МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1992

© 1992 г. А. В. МИКУНОВ

О КОНФОРМНО ИНВАРИАНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Когда два упругих тела топологически эквивалентны и для одного из них решена некоторая краевая задача, то этот факт можно использовать, чтобы построить решение для второго тела. При этом метрические свойства тел играют решающее значение. Это приводит к задаче построения конформно инвариантной теории упругости. Для этого необходимо модифицировать уравнения теории и приписать полевым величинам конформные веса так, чтобы уравнения оставались неизменными и после конформного изменения метрики. В частности, в таком подходе естественно возникает тензор несовместности деформаций Кренера. Найденные условия конформной инвариантности основных соотношений, позволяют переносить диффеоморфизмами решения с одного упругого тела на другое.

1. Введение. Если получено решение некоторой краевой задачи теории упругости для тела M, то можно ли, используя этот факт, построить решение для упругого тела N, которое топологически эквивалентно (гомеоморфно) M? Необходимость учитывать метрические свойства M и N не позволяет дать простой ответ на этот вопрос. Более формально это можно выразить следующим образом. Рассмотрим два упругих тела M и N, находящихся в напряженном состоянии. Считаем их римановыми многообразиями: h-метрика на N, g-метрика на M. Предположим существование диффеоморфизма $\varphi:(N,\ \partial N)\to(M,\ \partial M)$; ∂ — обозначение границы. N и M не предполагаются изометричными, т. е. в общем случае $h\neq\varphi^*g$, φ^* — стандартная операция переноса тензоров при диффеоморфизме [1]. Для определенности рассмотрим статически определимую задачу в напряжениях для M:

$$D_g\sigma=0,\quad \sigma|_{\partial M}=P \tag{1.1}$$

объемные силы не учитываем, P — вектор внешней нагрузки, σ — векторнозначная 2-форма, в произвольных координатах имеющая вид

$$\sigma=(\sigma^{ik}\varepsilon_{kmn}dx^m\wedge dx^n)\,\partial/\partial x_i \tag{1.2}$$

где ε_{kmn} — тензор Леви — Чевиты: $\pm(\det(g))^{1/2}$ или 0, σ^{ik} — тензор напряжений, $\det(g)$ — определитель метрики g, D_g — внешний ковариантный дифференциал, согласованный с g:

$$D_g\sigma=(\nabla_k\sigma^{ik}(\det(g))^{1/2}dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3)\,\partial/\partial x_i$$

Если σ — решение (1.1), то форма $\varphi^*\sigma$ — корректно определена на N, но вообще говоря

$$D_h\varphi^*\sigma\neq0 \tag{1.3}$$

это очевидно, так как $D_h\neq D_{\varphi^*g}$, если φ не изометрия. Подобная ситуация возникает и в других задачах теории упругости (нельзя использовать φ для переноса решений с M на N). Пусть φ такой диффеоморфизм, что h и g конформно эквивалентны, т. е. $h=\lambda^2\varphi^*g$, λ — некоторая функция, $\lambda\neq0$. В качестве примера, рассмотрим верхнюю полусферу без северного полюса — M и плоскость — N, тогда φ — стереографическая проекция. Кроме того, когда M и N двумерны, то локально φ всегда существует.

В размерности два φ — любая биголоморфная функция. В размерности три это движения, растяжения, инверсии и их композиции, они образуют группу изоморфную группе O(4,1) [1]. Выясним когда $D_h\varphi^*\sigma=0$, если $D_g\sigma=0$. Ответ прост: тогда, когда σ^{ik} — конформная плотность веса $-(n+2)$ и след тензора напряжений равен нулю

$$\nabla_a'\sigma'^{ca}=\lambda^N(\nabla_a\sigma^{ca}+\gamma_a\sigma^{ca}(N+n+2)-\gamma^c g_{ka}\sigma^{ka}) \tag{1.4}$$

где $\sigma'^{ca}=\lambda^N\sigma^{ca}$, $\gamma_a=\lambda^{-1}\nabla_a\lambda$; ∇_a', ∇_a — ковариантные производные согласованные, соответственно, с h и g, n — размерность M (по поводу используемых обозначений и понятий см. [2]). Поэтому, например, в задачах кручения или когда плоская деформация происходит без изменения объема, уравнения равновесия конформно инвариантны и σ решение для (1.3). Высказанные соображения естественно приводят к задаче построения конформно инвариантной теории упругости. Для этого необходимо модифицировать (если потребуется) уравнения теории и приписать конформные веса полевым величинам так, чтобы уравнения оставались неизменными и после конформного изменения метрики. Заметим, что классический подход к плоской задаче, использующий комплексную функцию напряжений и конформные отображения не решает поставленную задачу в размерности два, т. к. бигармонический оператор не является конформно инвариантным, поэтому приходится решать разные задачи для M и для N, используя формулу Гурса.

2. Исследование конформной инвариантности основных уравнений теории упругости. Запишем основные соотношения для M и для N (объемные силы не учитываем):

$$2e_{ik}=g_{ik}-g_{ik}^\circ, \quad 2e_{ik}'=h_{ik}-h_{ik}^\circ \tag{2.1}$$

$$D_g\sigma=0, \quad D_h\sigma'=0 \tag{2.2}$$

$$\sigma^{ik}=A^{ikmn}e_{mn}, \quad \sigma'^{ik}=A'^{ikmn}e_{mn}' \tag{2.3}$$

$$\sigma^{ik}n_k=P^i, \quad \sigma'^{ik}n_k'=P'^i \tag{2.4}$$

$$R_{ik}^\circ=0, \quad R_{ik}^{\circ\prime}=0 \tag{2.5}$$

$$R_{ik}=0, \quad R_{ik}'=0 \tag{2.6}$$

где g_{ik}°, h_{ik}° — метрики на M и N до деформации; g_{ik}, h_{ik} — метрики на M и N после деформации; R_{ik}°, $R_{ik}^{\circ\prime}$, R_{ik}, R_{ik}' — тензоры Риччи для этих метрик. Метрики g и h конформно эквивалентны

$$h_{ik}=(\varphi^*g)_{ik}\lambda^2 \tag{2.7}$$

для некоторого диффеоморфизма φ.

1. Уравнения равновесия рассмотрены выше: они конформно инвариантны если след тензора напряжений равен нулю.

2. Закон Гука. Если потребовать конформной инвариантности уравнений равновесия, то сумма весов A'^{ikmn} и e_{mn}' равна $-(n+2)$. Пусть A'^{ikmn} имеет вес Q $A'^{ikmn}=\lambda^Q A^{ikmn}$, тогда из (2.1)—(2.3) следует

$$A^{ikmn}\lambda^Q(h_{mn}-h_{mn}^\circ)=\lambda^{-(n+2)}A^{ikmn}(g_{mn}-g_{mn}^\circ) \tag{2.8}$$

где для удобства обозначений положено $\varphi^*T=T$, T — любой тензор.

При $Q=-(n+4)$ из (2.8) следует

$$e_{ik}'=\lambda^2 e_{ik} \tag{2.9}$$

При $Q=-(n+2)$ имеем

$$e_{ik}'=e_{ik} \tag{2.10}$$

В частности, когда M изотропно, в координатах на N:

$$A^{ijkn}=\mu g^{ij}g^{kn}+\nu(g^{ik}g^{jn}+g^{in}g^{jk}) \qquad (2.11)$$

$$A'^{ijkn}=\lambda^{-n}(\mu h^{ij}h^{kn}+\nu(h^{ik}h^{jn}+h^{in}h^{jk})),\ Q=-(n+4) \qquad (2.12)$$

$$A'^{ijkn}=\lambda^{-(n-2)}(\mu h^{ij}h^{kn}+\nu(h^{ik}h^{jn}+h^{in}h^{jk})),\ Q=-(n+2) \qquad (2.13)$$

μ, ν — коэффициенты Ламе.

3. Уравнения совместности деформации (2.5)—(2.6) в общем случае, если метрика h не плоская, не конформно инвариантны. Это следует из известного (см. например [2, 3]) закона преобразования тензора Риччи при конформном изменении метрики

$$h^{ik}R_{kj}'=R_j'^i=\lambda^{-2}[R_j^i-(n-2)(\gamma^i\gamma_j-\nabla^i\gamma_j)+$$
$$+\delta_j^i((n-2)\gamma^k\gamma_k+\nabla^k\gamma_k)] \qquad (2.14)$$

где $R_j^i=g^{ic}R_{cj}$; скалярная кривизна преобразуется так

$$R'=\lambda^{-2}[R+\gamma^k\gamma_k(n(n-2)-(n-2))+\nabla^k\gamma_k(2n-2)]$$

т. е. $R_{ab}'\neq 0$, $R'\neq 0$. Интерпретируем «лишний член» в (2.14) как тензор несовместности деформаций B_{ab}, который описывает распределение неоднородностей в сплошной среде. Определение тензора несовместности — «меры инородной материи» [4] и физическое обоснование происходит так же как и в [4, 5].

При $n=3$ имеем $B_b^a=g^{ac}B_{cb}=\lambda^{-2}[\gamma^a\gamma_b-\nabla^a\gamma_b+\delta_b^a(\gamma^k\gamma_k+\nabla^k\gamma_k)]$; при $n=2$ тензор Риччи определяется своим следом, поэтому вместо $B_b^a=\lambda^{-2}\delta_b^a\nabla^k\gamma_k$ можно рассматривать функцию $R'=\lambda^{-2}\nabla^k\nabla_k\ln\lambda$.

Таким образом, если мы решили для M задачу

$$D_g\sigma=0;\quad \sigma^{ik}=A^{ikmn}e_{mn},\quad R_{ij}=0;\quad g_{ij}\sigma^{ij}=0$$

то на N автоматически удовлетворяются следующие уравнения описывающие напряжения и деформации в неоднородной среде $D_h\sigma'=0$, $\sigma'^{ik}=A'^{ikmn}e_{mn}'$, $R_{ij}'=B_{ij}$; $\sigma'=\lambda^{-(n+2)}\sigma$. Отметим, что если h и g плоские, то уравнение на потенциал Ламе Φ $\nabla^k\nabla_k\Phi=0$ конформно инвариантно, это следует из закона преобразования гармонического оператора, при этом конформный вес потенциала равен $(2-n)/2$:

$$\left(\nabla'^a\nabla_a'+\frac{1}{4}\frac{(n-2)}{(n-1)}R'\right)\Phi'=\lambda^{-(n+2)/2}\left(\nabla^a\nabla_a+\frac{1}{4}\frac{(n-2)}{(n-1)}R\right)\Phi$$

3. **Плоская задача.** Рассмотрим как изменяется бигармоническое уравнение $\Delta^2\psi=\nabla^b\nabla_b\nabla^a\nabla_a\psi=0$ при конформном изменении масштаба. Считаем что у ψ конформный вес P. Имеем:

$$\Delta'^2\psi'=\lambda^{P-4}[P^2\{Q^2\gamma^b\gamma_b+2Q\gamma^b\nabla_b+\nabla^b\nabla_b+2Q\nabla^b\gamma_b\}\gamma^a\gamma_a\psi+$$
$$+2P\{Q^2\gamma^b\gamma_b+2Q\gamma^b\nabla_b+\nabla^b\nabla_b+2Q\nabla^b\gamma_b\}\gamma^a\nabla_a\psi+$$
$$+2P\{Q^2\gamma^b\gamma_b+2Q\gamma^b\nabla_b+\nabla^b\nabla_b+2Q\nabla^b\gamma_b\}\nabla^a\gamma_a\psi+$$
$$+\{Q^2\gamma^b\gamma_b+2Q\gamma^b\nabla_b+2Q\nabla^b\gamma_b\}\nabla^a\nabla_a\psi+\Delta^2\psi]$$

где $Q=P-2$; если $P=2$, то

$$\Delta'^2\psi'=\lambda^{-2}[4\nabla^b\nabla_b\{\gamma^a\gamma_a\psi+\gamma^a\nabla_a\psi+\nabla^a\gamma_a\psi\}+\Delta^2\psi]$$

если $P=0$, то

$$\Delta'^2\psi'=\lambda^{-4}[4\{\gamma^b\gamma_b-\gamma^b\nabla_b-\nabla^b\gamma_b\}\nabla^a\nabla_a\psi+\Delta^2\psi]$$

Когда g и h плоские, то при $P=2$ и при $P=0$ соответственно

$$\Delta'^2\psi'=\lambda^{-2}[4\nabla^b\nabla_b\{\gamma^a\gamma_a\psi+\gamma^a\nabla_a\psi\}+\Delta^2\psi]$$

$$\Delta'^2\psi'=\lambda^{-4}[4\{\gamma^b\gamma_b-\gamma^b\nabla_b\}\nabla^a\nabla_a\psi+\Delta^2\psi]$$

Вывод: бигармонический оператор в общем случае не конформно инвариантен при любом выборе веса.

Однако в рамках классической линейной теории уравнения (2.5)—(2.6) выполняются. Действительно, соотношение $R_{ik}^{\circ\prime}=0$ эквивалентно при $Q=-(n+4)$ следующему $\Delta'\ln\lambda=\nabla'^k\nabla_k'\ln\lambda=0$, где ∇_k' — ковариантная производная, согласованная с g_{ik}°.

Если $g_{ik}^{\circ}=\delta_{ik}+\varepsilon f_{ik}\approx\delta_{ik}$, $\varepsilon\to0$, то $\Delta'\ln\lambda=\Delta\ln\lambda+\varepsilon(\partial_i{}^1/{}_2\alpha\delta^{ij}\partial_j\ln\lambda-$ $-\partial_i f^{ij}\partial_j\ln\lambda)+o(\varepsilon)$, где $\alpha=f_{11}+f_{22}$, $\Delta=\nabla^k\nabla_k$, а ∇_k согласована с $g_{ik}=\delta_{ik}$.

Замечание. Если считать [6] $\sigma^{ik}=R^{ik}-{}^1/{}_2Rg^{ik}$ то уравнения равновесия в отсутствие объемных сил удовлетворяются тождественно и являются конформно инвариантными, так как $g_{ik}\sigma^{ik}=0$. Но в этом случае конформный вес тензора напряжений равен нулю, а по формуле (1.4) он равен -4.

4. Пример. Рассмотрим осесимметричное нагружение неограниченной области с круговым отверстием (частный случай задачи Ламе) с граничными условиями вида $\sigma_{rr}=-p_a$ при $r=a$, $\sigma_{rr}=0$ при $r=\infty$, где σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$ — физические компоненты тензора напряжений $\sigma^{11}=\sigma_{rr}$, $\sigma^{22}=\sigma_{\varphi\varphi}r^{-2}$. Решение имеет вид [7] $\sigma_{rr}=-p_a(ar^{-1})^2$, $\sigma_{\varphi\varphi}=p_a(ar^{-1})^2$.

След тензора напряжений равен нулю, поэтому $\sigma'^{ik}=\lambda^{-4}(f^*\sigma)^{ik}$ удовлетворяет уравнениям равновесия для любой области полученной из исходной конформным преобразованием; если воспользоваться комплексными обозначениями, то $f: w\mapsto z=f(w)$, $z=x+iy$, $m=u+iv$, $\lambda^{-4}=(dz/dw)^4$. Например при инверсии $f: w\mapsto z=1/w$, $w=\rho e^{i\theta}$, $z=re^{i\varphi}$, $|a|=1$, $\lambda^2=\rho^4$ имеем

$$\sigma'^{11}=-p_a\rho^{-2},\quad \sigma'^{22}=p_a\rho^{-4}$$

$$\sigma_{\rho\rho}'=-p_a\rho^{-2},\quad \sigma_{\theta\theta}'=p_a\rho^{-2}$$

$$h=(du)^2+(dv)^2=(d\rho)^2+\rho^2(d\theta)^2$$

при $Q=-(n+4)$: $A'^{ijkn}=\rho^{-4}(\mu h^{ij}h^{kn}+\nu(h^{ik}h^{kn}+h^{in}h^{ik}))$; при $Q=-(n+2)$: $A'^{ijkn}=\mu h^{ij}h^{kn}+\nu(h^{ik}h^{jn}+h^{in}h^{jk})$.

При этом выполнены следующие граничные условия: $\sigma_{\rho\rho}'=-p_a$, если $\rho=a$.

Таким образом из решения задачи Ламе для неограниченной области с отверстием получается, при $Q=-(n+2)$, решение аналогичной задачи для изотропного диска, а при $Q=-(n+4)$, решение для неоднородного диска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1986. 760 с.
2. *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство — время. Т. 1. М.: Мир, 1987. 528 с.
3. *Бирел Н., Девис П.* Квантованные поля в искривленном пространстве — времени. М.: Мир, 1984. 356 с.
4. *Кренер Е.* Новые концепции континуальной механики твердых тел // В кн.: Механика, периодический сб. перевода иностранных статей, 70, 6: Ил., М. 1961. с. 85—99.
5. *Кренер Е.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. М.: Мир, 1965. 103 с.
6. *Паули В.* Теория относительности. М.— Л.: Гостехиздат, 1947. 410 с.
7. *Хан Х.* Теория упругости. М.: Мир, 1988. 343 с.

Москва

Поступила в редакцию 12.XI.1990