МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1992

УДК 531.35

© 1992 г. О. В. ХОЛОСТОВА

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С УПРУГОВЯЗКОЙ МЕМБРАНОЙ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Рассматривается движение системы, состоящей из несущего твердого тела и упруговязкой круглой мембраны в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой орбите. Ось симметрии мембраны совпадает с одной из главных центральных осей инерции недеформированной системы. В рамках линейной теории упругости получена система дифференциальных уравнений движения. Рассмотрен квазистатический режим движения. Найдены положения относительного равновесия, когда мембрана деформирована, но неподвижна относительно несущего тела, а ориентация рассматриваемой системы (несущее тело и мембрана) в орбитальной системе координат совпадает с положениями относительного равновесия трехосного спутника – твердого тела. Исследована устойчивость указанных равновесий.

1. Об упругих колебаниях мембраны. Рассмотрим движение системы, состоящей из твердого тела, которое далее будем называть несущим, и круглой мембраны, закрепленной в теле по своему контуру так, что остальная поверхность мембраны остается свободной и может совершать упругие колебания. Будем считать, что ось симметрии мембраны совпадает с одной из главных центральных осей инерции системы (несущее тело и мембрана) в недеформированном состоянии, а центр мембраны отстоит от центра масс недеформированной системы на расстоянии l.

Предполагается, что система движется в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой орбите и ее движение относительно центра масс не влияет на движение самого центра масс. Исследование ограничивается рамками линейной теории упругости.

Пусть $Oxyz$ – система координат с началом в центре масс O недеформированной системы и осями, направленными вдоль ее главных центральных осей инерции. Считаем, что ось симметрии недеформированной мембраны совпадает с осью Oz, так что в системе координат $Oxyz$ радиус-вектор центра O_1 мембраны есть $OO_1=\mathbf{l}=(0,\ 0,\ l)^T$. Радиус-вектор $\mathbf{r}_M$ произвольной точки P деформированной мембраны представим в виде суммы

$$\mathbf{r}_M=\mathbf{l}+\boldsymbol{\rho}_0+\mathbf{u},\quad \boldsymbol{\rho}_0=\mathbf{O}_1\mathbf{P}_0=(\rho_x,\ \rho_y,\ 0)^T \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{\rho}_0$ – радиус-вектор соответствующей точки P_0 недеформированной мембраны относительно ее центра, $\mathbf{u}$ – вектор упругого смещения.

Ограничимся случаем, когда упругие смещения мембраны перпендикулярны ее плоскости, т. е. $\mathbf{u}=(0,\ 0,\ u)^T$. Введем в плоскости недеформированной мембраны полярные координаты $(\rho,\ \alpha)$ и будем представлять величину u в виде ряда по собственным функциям $U_{mn}'(\rho,\ \alpha)$ и $U_{mn}''(\rho,\ \alpha)$ свободных упругих колебаний мембраны [1, 2]:

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}q_{mn}'(t)\,U_{mn}'(\rho,\alpha)+q_{mn}''(t)\,U_{mn}''(\rho,\alpha)$$

где $q_{mn}'(t)$ и $q_{mn}''(t)$ – соответствующие обобщенные координаты

$$U_{mn}'(\rho,\ \alpha)=c_{mn}J_n(k_{mn}\rho)\cos n\alpha,\quad U_{mn}''(\rho,\ \alpha)=c_{mn}J_n(k_{mn}\rho)\sin n\alpha \qquad (1.2)$$

$J_n(k_{mn}\rho)$ — функция Бесселя n-го порядка, параметр k_{mn} — m-й корень уравнения $J_n(ka)=0$ (a — радиус мембраны), задающего условие отсутствия смещения на границе мембраны. Коэффициенты c_{mn} в (1.2) имеют вид $c_{mn}=(\sigma\pi a^2 J_n'^2(k_{mn}a)/2)^{-1/2}$, где σ — поверхностная плотность мембраны. Они подобраны таким образом, чтобы функции U_{mn}' и U_{mn}'' удовлетворяли условиям ортонормированности

$$\int\limits_S U_{mn}'U_{tl}'\,dm=\delta_{mt}\delta_{nl},\qquad \int\limits_S U_{mn}''U_{tl}''\,dm=\delta_{mt}\delta_{nl},\qquad \int\limits_S U_{mn}'U_{tl}''\,dm=0$$

где δ_{rs} — символ Кронекера, а интегрирование проводится по поверхности недеформированной мембраны. Для свободных упругих колебаний мембраны частота ω_{mn} связана с параметром k_{mn} соотношением $\omega_{mn}=ak_{mn}$ ($n=0, 1, \ldots;\ m=1, 2, \ldots$).

При $n=0$ упругие смещения мембраны симметричны относительно ее центра, а узловые линии (если они имеются) суть концентрические окружности, радиусы которых задаются уравнением $J_0(k_{m0}\rho)=0$. При $n\neq 0$ узловые линии состоят из концентрических окружностей с радиусами — корнями уравнения $J_n(k_{mn}\rho)=0$ и совокупности n диаметров, расположенных равномерно вокруг центра.

2. Кинематические и динамические характеристики системы. В системе координат $Oxyz$ положение центра масс O' несущего тела задается вектором $\mathbf{OO}'=-m_2\mathbf{l}/m_1$, где m_1 — масса несущего тела, m_2 — масса мембраны. Радиус-вектор центра масс O_g деформированной мембраны определяется выражением $OO_g=\mathbf{r}_{O_g}=\int_S\mathbf{r}_M dm/m_2$ и с учетом (1.1) есть $\mathbf{r}_{O_g}=\mathbf{l}+\int_S\mathbf{u}dm/m_2$. Центр масс G деформированной системы имеет радиус-вектор

$$\mathbf{OG}=\mathbf{r}_G=(m_1\mathbf{OO}'+m_2\mathbf{r}_{O_g})/(m_1+m_2)=\int\limits_S \mathbf{u}\,dm/(m_1+m_2)$$

Легко видеть, что точка G лежит на оси Oz, поэтому $\mathbf{r}_G=(0,\ 0,\ r_G)^T$.

Рассмотрим систему координат $Gx_1y_1z_1$ с началом в центре масс G деформированной системы и осями, параллельными главным центральным осям инерции недеформированной системы.

Радиусы-векторы произвольных точек P' и P несущего тела и деформированной мембраны в системе координат $Gx_1y_1z_1$ суть ($\mathbf{r}_H=OP'$):

$$\mathbf{GP}'=-\mathbf{r}_G+\mathbf{r}_H,\quad \mathbf{GP}=-\mathbf{r}_G+\mathbf{l}+\boldsymbol{\rho}_0+\mathbf{u} \qquad (2.1)$$

их абсолютные радиусы-векторы (O_* — притягивающий центр, $\mathbf{R}_G=O_*\mathbf{G}$):

$$\mathbf{O_*P}'=\mathbf{R}_G-\mathbf{r}_G+\mathbf{r}_H,\quad \mathbf{O_*P}=\mathbf{R}_G-\mathbf{r}_G+\mathbf{l}+\boldsymbol{\rho}_0+\mathbf{u} \qquad (2.2)$$

скорости в системе координат $\mathrm{G}x_1y_1z_1$

$$\mathbf{v}_{P'}^{\text{отн}}=-d\mathbf{r}_G/dt,\qquad \mathbf{v}_P^{\text{отн}}=-d\mathbf{r}_G/dt+d\mathbf{u}/dt \qquad (2.3)$$

абсолютные скорости ($\mathbf{v}_G$ — абсолютная скорость центра масс G):

$$\begin{gathered}\mathbf{v}_{P'}=\mathbf{v}_G+\boldsymbol{\omega}\times(-\mathbf{r}_G+\mathbf{r}_H)-d\mathbf{r}_G/dt\\ \mathbf{v}_P=\mathbf{v}_G+\boldsymbol{\omega}\times(-\mathbf{r}_G+\mathbf{l}+\boldsymbol{\rho}_0+\mathbf{u})+d(-\mathbf{r}_G+\mathbf{u})/dt\end{gathered} \qquad (2.4)$$

Здесь и всюду далее под $d\mathbf{f}/dt$ понимаем относительную производную вектора $\mathbf{f}$ по времени; через $\boldsymbol{\omega}$ обозначена абсолютная угловая скорость системы координат $Gx_1y_1z_1$ (а также и $Oxyz$).

Выпишем основные динамические величины системы. Матрица тензора инерции системы для точки G имеет вид

$$J=J_0+J_1+J_2, \quad J_0=\operatorname{diag}(A,\ B,\ C) \tag{2.5}$$

$$J_1=\begin{Vmatrix} 2l\int\limits_S u\,dm & 0 & -\int\limits_S \rho_x u\,dm \\ 0 & 2l\int\limits_S u\,dm & -\int\limits_S \rho_y u\,dm \\ -\int\limits_S \rho_x u\,dm & -\int\limits_S \rho_y u\,dm & 0 \end{Vmatrix}$$

$$J_2=\begin{Vmatrix} \int\limits_S u^2\,dm-(m_1+m_2)\,r_G^2 & 0 & 0 \\ 0 & \int\limits_S u^2\,dm-(m_1+m_2)\,r_G^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

где A, B, C — главные центральные моменты инерции системы в недеформированном состоянии.

Кинетический момент $\mathbf{K}$ и кинетическая энергия T системы вычисляются по формулам $\mathbf{K}=\int \mathbf{r}\times\mathbf{v}\,dm$, $T={}^1/_2\int v^2\,dm$, где интегрирование проводится по объему несущего тела и поверхности недеформированной мембраны, а величины относительного радиуса-вектора $\mathbf{r}$ и абсолютной скорости $\mathbf{v}$ точки системы определяются для несущего тела и мембраны по формулам (2.1) и (2.4).

Потенциальная энергия Π системы складывается из потенциальной энергии Π_g массовых сил (за счет гравитационного поля) и потенциальной энергии Π_* упругих деформаций. Потенциальная энергия массовых сил элемента dm системы вычисляется по формуле $d\Pi_g=-\mu dm/R_H-$ $-\mu dm/R_M$, где μ — гравитационная постоянная, а $\mathbf{R}_H=O_*P'$ и $\mathbf{R}_M=O_*P$ — абсолютные радиусы-векторы элементов dm несущего тела и мембраны соответственно, определяемые в (2.2). Величина Π_* для мембраны определяется по формуле [1]:

$$\Pi_*=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\omega_{mn}^2\left(q_{mn}'^2+q_{mn}''^2\right)+\ldots$$

где многоточие означает совокупность членов выше второго порядка относительно обобщенных координат.

Опуская довольно громоздкие выкладки, приведем полученные выражения для кинетического момента $\mathbf{K}$, кинетической энергии T и потенциальной энергии Π_g массовых сил рассматриваемой системы

$$\mathbf{K}=J\boldsymbol{\omega}+\mathbf{K}_*, \quad T={}^1/_2(m_1+m_2)v_G^2+T_*+\mathbf{K}_*\boldsymbol{\omega}+{}^1/_2\boldsymbol{\omega}\cdot J\boldsymbol{\omega}$$

$$\Pi_g=-\mu(m_1+m_2)/R_G-\mu\left[(J_{x_1}+J_{y_1}+J_{z_1})-3(\boldsymbol{\gamma}\cdot J\boldsymbol{\gamma})\right]/(2R_G^3)$$

Здесь $\mathbf{K}_*$ — относительный кинетический момент и T_* — относительная кинетическая энергия системы, вычисляемые по формулам $\mathbf{K}_*=$ $=\int\mathbf{r}\times\mathbf{v}_{\text{отн}}dm$, $T_*={}^1/_2\int v_{\text{отн}}^2dm$ и равные (с учетом (2.1), (2.3)):

$$\mathbf{K}_*=-(m_1+m_2)\mathbf{r}_G\times\frac{d\mathbf{r}_G}{dt}+\int\limits_S(\boldsymbol{\rho}_0+\mathbf{l})\times\frac{d\mathbf{u}}{dt}dm+\int\limits_S\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{u}}{dt}dm$$

$$T_* = -\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{dr_G}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\int\limits_s \left(\frac{du}{dt}\right)^2 dm$$

где $J_{x_1}+J_{y_1}+J_{z_1}$ — сумма диагональных элементов матрицы тензора инерции системы, определяемой в (2.5), γ — единичный вектор, направленный вдоль радиуса-вектора R_G. При вычислении Π_g отброшены члены порядка $O(r_H/R_G)^3$.

3. **Уравнения движения.** Дифференциальные уравнения движения системы относительно центра масс состоят из уравнений движения трехгранника $Gx_1y_1z_1$ в абсолютном пространстве (уравнения движения системы как целого) и уравнений, описывающих зависимость обобщенных координат от времени.

Для получения уравнений движения трехгранника $Gx_1y_1z_1$ воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента

$$\mathbf{K}^{\cdot}+\omega\times\mathbf{K}=\mathbf{M} \tag{3.1}$$

где $\mathbf{M}$ — момент гравитационных сил относительно центра масс G, определяемый по формуле

$$\mathbf{M}=\gamma\times\mathrm{grad}_\gamma\Pi_g=3\mu(\gamma\times J\gamma)/R_G^3$$

В проекциях на оси Gx_1, Gy_1, Gz_1 уравнение (3.1) запишется в виде (ω_0 — среднее движение центра масс по орбите):

$$[A\omega_1^{\cdot}+(C-B)\omega_2\omega_3-3\omega_0^2(C-B)\gamma_2\gamma_3]+2l\sum_{m=1}^{\infty} b_m q_{m0}'[\omega_1^{\cdot}-\omega_2\omega_3+3\omega_0^2\gamma_2\gamma_3]+$$
$$+2l\omega_1\sum_{m=1}^{\infty} b_m q_{m0}^{\cdot\prime}-\sum_{m=1}^{\infty} a_m q_{m1}'[\omega_3^{\cdot}+\omega_1\omega_2-3\omega_0^2\gamma_1\gamma_2]+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty} a_m q_{m1}^{\cdot\cdot\prime\prime}+\sum_{m=1}^{\infty} a_m q_{m1}''[(\omega_3^2-\omega_2^2)-3\omega_0^2(\gamma_3^2-\gamma_2^2)]=0 \tag{3.2}$$

$$[B\omega_2^{\cdot}+(A-C)\omega_1\omega_3-3\omega_0^2(A-C)\gamma_1\gamma_3]+2l\sum_{m=1}^{\infty} b_m q_{m0}'[\omega_2^{\cdot}+\omega_1\omega_3-3\omega_0^2\gamma_1\gamma_3]+$$
$$+2l\omega_2\sum_{m=1}^{\infty} b_m q_{m0}^{\cdot\prime}-\sum_{m=1}^{\infty} a_m q_{m1}^{\cdot\cdot\prime}+\sum_{m=1}^{\infty} a_m q_{m1}'[(\omega_1^2-\omega_3^2)-3\omega_0^2(\gamma_1^2-\gamma_3^2)]- \tag{3.3}$$
$$-\sum_{m=1}^{\infty} a_m q_{m1}''[\omega_3^{\cdot}-\omega_1\omega_2+3\omega_0^2\gamma_1\gamma_2]=0$$

$$[C\omega_3^{\cdot}+(B-A)\omega_1\omega_2-3\omega_0^2(B-A)\gamma_1\gamma_2]-2\omega_1\sum_{m=1}^{\infty} a_m q_{m1}^{\cdot\prime}-$$
$$-\sum_{m=1}^{\infty} a_m q_{m1}'[\omega_1^{\cdot}-\omega_2\omega_3+3\omega_0^2\gamma_2\gamma_3]-2\omega_2\sum_{m=1}^{\infty} a_m q_{m1}^{\cdot\prime\prime}-$$
$$-\sum_{m=1}^{\infty} a_m q_{m1}''[\omega_2^{\cdot}+\omega_1\omega_3-3\omega_0^2\gamma_1\gamma_3]=0 \tag{3.4}$$

Здесь ω_1, ω_2, ω_3 и γ_1, γ_2, γ_3 — проекции векторов ω и γ на оси Gx_1, Gy_1, Gz_1. При выводе уравнений использованы следующие соотношения, полученные из (1.2):

$$\int\limits_S u\,dm=\sum_{m=1}^{\infty} b_m q_{m0}', \qquad \int\limits_S \rho_x u\,dm=\sum_{m=1}^{\infty} a_m q_{m1}', \qquad \int\limits_S \rho_y u\,dm=\sum_{m=1}^{\infty} a_m q_{m1}''$$

$$a_m=\int\limits_S \rho_x U_{m1}'\,dm=\int\limits_S \rho_y U_{m1}''\,dm=\pi\sigma c_{m1}\int\limits_0^a J_1(k_{m1}\rho)\rho^2\,d\rho$$

$$b_m=\int\limits_S U_{m0}'\,dm=2\pi\sigma c_{m0}\int\limits_0^a J_0(k_{m0}\rho)\rho\,d\rho$$

Будем предполагать, что система обладает внутренней вязкостью и возникающие в результате упругих колебаний мембраны диссипативные силы описываются функцией Рэлея вида [3]:

$$\Psi=\chi b\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(\dot q_{mn}'^2+\dot q_{mn}''^2)$$

где χ — безразмерный параметр, b — положительная постоянная.

Зависимость обобщенных координат q_{mn}' и q_{mn}'' от времени будем описывать при помощи уравнений Лагранжа второго рода. Приведем эти уравнения

$$\ddot q_{m0}'-b_m\sum_{k=1}^{\infty} b_k\ddot q_{k0}'/(m_1+m_2)+2\chi b\omega_{m0}^2\dot q_{m0}'+\omega_{m0}^2 q_{m0}'-$$
$$-[\omega_1^2+\omega_2^2-\omega_0^2(1-3\gamma_3^2)]\left[b_m l+q_{m0}'-b_m\sum_{k=1}^{\infty} b_k q_{k0}'/(m_1+m_2)\right]=0 \tag{3.5}$$

$$\ddot q_{m1}'+2\chi b\omega_{m1}^2\dot q_{m1}'+[\omega_{m1}^2-\omega_1^2-\omega_2^2+\omega_0^2(1-3\gamma_3^2)]q_{m1}'-$$
$$-a_m(\dot\omega_2-\omega_1\omega_3+3\omega_0^2\gamma_1\gamma_3)=0 \tag{3.6}$$

$$\ddot q_{m1}''+2\chi b\omega_{m1}^2\dot q_{m1}''+[\omega_{m1}^2-\omega_1^2-\omega_2^2+\omega_0^2(1-3\gamma_3^2)]q_{m1}''+$$
$$+a_m(\dot\omega_1+\omega_2\omega_3-3\omega_0^2\gamma_2\gamma_3)=0 \qquad (m=1,2,\ldots) \tag{3.7}$$

Для остальных обобщенных координат q_{m0}'', q_{mn}', q_{mn}'' ($n=2,\ 3,\ldots$; $m=1,2,\ldots$) вид уравнений одинаков. Введем для краткости общее для указанных переменных обозначение q и частоту колебаний ω_q. Для q имеем следующее уравнение

$$\ddot q+2\chi b\omega_q^2\dot q+[\omega_q^2-\omega_1^2-\omega_2^2+\omega_0^2(1-3\gamma_3^2)]q=0 \tag{3.8}$$

Уравнения (3.2)—(3.8) в совокупности с кинематическими уравнениями Эйлера описывают движение рассматриваемой системы (несущее тело и мембрана) в гравитационном поле. Уравнение (3.8) имеет частное решение $q=0$, когда соответствующие упругие колебания мембраны не возбуждаются. Из уравнений (3.2)—(3.7) следует также, что указанные колебания не влияют как на изменение обобщенных координат q_{m0}', q_{m1}', q_{m1}'' ($m=1$, 2, ...), так и на движение системы как целого.

4. Квазистатический режим движения. Рассмотрим квазистатический режим движения системы [4, 5], когда упругие колебания мембраны будут вынужденными под действием гравитационных сил и сил инерции. Будем считать, что характерное время затухания свободных упругих колебаний мембраны много меньше периода T_0 обращения центра масс по орбите, но много больше характерного периода упругих колебаний. Введем малый параметр $\varepsilon=\omega_0/\Omega_1$ (Ω_1 — наименьшая частота свободных упругих колебаний мембраны), полагая $T_0\sim 1$. В силу принятых предположений между параметрами ε и χ имеет место соотношение $0<\chi\ll\varepsilon\ll 1$. Будем всюду далее считать $\chi\sim\varepsilon^{\delta+1}$ $(0<\delta<1)$.

В квазистатическом режиме величину обобщенной координаты q_{mn} можно определить по формуле [5]:

$$q_{mn}=\varepsilon^2\lambda_{mn}^{-2}[Q_{mn}-2\chi bQ_{mn}^{\cdot}]+O(\varepsilon^4)\quad(\lambda_{mn}=\varepsilon\omega_{mn})\tag{4.1}$$

где Q_{mn} — «свободный член», не зависящий от обобщенных координат, входящий в уравнение для q_{mn}. Для q_{m1}' и q_{m1}'' эти члены такие

$$Q_{m1}'=a_m[\omega_2^{\cdot}-\omega_1\omega_3+3\omega_0^2\gamma_1\gamma_3],\ Q_{m1}''=-a_m[\omega_1^{\cdot}+\omega_2\omega_3-3\omega_0^2\gamma_2\gamma_3]\tag{4.2}$$

Для величин q_{m0}', задаваемых системой уравнений (3.5), не разрешенной относительно старших производных, можно, путем разложения решения в ряд по степеням ε, получить соотношение, совпадающее с (4.1), причем

$$Q_{m0}'=b_ml[\omega_1^2+\omega_2^2-\omega_0^2(1-3\gamma_3^2)]\tag{4.3}$$

Отметим, что в квазистатическом режиме решение уравнения (3.8) суть $q=0$, что совпадает с упомянутым выше частным решением.

Будем рассматривать систему уравнений (3.2)—(3.4), где обобщенные координаты определены в соотношениях (4.1)—(4.3).

5. Положения относительного равновесия. Анализ уравнений (3.2) — (3.4) с учетом (4.1)—(4.3) показывает, что если система имеет трехосный эллипсоид инерции ($A\neq B\neq C\neq A$), то существуют частные решения, отвечающие стационарным движениям системы. Эти частные решения определяются соотношениями

$$\omega_i=\text{const}\,(i=1,\ 2,\ 3),\ q_{m1}'=q_{m1}''=0,\ q_{m0}'=\text{const}\ (m=1,\ 2,\dots)\tag{5.1}$$

$$\omega_1\omega_2=3\omega_0^2\gamma_1\gamma_2,\quad \omega_1\omega_3=3\omega_0^2\gamma_1\gamma_3,\quad \omega_2\omega_3=3\omega_0^2\gamma_2\gamma_3\tag{5.2}$$

Равенства (5.1) означают, что в орбитальной системе координат система находится в положении относительного равновесия. Мембрана деформирована, но неподвижна относительно несущего тела. Деформации мембраны (отвечающие обобщенным координатам q_{m0}') симметричны относительно центра мембраны; узловые линии представляют собой концентрические окружности.

Соотношения (5.2) задают ориентацию системы (несущее тело и мембрана) в орбитальной системе координат в положении относительного равновесия. Отметим, что (5.2) совпадают с аналогичными соотношениями, описывающими относительные равновесия абсолютно твердого тела, имеющего трехосный эллипсоид инерции, на круговой орбите в ньютоновском гравитационном поле [6]. Эти относительные равновесия следующие

$$\omega_1=\omega_3=0,\ \omega_2=\omega_0,\ \gamma_1=\gamma_2=0,\ \gamma_3=1\tag{5.3}$$

$$\omega_1=\omega_2=0,\ \omega_3=\omega_0,\ \gamma_1=\gamma_3=0,\ \gamma_2=1\tag{5.4}$$

$$\omega_2=\omega_3=0,\ \omega_1=\omega_0,\ \gamma_1=\gamma_3=0,\ \gamma_2=1\tag{5.5}$$

В положениях равновесия (5.3)—(5.5) ось симметрии мембраны (ось Oz или Gz_1) направлена соответственно по радиусу-вектору центра масс относительно притягивающего центра, по нормали к плоскости орбиты и по вектору скорости центра масс системы. Обобщенные координаты q_{m0} в положениях (5.3), (5.4) принимают соответственно значения $3\varepsilon^2\lambda_{m0}^{-2}b_m l\omega_0^2$, $-\varepsilon^2\lambda_{m0}^{-2}b_m l\omega_0^2$, в положении (5.5) деформации мембраны отсутствуют. Далее проводится исследование устойчивости решений (5.3)—(5.5).

6. Устойчивость решения (5.3). Введем орбитальную систему координат $GXYZ$, направив ее оси GX, GY, GZ соответственно по радиусу-вектору центра масс, по вектору скорости и по нормали к плоскости орбиты. Ориентацию трехгранника $Gx_1y_1z_1$ относительно $GXYZ$ зададим при помощи углов Эйлера. В рассматриваемом равновесии углы Эйлера имеют значения

$$\psi=\pi/2,\ \theta=\pi/2,\ \varphi=0 \tag{6.1}$$

Полагая $\psi=\pi/2+x_1$, $\theta=\pi/2+x_2$, $\varphi=x_3$, линеаризуем систему (3.2)—(3.4), с подстановкой в нее (4.1)—(4.3), в окрестности решения (6.1). Линеаризованная система имеет вид (штрих означает дифференцирование по переменной $\tau=\omega_0 t$):

$$\begin{gathered}x_1''=-3(\theta_A-\theta_C)x_1+3B^{-1}\varepsilon^2\omega_0^2[2\varkappa_0 l^2(5\theta_A-5\theta_C-3)+\\+3\varkappa_1(\theta_A-\theta_C+1)^2]x_1-6B^{-1}\varepsilon^2\chi b\omega_0^3[4\varkappa_0 l^2(\theta_A-\theta_C)+\\+3\varkappa_1(\theta_A-\theta_C+1)^2]x_1'\end{gathered} \tag{6.2}$$

$$\begin{gathered}x_2''+2B^{-1}\theta_A^{-2}\varepsilon^2\chi b\omega_0^3\varkappa_1(\theta_A-\theta_C+1)\{\theta_C^{-1}(3\theta_C-\theta_A+1)[4\theta_A^{-1}(\theta_A-\theta_C+1)+\\+\theta_A^{-1}\theta_C^{-1}(\theta_A+\theta_C-1)^2]+\theta_C^{-2}(\theta_A+\theta_C-1)(\theta_A-1)\}x_2'+\\+4\{-\theta_A^{-1}(\theta_C-1)+B^{-1}\varepsilon^2\omega_0^2\times\\\times[6\theta_A^{-2}l^2\varkappa_0(\theta_A+\theta_C-1)+\varkappa_1\theta_A^{-2}(\theta_A-\theta_C+1)(\theta_A^{-1}\theta_C^{-1}(\theta_C-1)(3\theta_C-\theta_A+1)-\\-4)]\}x_2+\{\theta_A^{-1}(\theta_A+\theta_C-1)-B^{-1}\varepsilon^2\omega_0^2[6\theta_A^{-2}l^2\varkappa_0(\theta_A+\theta_C-1)+\varkappa_1\theta_A^{-2}\times\\\times(\theta_A-\theta_C+1)(\theta_A^{-1}\theta_C^{-1}(3\theta_C-\theta_A+1)(\theta_A+\theta_C-1)+\theta_C^{-1}(\theta_A-1)-4)]\}x_3'+\\+2B^{-1}\theta_A^{-2}\theta_C^{-1}\varepsilon^2\chi b\omega_0^3\varkappa_1(\theta_A-\theta_C+1)(\theta_A-1)[\theta_A^{-1}\theta_C^{-1}(3\theta_C-\theta_A+\\+1)(\theta_A+\theta_C-1)+\theta_C^{-1}(\theta_A-1)-4]x_3=0\end{gathered} \tag{6.3}$$

$$\begin{gathered}x_3''-\theta_C^{-1}(\theta_A+\theta_C-1)x_2'-\theta_C^{-1}(\theta_A-1)x_3-\\-2B^{-1}\theta_A^{-1}\theta_C^{-1}\varepsilon^2\omega_0^2\varkappa_1(\theta_A-\theta_C+1)\times\\\times\{[\theta_C^{-1}(3\theta_C-\theta_A+1)x_2'-\theta_C^{-1}(\theta_A-1)x_3]-\\-2\chi b\omega_0[4\theta_A^{-1}\theta_C^{-1}(\theta_C-1)(3\theta_C-\\-\theta_A+1)x_2-(\theta_A^{-1}\theta_C^{-1}(3\theta_C-\theta_A+1)(\theta_A+\theta_C-1)+\\+\theta_C^{-1}(\theta_A-1))x_3']\}=0\end{gathered} \tag{6.4}$$

$$\theta_A=A/B,\qquad \theta_C=C/B,\qquad \varkappa_0=\sum_{m=1}^{\infty}b_m^2/\lambda_{m0}^2,\qquad \varkappa_1=\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2/\lambda_{m1}^2$$

В системе (6.2)—(6.4) первое уравнение отделяется. Его характеристическое уравнение имеет пару корней с отрицательными вещественными частями при условии $\theta_A>\theta_C$. Полагая это условие выполненным, рассмотрим уравнения (6.3)—(6.4). Соответствующее им характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4+\alpha_1\lambda^3+\alpha_2\lambda^2+\alpha_3\lambda+\alpha_4=0 \tag{6.5}$$

$$\begin{gathered}\alpha_1=2B^{-1}\theta_A^{-2}\theta_C^{-2}\varepsilon^2\chi b\omega_0^3\varkappa_1(\theta_A-\theta_C+\\+1)^2[\theta_A^{-1}(3\theta_C-\theta_A+1)^2-(\theta_A-1)]+O(\varepsilon^4)\end{gathered}$$

$$\alpha_2=-\theta_C^{-1}(\theta_A-1)-4\theta_A^{-1}(\theta_C-1)+\theta_A^{-1}\theta_C^{-1}(\theta_A+\theta_C-1)^2+O(\varepsilon^2)$$
$$\alpha_3=-8B^{-1}\theta_A^{-3}\theta_C^{-2}\varepsilon^2\chi b\omega_0^3\varkappa_1(\theta_A-\theta_C+1)^2(\theta_A-1)(3\theta_C+1)+O(\varepsilon^4)$$
$$\alpha_4=4\theta_A^{-1}\theta_C^{-1}(\theta_A-1)(\theta_C-1)+O(\varepsilon^2)$$

При $\varepsilon=0$ (случай спутника — твердого тела) области устойчивости задаются [6] в плоскости параметров θ_A, θ_C неравенствами

$$1>\theta_A>\theta_C,\ \theta_A+\theta_C>1\ \text{(область I)} \tag{6.6}$$

$$\theta_A>\theta_C>1,\ \theta_C+1>\theta_A,\ \alpha_2^2>4\alpha_4\ \text{(область II)} \tag{6.7}$$

В области I имеет место устойчивость по Ляпунову, а в области II — формальная устойчивость или устойчивость для большинства начальных условий (за исключением кривых резонансов до четвертого порядка включительно) [6, 7]. Отметим, что в области II устойчивость обеспечивается гироскопическими силами.

В областях I и II при $\varepsilon=0$ (а также при $\varepsilon\neq0$, $\chi=0$) корни уравнения (6.5) чисто мнимые. Обозначим их через $\pm i\sigma_1$, $\pm i\sigma_2$ ($\sigma_1>\sigma_2>0$) при $\varepsilon=0$ и через $\pm i\Sigma_1$, $\pm i\Sigma_2$ ($\Sigma_1>\Sigma_2>0$) при $\varepsilon\neq0$, $\chi=0$. При $\varepsilon\neq0$, $\chi\neq0$ корни уравнения (6.5) будут $\lambda_{1,2}=\pm i\Sigma_1+\varepsilon^2\chi\delta_1+O(\varepsilon^4)$, $\lambda_{3,4}=\pm i\Sigma_2+\varepsilon^2\chi\delta_2+O(\varepsilon^4)$, получив вещественные добавки (с точностью до $O(\varepsilon^4)$):

$$\varepsilon^2\chi\delta_1=(\alpha_3-\alpha_1\sigma_1^2)/(2(\sigma_1^2-\sigma_2^2)),\ \varepsilon^2\chi\delta_2=(\alpha_3-\alpha_1\sigma_2^2)/(2(\sigma_2^2-\sigma_1^2)) \tag{6.8}$$

Исследуем их знаки в областях I и II. Как показывают вычисления, величина

$$\Delta=(\alpha_3-\alpha_1\sigma_1^2)(\alpha_3-\alpha_1\sigma_2^2) \tag{6.9}$$

имеет следующий вид:

$$\Delta=\theta_A^{-1}\theta_C^{-1}(\theta_A-1)[24B^{-1}\theta_A^{-2}\theta_C^{-1}\varepsilon^2\chi b\omega_0^3\varkappa_1(\theta_A-\theta_C+1)^2]^2$$

В области II $\Delta>0$; из (6.8), (6.9) следует, что величины δ_1 и δ_2 имеют разные знаки. Характеристическое уравнение (6.5) имеет пару корней с положительными вещественными частями, и рассматриваемое относительное равновесие неустойчиво. Имевшая место при $\varepsilon=0$ гироскопическая устойчивость разрушена за счет упругости и диссипации.

В области I $\Delta<0$, поэтому $\alpha_3-\alpha_1\sigma_1^2<0$ и $\alpha_3-\alpha_1\sigma_2^2>0$ (в силу условия $\sigma_1^2>\sigma_2^2$ и очевидного неравенства $\alpha_1>0$). Следовательно, в этой области $\delta_1<0$, $\delta_2<0$, т. е. корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части. Имеем асимптотическую устойчивость по переменным ψ, θ, φ, ψ', θ', φ'.

7. Устойчивость относительного равновесия (5.4). Орбитальную систему координат $GXYZ$ введем так, что ее оси GX, GY, GZ направлены соответственно по вектору скорости центра масс, по нормали к орбите и вдоль радиуса-вектора центра масс. Введем углы Эйлера, задавая их обычным образом. Для решения (5.4) имеем

$$\psi=\pi,\quad \theta=\pi/2,\quad \varphi=0 \tag{7.1}$$

Положив $\psi=\pi+x_1$, $\theta=\pi/2+x_2$, $\varphi=x_3$, имеем следующую линеаризованную в окрестности решения (7.1) систему уравнений ($\theta_A=A/C$, $\theta_B=B/C$):

$$\begin{aligned}&x_1''-\theta_B^{-1}(\theta_A-1)x_1+\theta_B^{-1}(\theta_A+\theta_B-1)x_2'-2C^{-1}\theta_B^{-2}\varepsilon^2\omega_0^2l^2\varkappa_0(\theta_A-\theta_B-1)(x_1-\\&-x_2')+C^{-1}\theta_B^{-2}\varkappa_1\varepsilon^2\omega_0^2(\theta_A+\theta_B-\\&-1)\{[(\theta_A^{-1}\theta_B^{-1}(\theta_A-1)(\theta_B-1)-1)x_1+(\theta_A^{-1}\theta_B^{-1}\times\\&\times(\theta_B-1)(3\theta_B-\theta_A+1)+1)x_2']-\\&-2\theta_A^{-1}\chi b\omega_0(\theta_B-1)[(\theta_B^{-1}(\theta_A-1)+\theta_A^{-1}\theta_B^{-1}\times\\&\times(3\theta_B-\theta_A+1)(\theta_A+\theta_B-1)+1)x_1'+\\&+4(\theta_A^{-1}\theta_B^{-1}(\theta_B-1)(3\theta_B-\theta_A+1)+1)x_2]\}=0\end{aligned} \tag{7.2}$$

$$x_2''-\theta_A^{-1}(\theta_A+\theta_B-1)x_1'-4\theta_A^{-1}(\theta_B-1)x_2-$$
$$-2C^{-1}\theta_A^{-2}\varepsilon^2\omega_0^2l^2\varkappa_0(\theta_B-\theta_A-1)\times$$
$$\times(x_1'+4x_2)-C^{-1}\theta_A^{-2}\varkappa_1\varepsilon^2\omega_0^2(\theta_A+$$
$$+\theta_B-1)\{[(\theta_B^{-1}(\theta_A-1)+\theta_A^{-1}\theta_B^{-1}\times$$
$$\times(3\theta_B-\theta_A+1)(\theta_A+\theta_B-1)+4)x_1'+$$
$$+4(\theta_A^{-1}\theta_B^{-1}(\theta_B-1)(3\theta_B-\theta_A+1)+4)x_2]-$$
$$-2\chi b\omega_0[\theta_B^{-1}(\theta_A-1)(\theta_B^{-1}(\theta_A-1)+$$
$$+\theta_A^{-1}\theta_B^{-1}(3\theta_B-\theta_A+1)(\theta_A+\theta_B-1)+4)x_1+$$
$$+\theta_A^{-1}(\theta_A+\theta_B-1)(-\theta_B^{-1}(\theta_A-1)+$$
$$+\theta_A^{-1}\theta_B^{-1}(3\theta_B-\theta_A+1)^2)x_2']\}=0 \qquad (7.3)$$
$$x_3''+3(\theta_A-\theta_B)x_3=0 \qquad (7.4)$$

Характеристическое уравнение, отвечающее (7.4), при условии $\theta_A>\theta_B$ имеет пару чисто мнимых корней. Уравнения (7.2), (7.3) (при выполнении этого условия) исследуются так же, как в п. 6. Характеристическое уравнение имеет вид (6.5), где

$$\alpha_1=2C^{-1}\theta_A^{-2}\theta_B^{-2}\varepsilon^2\chi b\omega_0^3\varkappa_1(\theta_A+\theta_B-$$
$$-1)^2[\theta_A^{-1}(3\theta_B-\theta_A+1)^2-\theta_B^{-1}(3\theta_B+1)\times$$
$$\times(\theta_B-1)-(\theta_A-1)]+O(\varepsilon^4)$$
$$\alpha_2=\theta_A^{-1}\theta_B^{-1}(\theta_A+\theta_B-1)^2-\theta_B^{-1}(\theta_A-1)-4\theta_A^{-1}(\theta_B-1)+O(\varepsilon^2)$$
$$\alpha_3=-8C^{-1}\theta_A^{-2}\theta_B^{-2}\varepsilon^2\chi b\omega_0^3\varkappa_1(\theta_A+\theta_B-$$
$$-1)^2[\theta_B^{-1}(\theta_B-1)+\theta_A^{-1}(\theta_A-1)(3\theta_B+1)]+O(\varepsilon^4)$$
$$\alpha_4=4\theta_A^{-1}\theta_B^{-1}(\theta_A-1)(\theta_B-1)+O(\varepsilon^2)$$

Области устойчивости I и II рассматриваемого решения при $\varepsilon=0$ задаются неравенствами (6.6), (6.7), если в них заменить θ_C на θ_B. Величина Δ, определенная в (6.9), имеет вид

$$\Delta=\theta_A\theta_B[12C^{-1}\theta_A^{-3}\theta_B^{-3}\varepsilon^2\chi b\omega_0^3\varkappa_1(\theta_A+$$
$$+\theta_B-1)^2]^2[\theta_A(7\theta_B^3-6\theta_B^2+4\theta_B-1)-\theta_B(3\theta_B^3-\theta_B^2+\theta_B+1)]$$

Анализ величин α_1 и Δ в областях I и II показывает, что в области II $\Delta>0$ и решение неустойчиво, а в области I $\alpha_1>0$ и $\Delta<0$, т. е. корни уравнения (6.5) имеют отрицательные вещественные части. Для строгого выяснения характера устойчивости в области I необходимо рассмотреть нелинейную задачу.

Отметим, что в уравнениях (3.2)–(3.3) в окрестности решения (7.1) отсутствуют слагаемые, содержащие только переменные φ и φ'. Действительно, при $\psi=\pi$, $\theta=\pi/2$, $\varphi=\varphi$ эти уравнения удовлетворяются тождественно. Уравнение (3.4) при этом примет вид

$$\varphi''=-{}^3/_2(\theta_A-\theta_B)\sin 2\varphi \qquad (7.5)$$

Для уравнения (7.5) стационарное решение $\varphi=0$ устойчиво по Ляпунову; в качестве функции Ляпунова возьмем функцию $V_1={}^1/_2\varphi'^2+{}^3/_4(\theta_B-\theta_A)\cos 2\varphi$. Она определенно-положительна в окрестности точки $\varphi=0$, $\varphi'=0$ и ее производная $V_1'\equiv 0$ в силу уравнения (7.5).

Рассмотрим линейные уравнения (7.2)–(7.3). Так как в области I имеет место асимптотическая устойчивость по переменным ψ, θ, ψ', θ', то существует определенно-положительная квадратичная форма переменных x_1, x_1', x_2, x_2' вида $V_2=d_1x_1^2+\ldots+d_{10}x_2'^2$, такая, что ее производная в силу уравнений (7.2)–(7.3) есть [8]:

$$V_2'=-(x_1^2+x_2^2+x_1'^2+x_2'^2)$$

Покажем, что в области I имеет место устойчивость по Ляпунову решения (7.1) по всем переменным ψ, θ, ψ', θ', φ, φ'. Запишем систему уравнений (3.2)—(3.4) в окрестности решения (7.1) в виде (для удобства будем далее обозначать x_3 через y):

$$
\begin{aligned}
x_1'' &= p_{11}x_1+p_{12}x_2+X_1(y, y', x_1, x_1', x_2, x_2') \\
x_2'' &= p_{21}x_1+p_{22}x_2+X_2(y, y', x_1, x_1', x_2, x_2') \\
y'' &= py+Y(y, y', x_1, x_1', x_2, x_2')
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

где p_{ij} и p — коэффициенты линеаризованной системы (3.2)—(3.4), а через X_1, X_2, Y обозначены совокупности членов, разложение которых по их аргументам начинается со слагаемых степени не меньше второй, причем, как установлено ранее, $X_s(y, y'\ 0, 0, 0, 0)\equiv 0$ $(s=1, 2)$. Величины X_1, X_2, Y представим в виде

$$
\begin{gathered}
X_s(y, y', x_1, x_1', x_2, x_2')=X_1^{(s)}+X_2^{(s)}+\ldots \quad (s=1, 2) \\
Y(y, y', x_1, x_1', x_2, x_2')=Y_0+Y_1+Y_2+\ldots
\end{gathered}
$$

где Y_0; $X_1^{(s)}$ и Y_1; $X_2^{(s)}$ и Y_2 и так далее означают соответственно совокупность членов, содержащих только переменные y, y' в последнем уравнении системы (7.6); совокупности членов, линейных по переменным x_1, x_1', x_2, x_2'; совокупности квадратичных по x_1, x_1', x_2, x_2' членов и т. д. Коэффициентами в Y_j, $X_j^{(s)}$ $(j=1, 2, \ldots; s=1, 2)$ являются функции переменных y и y', содержащие все степени этих переменных (в $X_j^{(s)}$ — начиная с первой степени, в Y_j — с нулевой). При помощи анализа уравнения (3.4) можно показать, что $Y_1\equiv 0$.

В качестве функции Ляпунова берем функцию $V=V_1+V_2$, определенно-положительную по x_1, x_1', x_2, x_2', y, y'. Его полная производная V' в силу уравнений (7.6) будет

$$
\begin{aligned}
V' &= -(x_1^2+x_1'^2+x_2^2+x_2'^2)+y'(Y_2+Y_3+\ldots)+ \\
&+(\partial V_2/\partial x_1')(X_1^{(1)}+X_2^{(1)}+\ldots)+(\partial V_2/\partial x_2')(X_1^{(2)}+X_2^{(2)}+\ldots)
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

В (7.7) $\partial V_2/\partial x_1'$, $\partial V_2/\partial x_2'$ — линейные формы переменных x_1, x_1', x_2, x_2', разложение функций $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$ (линейных по указанным переменным) начинается со степени, не меньше второй по x_1, x_1', x_2, x_2', y, y'. Поэтому в достаточно малой окрестности начала координат функция V' отрицательна по переменным x_1, x_1', x_2, x_2', y, y'.

Итак, в области I имеем устойчивость по Ляпунову решения (7.1) по переменным ψ, ψ', θ, θ', φ, φ', причем из проведенных построений легко видеть, что по переменным ψ, ψ', θ, θ' имеет место асимптотическая устойчивость, а по переменным φ, φ' — просто устойчивость по Ляпунову.

8. Устойчивость решения (5.5). Вопрос об устойчивости решения (5.5) исследуется так же, как в п. 6. В качестве орбитальной берем систему координат, описанную в п. 7.

Для решения (5.5) имеем $\psi=\pi/2$, $\theta=\pi/2$, $\varphi=0$. Полагая $\psi=\pi/2+x_1$, $\theta=\pi/2+x_2$, $\varphi=x_3$, получаем линеаризованную систему уравнений, которая здесь не приводится. Уравнение для x_2 отделяется и при условии $\theta_C>\theta_B$ $(\theta_B=B/A,\ \theta_C=C/A)$ имеет пару корней с отрицательными вещественными частями. Для двух других уравнений характеристическое уравнение имеет вид (6.5), где

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= -2A^{-1}\theta_B^{-2}\theta_C^{-2}\varepsilon^2\chi b\omega_0^3\varkappa_1(\theta_C-\theta_B-1)^2(\theta_B-1)(3\theta_B+1)+O(\varepsilon^4) \\
\alpha_2 &= \theta_B^{-1}\theta_C^{-1}(\theta_B+\theta_C-1)^2-4\theta_C^{-1}(\theta_B-1)-\theta_B^{-1}(\theta_C-1)+O(\varepsilon^2) \\
\alpha_3 &= -8A^{-1}\theta_B^{-3}\theta_C^{-2}\varepsilon^2\chi b\omega_0^3\varkappa_1(\theta_C-\theta_B-1)^2(\theta_B-1)+O(\varepsilon^4) \\
\alpha_4 &= 4\theta_B^{-1}\theta_C^{-1}(\theta_B-1)(\theta_C-1)+O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

а величина Δ равна

$$\Delta=\theta_B(\theta_B-1)\,[12A^{-1}\theta_B^{-3}\theta_C^{-2}\varepsilon^2\chi b\omega_0^3\varkappa_1(\theta_C-\theta_B-1)^2(\theta_B-1)]^2$$

Области устойчивости I и II рассматриваемого решения при $\varepsilon=0$ задаются неравенствами (6.6), (6.7), если заменить θ_A на θ_C и θ_C на θ_B. Так же, как и в случае решения (5.3), имеем в области II $\Delta>0$ (неустойчивость) и в области I $\Delta<0$, $\alpha_1>0$ (асимптотическую устойчивость).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стрэтт Дж. В.* (*Лорд Рэлей*). Теория звука. Т. 1. М.– Л.: Гостехиздат, 1940. 499 с.
2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1956. 628 с.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
4. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // ПММ. 1978. Т. 42. № 1. С. 34–42.
5. *Маркеев А. П.* К динамике упругого тела в гравитационном поле // Космические исследования. 1989. Т. 27. Вып. 2. С. 163–175.
6. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука. 1965. 416 с.
7. *Маркеев А. П., Сокольский А. Г.* К задаче об устойчивости относительного равновесия спутника на круговой орбите // Космические исследования. 1975. Т. 13. Вып. 2. С. 139–146.
8. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

Москва

Поступила в редакцию 30.VIII.1990