda=1$ является характеристическим для ГИУ II^r как для конечных, так и бесконечных областей. Пусть $\lambda=1$. Если область D бесконечна, то в $L_p(\partial D)$ $(1<p<p_+^{II})$ ОГИУ II^r имеет m решений

$$Q_i^{(\beta)}(s)=n_i(s) \quad (s\in\partial_\beta),\quad Q_i^{(\beta)}(s)=0 \quad (s\notin\partial_\beta) \quad \beta=1\div m \tag{3.1}$$

а неоднородное ГИУ II^r разрешимо при наложении на правую часть $h_i^{IIr}(s)$ m условий

$$\int\limits_{\partial D} h_i(s)Q_i^{*(\beta)}(s)ds=0 \qquad (\beta=1\div m) \tag{3.2}$$

которые порождаются решениями $Q_i^{*(\beta)}$ $(\beta=1\div m)$ сопряженного ОГИУ II^r и в общем случае явно не выписываются. Если область D конечна, то ОГИУ II^r имеет $(m+2)$ решения, m из которых даются соотношениями (3.1), а неоднородное ГИУ II^r разрешимо при наложении на правую часть $h_i^{IIr}(m+2)$ условий, два из которых даются соотношениями

$$\int\limits_{\partial D} h_i(s)ds=0 \qquad (i=1\div 2) \tag{3.3}$$

а остальные m — соотношениями (3.2), где $Q_i^{*(\beta)}$ явно не выписываются.

Для ГИУ IV^r число $\lambda=1$ является характеристическим лишь для конечных областей. В этом случае ОГИУ IV^r имеет два решения, а неоднородное ГИУ IV^r разрешимо при наложении на правую часть условий (3.3).

Опираясь на формулу Грина — Бетти [3] для задачи (r) и рассуждая, как и для ГИУ II, удается, кроме того, показать, что в области фредгольмовости все характеристические числа ГИУ II^r действительны, являются простыми полюсами резольвенты и отсутствуют в интервале $(\lambda_-^{II}, 1)$, где $\lambda_-^{II}<0$ и, следовательно, для него верна оценка $\lambda_-^{II}\leqslant -1/\|\mathbf{K}\|_p$ $(1<p<p_0)$.

Наличие добавочных операторов $\mathbf{K}^{\sim IIr}$, $\mathbf{K}^{\sim IVr}$ в ГИУ II^r, IV^r затрудняет получение более полной информации о расположении характеристических чисел этих ГИУ в единичном круге $|\lambda|\leqslant 1$ для общего случая. Однако, для бесконечно жестких подкреплений (или включений), когда $G=G_1=\infty$, добавочные операторы пропадают и ГИУ II^r, IV^r переходят в ГИУ II, IV соответственно. В частности, $\lambda_-^{II}=-1$, а характеристические числа ГИУ IV также являются простыми полюсами резольвенты $(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{K}^{IV})^{-1}$, действительные и отсутствуют в интервале $(-1, 1)$. Число $\lambda=-1$ не является характеристическим для ГИУ IV лишь в случае конечной односвязной области D.

Для удовлетворения условиям (3.2) разрешимости ГИУ II^r, при $\lambda=1$ в случае неодносвязной или бесконечной области D $(m>0)$ воспользуемся неопределенными пока постоянными $C_3^{(\beta)}$ в h^{IIr} и будем искать их в виде

$$C_3^{(0)}=0,\qquad C_3^{(\beta)}=(\lambda/l_\beta)\int\limits_{\partial_\beta} Q_j(s)n_j(s)ds \qquad (\beta=1\div m),\qquad l_\beta:=\int\limits_{\partial_\beta} ds \tag{3.4}$$

Тогда после подстановки в ГИУ II^r придем к ГИУ

$$Q_i(s_0)-\lambda\int_{\partial D}[K_{ij}^{\mathrm{II}r}(s,s_0)+K_{ij}^{(2)}(s,s_0)]Q_j(s)ds=h_i^{\mathrm{II}r0}(s_0), \tag{3.5}$$

$$K_{ij}^{(2)}(s,s_0):=-\sum_{k=1}^{m}\varphi_i^{(k)}(s_0)\varphi_j^{(k)}(s)/l_k,$$

$$\varphi_i^{(k)}(s):=\{n_i(s)\ (s\in\partial_k),\ 0\ (s\notin\partial_k)\}$$

$$h_i^{\mathrm{II}r0}(s_0):=-\sum_{\gamma=1}^{m}[A_j^{(\gamma)}\delta_i'(s_0;\Gamma_{.j}^{(\gamma)})+B^{(\gamma)}\delta_i'(s_0;W^{(\gamma)})]+$$

$$+v_{0i}^{\cdot}[\tau(s_0),h;p^{(e)}]/\vartheta(\tau(s_0))$$

Если область D бесконечна, то это ГИУ, возмущенное по отношению к II^r, как следует из § 3 [5], будет уже безусловно и однозначно разрешимым при $\lambda=1$, что подтверждает правильность выбора постоянных $C_3^{(\beta)}$ в виде (3.4).

Если область D конечна, то условия (3.3) разрешимости ГИУ II^r при $\lambda=1$ выполнены вследствие того, что $h_i(s)$ являются производными от непрерывных на ∂_β функций. Однако при численном решении эти условия могут нарушаться за счет погрешностей округления и дискретизации. Для устранения неустойчивости к таким погрешностям в соответствии с методикой § 3 [5] возмутим для случая конечной области ГИУ II^r кроме $\mathbf{K}_{ij}^{(2)}$ еще и конечномерным оператором $\mathbf{K}_{ij}^{(0)}$ с ядром $K_{ij}^{(0)}(s,s_0)=-\delta_{ij}/l$, где $l=\int ds$ — длина ∂D, и придем к ГИУ:

$$Q_i(s_0)-\lambda\int_{\partial D}[K_{ij}^{\mathrm{II}r}(s,s_0)+K_{ij}^{(0)}(s,s_0)+K_{ij}^{(2)}(s,s_0)]Q_j(s)ds=h_i^{\mathrm{II}r0}(s_0) \tag{3.6}$$

Это ГИУ, как следует из § 3 [5], также будет безусловно и однозначно разрешимым при $\lambda=1$, что подтверждает правильность выбора $C_3^{(\beta)}$ в виде (3.4) и для конечной области D. При выполнении условий (3.3) оно даст одно из решений ГИУ (3.5) такое, что

$$\int_{\partial D}Q_i(s)ds=0\qquad(i=1\div2) \tag{3.7}$$

Кроме того, возмущенные ГИУ (3.5) для бесконечной области D и (3.6) — для конечной не приобретут новых характеристических чисел в конечной части λ-плоскости по сравнению с исходным ГИУ II^r.

Число $\lambda=1$ является характеристическим также и для ГИУ IV^r для конечной области. Тогда, поступая, как и выше, перейдем в случае конечной области D к ГИУ:

$$Q_i(s_0)-\lambda\int_{\partial D}[K_{ij}^{\mathrm{IV}r}(s,s_0)+K_{ij}^{(0)}(s,s_0)]Q_j(s)ds=h_i^{\mathrm{IV}r0}(s_0) \tag{3.8}$$

Оно также будет безусловно и однозначно разрешимым при $\lambda=1$ и при выполнении (3.3) даст одно из решений ГИУ IV^r, удовлетворяющее (3.7).

Таким образом, задачу (r) удалось свести к безусловно и однозначно разрешимым при $\lambda=1$ в L_p ГИУ: либо при $1<p<p_+^{\mathrm{II}}$ к возмущенным аналогам ГИУ II^r (3.5) для бесконечной области и (3.6) для конечной, либо при $1<p<p_+^{\mathrm{IV}}$ к ГИУ IV^r для бесконечной области и его

возмущенному аналогу (3.8) в конечной. Прямым интегрированием этих ГИУ по s_0 несложно показать, что их решения при $\lambda=1$ удовлетворяют условиям (2.3) для $\beta=1\div m$, так как такие же условия выполнены для правых частей h_i, а если область конечна, то вследствие выбранных возмущений и соотношений (3.7) эти условия выполнятся и для $\beta=0$. Следовательно решения данных ГИУ удовлетворяют условиям (2.3), и по ним действительно могут быть построены с помощью (2.2), (2.4), (2.11) однолистные представления решений задачи (r). При этом условия (1.6), (1.7) для полученного с помощью (2.4), (2.5) решения задачи (r) заведомо выполнены. Для решения, полученного с помощью (2.11), (2.5), заведомо выполнены условия (1.6), а условия (1.7) сводятся к (2.16) и должны быть удовлетворены за счет надлежащего выбора постоянных $C_3^{(\beta)}$ ($\beta=1\div m$).

Покажем, что этот выбор всегда осуществим и однозначен. Так как ГИУ IV^r для бесконечной области и ГИУ (3.8) для конечной области безусловно и однозначно разрешимы, то их решения можно представить в виде

$$Q_i=Q_i^{(0)}+\sum_{\beta=1}^{m} C_3^{(\beta)} Q_i^{(\beta)} \tag{3.9}$$

где $Q_i^{(\beta)}$ ($\beta=1\div m$) — решения ГИУ с правыми частями $\varphi_i^{(\beta)}(s_0)=\{n_i(s_0)$ $(s_0\in\partial_\beta)$, 0 $(s_0\notin\partial_\beta)\}$, а $Q_i^{(0)}$ — решение ГИУ с правой частью (2.12) при $C_3^{(\beta)}=0$. Подстановка (3.9) в (2.16) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно $C_3^{(\beta)}$:

$$\sum_{\beta=1}^{m} C_3^{(\beta)} \int_{\partial\alpha} Q_i^{(\beta)}(s)\,[x_i(s)-x_i^{(\alpha)}]\,ds=-\varkappa M^{(e\alpha)}[2\mu(\varkappa-1)H_0]^{-1}-$$
$$-\int_{\partial\alpha} Q_i^{(0)}(s)\,[x_i(s)-x_i^{(\alpha)}]\,ds \qquad (\alpha=1\div m) \tag{3.10}$$

Матрица этой системы невырождена. Действительно, в противном случае $C_{30}^{(\beta)}$ — нетривиальные решения соответствующей однородной системы и по плотности $Q_{i0}=\sum_{\beta=1}^{m} C_{30}^{(\beta)} Q_i^{(\beta)}$ можно построить с помощью (2.2) потенциал U_i^{IV}, который является решением задачи (r) с граничными условиями (1.3)—(1.7), где $v_{0i}[p^{(e)}]=0$, $C_3^{(\beta)}=C_{30}^{(\beta)}$ ($\beta=1\div m$), $C_3^{(0)}=0$, $F_i^{(e\beta)}=M^{(\beta)}=0$ ($\beta=0\div m$). Но в силу теоремы единственности решение этой задачи есть

$$u_i=C_i^{(0)}+C_3^{(0)}e_{ij}x_j,\quad C_i^{(\beta)}=C_i^{(0)},\quad C_3^{(\beta)}=C_3^{(0)}\quad (\beta=1\div m)$$

и $C_3^{(0)}=0$ для бесконечной области. Отсюда $C_{30}^{(\beta)}=C_3^{(\beta)}=C_3^{(0)}=0$ ($\beta=1\div m$), что и доказывает требуемое утверждение.

Силы и моменты в каждом сечении окаймления могут быть получены с учетом (1.4) из выражений (1.14) [3] после решения ГИУ и определения по этому решению с помощью (2.4), (2.9) граничных напряжений σ_{ii}^{+} на ∂D. По этим силам и моментам далее с помощью (1.4), (1.5) можно получить перемещения окаймлений, постоянные $C_i^{(\beta)}$ ($i=1\div 2$) для которых даются (1.10).

Для решения рассмотренных ГИУ могут быть предложены различные методы. Решения возмущенных аналогов ГИУ II^r (3.5), (3.6) с учетом их спектральных свойств можно как и в [6] представить видоизмененным рядом Неймана

$$Q_i=(1+d)^{-1}\sum_{p=0}^{\infty}[(d+\mathrm{K})/(1+d)]_{ij}^{p}h_j \tag{3.11}$$

Здесь под $\mathbf{K}$ нужно понимать оператор $\mathbf{K}^{\mathrm{II}r}+\mathbf{K}^{(2)}$ для бесконечной области и $\mathbf{K}^{\mathrm{II}r}+\mathbf{K}^{(0)}+\mathbf{K}^{(2)}$ для конечной, а $h_j=h_j^{\mathrm{II}r0}$. Этот ряд, полученный с помощью метода замены переменной, как следует из [7, 8], будет сходиться для $d>-(1+1/\lambda_-^{\mathrm{II}})/2$. При практических расчетах из соображений оптимальности сходимости ряда [6] имеет смысл брать d в интервале $-(1+1/\lambda_-^{\mathrm{II}})/2<d\leqslant-1/\lambda_-^{\mathrm{II}}$, а для возмущенного ГИУ (3.6) в конечной области — в еще более узком интервале $-1(1+1/\lambda_-^{\mathrm{II}})/2<d\leqslant$ $\leqslant-1/(2\lambda_-^{\mathrm{II}})$.

Имеющаяся информация о спектральных свойствах ГИУ IV^r для бесконечной области и его возмущенного аналога (3.8) для конечной области недостаточна в общем случае для построения гарантированно сходящихся итерационных методов. После дискретизации это ГИУ можно решать каким-либо прямым методом. Однако, если подкрепления бесконечно жесткие и ГИУ IV^r вырождается в ГИУ IV, то для его решения можно использовать ряд Неймана (3.11), где d выбирается в указанных выше интервалах с заменой в них λ_- на -1 (для конечной односвязной области можно взять и $d=0$, т. е. стандартный ряд Неймана). Возникающие в этих уравнениях для неодносвязных или бесконечных областей постоянные $C_3^{(\beta)}$ можно определить с помощью представления (3.9) и последующего решения системы (3.10). При этом для нахождения $Q_i^{(0)}$, $Q_i^{(\beta)}$ одно и то же ГИУ необходимо решить $m+1$ раз с различными правыми частями. Можно также для определения постоянных $C_3^{(\beta)}$ перенести их в левую часть ГИУ и после дискретизации решать расширенную систему уравнений, получающуюся добавлением к ГИУ соотношений (2.16).

4. Асимптотики решений ГИУ II^r и IV^r. Асимптотики решений ГИУ I—IV для задач с граничными усилиями и перемещениями даны в [9, 10].

При анализе асимптотики решений ГИУ II^r, IV^r будем полагать, что около угловой точки s_* контура ∂D с внутренним углом $0<\omega<2\pi$ выполнены условия (2.1) и в левой ($\tau<\tau_*$) и правой ($\tau>\tau_*$) окрестностях точки $\tau_*=\tau(s_*)$ фигурирующие в (2.1) функции удовлетворяют условию Гельдера. Тогда с учетом работы [3] получим, что операторы $\mathbf{K}_{ij}^{\sim\mathrm{II}r}$, $\mathbf{K}_{ij}^{\sim\mathrm{IV}r}$ действуют из $L_p(\partial D)$ $(1<p<\infty)$ в пространство функций Гельдера в левой и правой окрестностях s_*. Перенося члены с этими операторами в правые части ГИУ получим ГИУ II и IV, соответственно, с фиктивно заданными правыми частями h_{i0}^{II}, h_{i0}^{IV} принадлежащими пространству Гельдера в окрестностях s_*. Асимптотики решений этих ГИУ изучены в [10], откуда получаем, что решения ГИУ II^r, ГИУ IV^r имеют вид соответственно

$$Q_i^{\mathrm{II}}(s_*\mp\rho)=\sum_{k=1}^{4}A_k(\omega,\ \varkappa)\,d_{ki}^{\mathrm{II}\mp}(\omega,\ \varkappa)\,\rho^{-\gamma_k^{\mathrm{II}}}+\pi\{\sin\omega[\sin\omega+(2\pi-\omega)\cos\omega]\}^{-1}\times$$
$$\times A_0^{\mathrm{II}}(\omega,\varkappa)\,n_i^{\mp}+Q_i^{\mathrm{II}*}(s_*\mp\rho) \qquad (4.1)$$

$$Q_i^{\mathrm{IV}}(s_*\mp\rho)=\sum_{k=1}^{4}A_k^{\mathrm{IV}}(\omega,\varkappa)\,d_{ki}^{\mathrm{IV}\mp}(\omega,\ \varkappa)\,\rho^{-\gamma_k^{\mathrm{IV}}}+Q_i^{\mathrm{IV}*}(s_*\mp\rho) \qquad (4.2)$$

Здесь A_k^{II}, A_k^{IV} — подлежащие определению коэффициенты интенсивности плотности; $d_{ki}^{\mathrm{II}\mp}$, $d_{ki}^{\mathrm{IV}\mp}$ — ограниченные векторы, представленные в [10]; $n_i^{\mp}$ — внешняя нормаль в окрестностях угловой точки s_*; остаточные члены $Q_i^{II}(s_*\mp\rho)$, $Q_i^{IV}(s_*\mp\rho)$ удовлетворяют условию Гельдера в окрестностях s_* и $Q_i^{II}(s_*)=Q_i^{IV}(s_*)=0$; $\gamma_k^{II}(\omega)$ — максимальные при $\mathrm{Re}(\gamma_k^{II})<1$ корни, соответственно, уравнений

$$\Delta_*(\varkappa,\ \omega,\ \gamma_1^{II})=0,\quad \Delta_*(-\varkappa,\ \omega,\ \gamma_2^{II})=0$$

$$\Delta_*(1,\ 2\pi-\omega,\ \gamma_3^{II})=0,\quad \Delta_*(-1,\ 2\pi-\omega,\ \gamma_4^{II})/\gamma_4^{II}=0$$

а $\gamma_k^{IV}(\omega)$ — максимальные при $\mathrm{Re}(\gamma_k^{IV})<1$ корни, соответственно, уравнений

$$\Delta_*(\varkappa,\ \omega,\ \gamma_1^{IV})=0,\quad \Delta_*(-\varkappa,\ \omega,\ \gamma_2^{IV})=0$$

$$\Delta_*(\varkappa,\ 2\pi-\omega,\ \gamma_3^{IV})=0,\quad \Delta_*(-\varkappa,\ 2\pi-\omega,\ \gamma_4^{IV})=0$$

$$\Delta_*(\varkappa,\ \omega,\ \gamma):=\varkappa\sin\left[(\gamma-1)\omega\right]+(\gamma-1)\sin\omega$$

Отсюда видно, что $\gamma_1^{II}(\omega)$, $\gamma_2^{II}(\omega)<0$ при $\omega<\pi$; $\gamma_3^{II}(\omega)<0$ при $\omega>\pi$; $\gamma_4^{II}(\omega)<0$ при $\omega>\omega_{00}=2\pi+\mathrm{tg}\,\omega_{00}\approx1{,}790$. В этих интервалах угла ω члены с соответствующими сомножителями $\rho^{-\gamma_k^{II}}$ можно объединить с остаточным членом $Q_i^{II*}(s_*\mp\rho)$, то есть опустить их в явной записи (4.1). Аналогично $\gamma_1^{IV}(\omega)$, $\gamma_2^{IV}(\omega)<0$ при $\omega<\pi$; $\gamma_3^{IV}(\omega)$, $\gamma_4^{IV}(\omega)<0$ при $\omega>\pi$. В этих интервалах угла ω члены с соответствующими сомножителями $\rho^{-\gamma_k^{IV}}$ можно объединить с остаточным членом $Q_i^{IV*}(s_*\mp\rho)$, то есть опустить их в явной записи (4.2).

Выпишем асимптотику плотности ГИУ II^r при критических значениях углов $\omega=\omega_{00}$, π, когда некоторые из коэффициентов в (4.1) становятся неограниченными.

При $\omega=\omega_{00}\approx102{,}5^\circ$ будем иметь

$$\gamma_4^{II}(\omega_{00})=0;\quad \gamma_3^{II}(\omega_{00})>0;\quad \gamma_1^{II}(\omega_{00}),\quad \gamma_2^{II}(\omega_{00})<0$$

$$\begin{aligned}Q_i^{II}(s_*\mp\rho)={}&A_3(\omega_{00},\varkappa)\,d_{3i}^{II\mp}(\omega_{00},\varkappa)\,\rho^{-\gamma_3^{II}}+\{\pi\,[2\pi-\omega_{00})\sin(\omega_{00})]^{-2}\times\\&\times A_0^{II}(\omega_{00},\varkappa)(2\ln\rho-1)+A_4^{II0}(\omega_{00},\varkappa)\}\,n_i^{\mp}\pm\pi\,[(2\pi-\omega_{00})\sin^2(\omega_{00})]^{-1}\times\\&\times A_0^{II}(\omega_{00},\varkappa)\,n_j^{\mp}+Q_i^{II*}(s_*\mp\rho)\end{aligned}\tag{4.3}$$

При $\omega=\pi$ получим

$$\gamma_1(\pi)=\gamma_2(\pi)=\gamma_3(\pi)=0,\quad \gamma_4(\pi)<0$$

$$\begin{aligned}Q_i^{II}(s_*\mp\rho)={}&-(\varkappa^2-1)(4\pi\varkappa)^{-1}[h_{j0}^{II-}(s_*)-h_{j0}^{II+}(s_*)]\,e_{ij}\ln\rho\pm\\&\pm(\varkappa+1)^2(8\varkappa)^{-1}[h_{j0}^{II-}(s_*)-h_{j0}^{II+}(s_*)]-A_1^{II0}(\pi,\varkappa)(\varkappa-1)(\varkappa+1)^{-1}n_i-\\&-[A_2^{II0}(\varkappa-1)(\varkappa+1)^{-1}+A_3^{II0}]\,e_{ip}n_pQ_i^{II*}(s_*\mp\rho)\end{aligned}\tag{4.4}$$

Для плотности ГИУ IV^r при $\omega=\pi$ будем иметь

$$\begin{aligned}Q_i^{IV}(s_*\mp\rho)={}&\pm[h_i^{IV-}(s_*)-h_i^{IV+}(s_*)]/2+A_4^{IV}(\pi,\varkappa)\,n_i-\\&-A_3^{IV}(\pi,\varkappa)\,e_{ip}n_p+Q_i^{IV*}(s_*\mp\rho)\end{aligned}\tag{4.5}$$

В этих асимптотиках параметры A_k^{II0} также, как и A_k^{II}, A_k^{IV} подлежат определению из полного решения ГИУ II^r, IV^r. В асимптотиках (4.4), (4.5) для $\omega=\pi$, то есть в точках гладкости контура ∂D, фигурируют также скачки фиктивно заданных правых частей $[h_{i0}^{+}-h_{i0}^{-}]$ которые, вообще говоря, априори не определяются, однако, используя анализ, аналогичный сделанному в [3] для асимптотик перемещений и напряжений, получаем, что эти скачки отличны от нуля, если в τ_*

имеются скачки у какой-либо из функций из (2.1), либо в точке τ_* приложены сосредоточенные силы $F_{Ri}{}^*$ или момент $M_R{}^*$. В частности, если участвующие в (2.1) функции непрерывны и толщина $h(s_*)=0$, то эти скачки выражаются через сосредоточенные силы и момент

$$h_{i0}^{\mathrm{II}-}(s_*)-h_{i0}^{\mathrm{II}+}(s_*)=h_{i0}^{\mathrm{IV}-}(s_*)-h_{i0}^{\mathrm{IV}+}(s_*)=$$

$$=[F_{Rj}^* k_j{}^0(\tau)+\chi_h(\tau_*)M_R{}^*]g(\tau_*)k_i(s_*)$$

$$\chi_h(\tau)=\chi(\tau)+G(\tau)h(\tau)/[G_1(\tau)\vartheta(\tau)]$$

Отметим еще, что коэффициенты интенсивности напряжений K_i, K_6 в асимптотике решения задачи (г) [3] могут быть выражены через коэффициенты интенсивности плотности A_i^{II}, $A_i^{\mathrm{II}0}$, A_i^{IV}, $A_i^{\mathrm{IV}0}$ ГИУ II^г, IV^г по тем же формулам, что и для задачи с заданными перемещениями на границе [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сяський А. А.* Термоупругая задача для пластинки с частично подкрепленным круговым отверстием. // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 12. С. 75–79.
2. *Мартынович Т. Л., Сяський В. А.* Определение напряженного состояния пластинки с разомкнутым ребром жесткости. // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1985. № 8. С. 32–34.
3. *Михайлов С. Е., Наместникова И. В.* О краевых задачах теории упругости для плоских областей с одномерными упругими подкреплениями. // ПМТФ. 1991. № 1. С. 103–114.
4. *Кахниашвили Н. С.* Исследование плоских задач теории упругости методом теории потенциалов./ Тр. Тбилисск. ун-та. 1953. Т. 50. С. 23–58.
5. *Михайлов С. Е.* Об интегральном уравнении некоторых краевых задач для гармонических функций в плоских многосвязных областях с нерегулярной границей. // Мат. сб. 1983. Т. 121. № 4. С. 533–544.
6. *Михайлов С. Е.* Спектральные свойства и методы решения некоторых интегральных уравнений теории упругости для плоских неодносвязных тел с угловыми точками при заданных на границе усилиях. // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 52–62.
7. *Кублановская В. Н.* Применение аналитического продолжения посредством замены переменных в численном анализе // Тр. матем. ин-та АН СССР. 1959. Т. 53. С. 145–185.
8. *Канторович Л. Н., Крылов В. К.* Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
9. *Михайлов С. Е.* Асимптотики решений некоторых интегральных уравнений и плоских задач теории упругости вблизи углов при заданных на границе усилиях. // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 33–43.
10. *Михайлов С. Е.* Асимптотики решений некоторых интегральных уравнений и плоских задач теории упругости вблизи углов при заданных на границе смещениях. // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 2. С. 28–40.

Москва

Поступила в редакцию
19.I.1990