**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1992**

УДК 531.38

 А. П. ИВАНОВ

О БЕЗУДАРНЫХ ПРЫЖКАХ НЕОДНОРОДНОГО КОЛЕСА. 1. СЛУЧАЙ ГЛАДКОЙ ОПОРЫ

Обсуждается новый тип периодических движений тяжелого твердого тела на горизонтальной плоскости, складывающихся из чередующихся фаз безопорного полета (прыжка) и непрерывного контакта, причем смена фаз не сопровождается ударами. В случае неоднородного круглого диска, катящегося по абсолютно гладкой опоре, построены все такие движения и исследованы их свойства. Проведен анализ устойчивости данных движений.

1. Постановка задачи. Тяжелое твердое тело на горизонтальной плоскости подчинено ограничению одностороннего типа: хотя тело не может проникнуть ниже опоры, оно может оторваться от нее при некоторых начальных условиях [1]. Последующая за отрывом фаза полета вследствие силы тяжести неминуемо оканчивается возобновлением контакта, что в общем случае сопровождается ударом, т. е. скачкообразным изменением скорости. Наибольший интерес с точки зрения приложений представляет возможность безударного окончания прыжка, так как при этом, например, в шагающих механизмах не возникает ударных перегрузок [2]. Существование и свойства движений с безударными прыжками зависят от геометрических и динамических свойств тела, а также от характера его взаимодействия с опорой.

В данной статье изучается движение неоднородного круглого диска в некоторой фиксированной вертикальной плоскости (что динамически эквивалентно движению неоднородного шара параллельно одной из его главных плоскостей инерции, занимающей вертикальное положение). Сначала рассматривается случай абсолютно гладкой опорной плоскости.

Цель работы состоит в построении всех возможных периодических движений диска с безударными прыжками и исследовании их устойчивости.

2. Уравнения движения и его различные фазы. Введем в плоскости движения диска инерциальную систему координат XOY, направляя ось X в опорной плоскости, а ось Y — вертикально вверх. Пусть C — центр диска, а $G\neq C$ — его центр масс. Положение системы однозначно определяется координатами x, y точки C и углом φ между вектором $\mathbf{CG}$ и осью X.

Для абсолютно гладкой опоры ее реакция N направлена от точки касания к центру диска, и уравнения движения можно записать в соответствии с общими теоремами динамики в виде

$$mx_G^{\cdot\cdot}=m(x^\cdot-r\varphi^\cdot\sin\varphi)^\cdot=0 \tag{2.1}$$

$$my_G^{\cdot\cdot}=m(y^\cdot+r\varphi^\cdot\cos\varphi)^\cdot=N-mg$$

$$J\varphi^{\cdot\cdot}=-Nr\cos\varphi$$

где $r=|\mathbf{CG}|$, m — масса диска, J — его центральный момент инерции, g — ускорение свободного падения.

В фазе непрерывного контакта $y \equiv R$, где R — радиус диска. Исключая из второго и третьего уравнений (2.1) величину $\varphi^{\cdot\cdot}$, получим для N следующее выражение

$$N=(g-r\varphi^{\cdot 2}\sin\varphi)(m^{-1}+J^{-1}r^2\cos^2\varphi)^{-1} \tag{2.2}$$

Поскольку величина N неотрицательна, из равенства (2.2) получаем следующее условие сохранения контакта диска и опоры:

$$g-r\varphi^{\cdot 2}\sin\varphi\geqslant 0 \tag{2.3}$$

Нарушение знака неравенства (2.3) свидетельствует о прекращении контакта диска с опорой и переходе к фазе прыжка. В этой фазе в уравнениях (2.1) $N\equiv 0$. Полет продолжается до тех пор, пока $y>R$; поскольку при этом уравнения движения имеют вид

$$\varphi^{\cdot}=\text{const},\quad y^{\cdot\cdot}=r\varphi^{\cdot 2}\sin\varphi-g \tag{2.4}$$

то контакт неминуемо возобновится в тот момент, когда величина y станет равной R.

В момент возобновления контакта скорость $y^{\cdot}$ неположительна; если она отрицательна, то происходит удар диска об опору, т. е. мгновенное изменение величин $y^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$, так как при их непрерывном изменении нарушилось бы неравенство $y\geqslant R$. Если же выполнены условия $y=R$, $y^{\cdot}=0$, то диск приземляется без удара.

3. Периодические движения с безударными прыжками. Такие движения характеризуются чередованием фаз прыжка и непрерывного контакта. Согласно неравенству (2.3), начало прыжка происходит при таком значении φ_0, при котором

$$r\varphi_0^{\cdot 2}\sin\varphi_0=g \tag{3.1}$$

при этом, очевидно, $\sin\varphi_0>0$, $\varphi_0^{\cdot}\neq 0$. Для определенности будем считать, что $\varphi_0^{\cdot}>0$. Из уравнений (2.4) с учетом условия (3.1) следует такое соотношение, выполняющееся в фазе прыжка

$$d^2y/d\varphi^2=r(\sin\varphi-\sin\varphi_0) \tag{3.2}$$

В начале прыжка, т. е. при $\varphi=\varphi_0$, выполнены равенства $y=R$, $dy/d\varphi=0$, а из (3.2) следует, что при этом $d^2y/d\varphi^2=0$. Поэтому величина y будет больше R при $\varphi>\varphi_0$, если при $\varphi=\varphi_0$ третья производная $d^3y/d\varphi^3$ положительна. Значит, переход к фазе прыжка происходит при выполнении условия (3.1), если $\varphi_0^{\cdot}>0$, а угол φ_0 лежит в первой четверти; будем считать, что $\varphi_0\in(0, \pi/2)$.

Явную зависимость $y(\varphi)$ в фазе прыжка получим посредством двукратного интегрирования уравнения (3.2):

$$dy/d\varphi=r(\cos\varphi_0-\cos\varphi)+r(\varphi_0-\varphi)\sin\varphi_0 \tag{3.3}$$

$$y=R+r(\sin\varphi_0-\sin\varphi)+r(\varphi-\varphi_0)\cos\varphi_0-{}^1/_2 r(\varphi-\varphi_0)^2\sin\varphi_0$$

Пусть окончание прыжка соответствует значению $\varphi=\varphi_1$, причем выполнены условия $y=R$, $y^{\cdot}=0$ безударного возобновления контакта. Отсюда с учетом соотношений (3.3) получим

$$\varphi_1-\varphi_0=(\cos\varphi_0-\cos\varphi_1)/\sin\varphi_0,\quad \sin\varphi_1-\sin\varphi_0={}^1/_2(\cos^2\varphi_0-\cos^2\varphi_1)/\sin\varphi_0 \tag{3.4}$$

Преобразуя второе из уравнений (3.4), приходим к равенству $(\sin\varphi_0-\sin\varphi_1)^2=0$, а в силу первого из этих уравнений $\cos\varphi_0\neq\cos\varphi_1$. Следовательно, угол φ_1 удовлетворяет уравнениям

$$\sin\varphi_1=\sin\varphi_0,\quad \cos\varphi_1=-\cos\varphi_0 \tag{3.5}$$

так что он лежит во второй четверти.

Поскольку $\varphi_0^{\cdot}>0$, то $\varphi_1>\varphi_0$, и угол φ_1 определяется по формуле

$$\varphi_1=\pi-\varphi_0+2\pi n,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{3.6}$$

Подставляя выражение (3.6) в первое из равенств (3.4), получим следующее уравнение для определения значения φ_0:

$$\varphi_0+\operatorname{ctg}\varphi_0=\pi/2+\pi n \tag{3.7}$$

Левая часть уравнения (3.7) представляет собой функцию, непрерывную в интервале $(0,\ \pi/2)$, причем ее производная равна $1-\sin^{-2}\varphi_0$ и отрицательна в этом интервале; при $\varphi\to+0$ эта функция бесконечно велика, а при $\varphi=\pi/2$ она равна $\pi/2$. Следовательно, уравнение (3.7) для каждого $n=1,\ 2,\ \ldots$ имеет единственный корень $\varphi_0^{(n)}\in(0,\ \pi/2)$. Для $n=0$ получаем $\varphi_0=\pi/2$ и $\varphi_1=\pi/2$, т. е. фаза прыжка фактически отсутствует.

Собирая полученные результаты, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Существует счетное множество периодических движений неоднородного круглого диска на гладкой опоре, включающих в себя безударные прыжки. Эти движения описываются формулами

$$y=\begin{cases} R, & \varphi\in(0,\varphi_0^{(n)})\cup(\varphi_1^{(n)},2\pi(n+1)) \\ R+r(\sin\varphi_0^{(n)}-\sin\varphi)+r(\varphi-\varphi_0^{(n)})\cos\varphi_0^{(n)}-{}^1/_2r(\varphi-\varphi_0^{(n)})^2\sin\varphi_0^{(n)}, & \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\varphi\in[\varphi_0^{(n)},\varphi_1^{(n)}]$$

$$y(\varphi+2\pi(n+1))\equiv y(\varphi)$$

где $\varphi_0^{(n)}$ — корень уравнения (3.7), $\varphi_1^{(n)}=\pi+2\pi n-\varphi_0^{(n)}$, $n=1,\ 2,\ \ldots$

Отметим ряд свойств движений (3.8). Во-первых, всякое периодическое движение с безударными прыжками описывается одной из формул (3.8) при подходящем выборе начала отсчета угла φ. Справедливость данного утверждения была доказана выше для случая $\varphi_0^{\cdot}>0$; если $\varphi_0^{\cdot}<0$, то в силу (3.5) условие сохранения контакта (2.3) выполняется на том же множестве, что и в случае $\varphi_0^{\cdot}>0$. Начало прыжка происходит в точке $\varphi=\varphi_1$, а уравнение фазы полета будет иметь тот же вид (3.2), так как $\sin\varphi_1=\sin\varphi_0$. Окончание прыжка вследствие равенств (3.5) происходит при значении $\varphi=\varphi_0$ и не сопровождается ударом; далее происходит периодическая смена фаз.

Во-вторых, полная механическая энергия диска на каждом из решений (3.8) сохраняет постоянное значение

$$\begin{aligned} h_n&={}^1/_2m(x_G^{\cdot 2}+y_G^{\cdot 2})+{}^1/_2J\varphi^{\cdot 2}+mgy_G= \\ &={}^1/_2(J+mr^2\cos^2\varphi_0)\varphi^{\cdot 2}+mgr\sin\varphi_0+{}^1/_2mx_G^{\cdot 2}+mgR= \\ &=g(mr^2+J)/(2r\sin\varphi_0^{(n)})+{}^1/_2mgr\sin\varphi_0^{(n)}+{}^1/_2mx_G^{\cdot 2}+mgR \end{aligned} \tag{3.9}$$

Как следует из формулы (3.7), последовательность $\{\varphi_0^{(n)}\}$ при $n\to\infty$ монотонно стремится к нулю, причем $\varphi_0^{(n)}=O(1/n)$; так как первое слагаемое в правой части формулы (3.9) больше второго, то последовательность $\{h_n\}$ монотонно возрастает, причем $h_n=O(n)$.

В-третьих, период τ_n решения (3.8) определяется по формуле

$$\tau_n=\int\limits_0^{2\pi(n+1)}\frac{d\varphi}{\varphi^{\cdot}}$$

Поскольку в полете $\varphi^{\cdot}=\varphi_0^{\cdot(n)}$, а в опорной фазе величину $\varphi^{\cdot}$ можно выразить через φ с помощью интеграла энергии (3.9), получим

$$\tau_n=\int\limits_{\varphi_0^{(n)}}^{\varphi_1^{(n)}}\frac{d\varphi}{\varphi_0^{\cdot(n)}}+\int\limits_{\varphi_1^{(n)}}^{\varphi_0^{(n)}+2\pi(n+1)}\left[\frac{J+mr^2\cos^2\varphi}{2\left(h_n-{}^1/_2 m\dot{x}_G^{2}-mgR-mgr\sin\varphi\right)}\right]^{1/2}d\varphi \quad (3.10)$$

Вследствие формулы (3.1) величина $\varphi_0^{\cdot(n)}$ имеет порядок $n^{1/2}$, а в силу (3.6) $\varphi_1^{(n)}-\varphi_0^{(n)}=O(n)$, поэтому первое слагаемое в формуле (3.10) возрастает как $n^{1/2}$. Во втором интеграле промежуток интегрирования не превосходит π, в то время как подынтегральная функция, как показано выше, имеет порядок $n^{-1/2}$. Окончательно приходим к оценке $\tau_n=O(n^{1/2})$.

4. Анализ возмущенного движения. Как следует из результатов предыдущего параграфа, движения диска с безударными прыжками представляют собой особый случай, реализующийся на дискретном множестве значений механической энергии. Поэтому сколь угодно малые возмущения движений (3.8) изменяют их тип: перелеты диска оканчиваются его ударами об опору, в начальный момент удара выполнены условия $y^-=R$, $y^{\cdot-}<0$. Для учета ударных взаимодействий преобразуем энергию диска (3.9) следующим образом

$$h={}^1/_2 m x_G^{\cdot2}+{}^1/_2(J+mr^2\cos^2\varphi)^{-1}p_\varphi^2+$$
$$+{}^1/_2 mJ(J+mr^2\cos^2\varphi)^{-1}y^{\cdot2},\quad p_\varphi=\partial h/\partial\varphi^{\cdot} \quad (4.1)$$

Величина $x_G^{\cdot}$ постоянна во все время движения, а p_φ остается непрерывной при ударе без трения [3], изменение скорости будем описывать при помощи ньютоновского коэффициента восстановления $\varkappa$: $y^{\cdot+}=-\varkappa y^{\cdot-}$, где знаки минус и плюс обозначают до- и послеударные значения.

Пусть $\varkappa=0$, т. е. удар абсолютно неупругий. В этом случае возмущенное движение так же как и невозмущенное состоит из чередующихся фаз полета и непрерывного контакта, но имеет от последнего существенное отличие: при каждом ударе энергия диска уменьшается на величину третьего слагаемого в формуле (4.1).

Изучим влияние возмущений начальных условий на характер зависимости $y(\varphi)$ для движений диска, близких к периодическим движениям (3.8). За начальный примем момент времени, когда в исследуемом периодическом движении $\varphi=-\pi/2$. Возмущенное движение характеризуется значениями

$$\Delta\varphi=\varphi(t_0)+\pi/2,\ \Delta\varphi^{\cdot}=\varphi^{\cdot}(t_0)-[(2h_n-mx_G^{\cdot2}-$$
$$-mg(R-r))/J]^{1/2},\ \Delta y=y(t_0)-R,\ \Delta y^{\cdot}=y^{\cdot}(t_0)$$

Так как величина $x_G^{\cdot}$ не влияет на изменение переменных φ, y, в данном анализе она не играет роли.

Если $\Delta y=0$, $\Delta y^{\cdot}\leqslant 0$, то возмущенное движение начнется с фазы непрерывного контакта, в противном случае этой фазе будет предшествовать небольшой прыжок диска. Пусть при $\varphi=0$ энергия диска равна $h_n+\Delta h_0$. При близком к φ_0 значении $\varphi=\varphi_0'$ происходит отрыв от опоры, а при близком к φ_1 значении $\varphi=\varphi_1'$ — возобновление контакта, что вообще говоря сопровождается ударом, так что следующая фаза непрерывного контакта происходит при значении энергии $h_n+\Delta h_1$, где $\Delta h_1\leqslant\Delta h_0$ и так далее.

Значение φ_1' можно определить, приравнивая величину $y(\varphi)$ в формуле (3.3) значению R; зависимость φ_1' от φ_0' задается неявной функцией вида

$$F(\varphi_0',\varphi_1')=(\varphi_1'-\varphi_0')\cos\varphi_0'+\sin\varphi_0'-\sin\varphi_1'-{}^1/_2(\varphi_1'-\varphi_0')^2\sin\varphi_0' \quad (4.2)$$

Вычислим частные производные функции $F(\varphi_0',\varphi_1')$ при $\varphi_0'=\varphi_0$ (при этом $\varphi_1'=\varphi_1$):

$$\partial F/\partial\varphi_0'=-{}^1/_2(\varphi_1-\varphi_0)^2\cos\varphi_0\neq 0$$
$$\partial F/\partial\varphi_1'=\cos\varphi_0-\cos\varphi_1-(\varphi-\varphi_0)\sin\varphi_0=0$$
$$\partial^2F/\partial\varphi_1'^2=\sin\varphi_1-\sin\varphi_0=0,\quad \partial^3F/\partial\varphi_1'^3=-\cos\varphi_0\neq 0$$

Следовательно, решение уравнения (4.2) можно представить в виде $\varphi_1'=\varphi_1+O((\varphi_0'-\varphi_0)^{1/3})$. Вследствие первой из формул (3.3) получим для скорости сближения при соударении следующую оценку:

$$y^{\cdot}(\varphi_1')=r\varphi_0^{\cdot\cdot}\partial F/\partial\varphi_1'=O((\varphi_1'-\varphi_1)^2)=O((\varphi_0'-\varphi_0)^{2/3})\qquad(4.3)$$

Таким образом, исходя из формул (4.1), (4.3), получим такую формулу для диссипации энергии при ударе

$$\Delta h_0-\Delta h_1=O(y^{\cdot 2}(\varphi_1))=O((\varphi_0'-\varphi_0)^{4/3})$$

Поскольку в силу формулы (3.9):

$\Delta h_0={}^1/_2r^{-1}(mr^2+J)(\sin^{-1}\varphi_0'-\sin^{-1}\varphi_0)+{}^1/_2mgr(\sin\varphi_0'-\sin\varphi_0)=O(\varphi_0-\varphi_0')$ окончательно получим такую связь между Δh_1 и Δh_0:

$$\Delta h_1=\Delta h_0-O((\Delta h_0)^{4/3})\qquad(4.4)$$

В зависимости от знака величины Δh_0 получим такие возможные виды возмущенного движения. Если $\Delta h_0=0$, то возмущенное движение совпадает при $t>t_0$ с периодическим движением (3.8).

Если $\Delta h_0<0$, то последовательность абсолютных величин $|\Delta h_0|$, $|\Delta h_1|$, ... монотонно возрастает. При этом возрастает и разность между соседними членами этой последовательности, по крайней мере до тех пор, пока выполняется оценка (4.4). Вместе с величиной $|\Delta h|$ возрастает и разность $|\varphi_0-\varphi_0'|$, где φ_0' – значение угла, соответствующее началу прыжка в возмущенном движении. Вследствие формулы (3.3) при этом растет и разность $|y'(\varphi)-y(\varphi)|$.

Для достаточно малых положительных значений Δh_0 величина Δh_1 в силу (4.4) удовлетворяет неравенству $0<\Delta h_1<\Delta h_0$. В этом случае последовательность $\{\Delta h_n\}$ монотонно стремится к нулю. При этом также стремится к нулю разность $|\varphi_0-\varphi_0'|$ и, с учетом (3.3), величины $|y'(\varphi)-y(\varphi)|$ и $|y^{\cdot\prime}(\varphi)-y^{\cdot}(\varphi)|$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Периодические движения (3.8) неоднородного диска на абсолютно гладкой опоре при абсолютно неупругом характере соударений не обладают свойством орбитальной устойчивости. Тем не менее, для возмущений, удовлетворяющих неравенству $\Delta h_0>0$, имеет место орбитальная асимптотическая устойчивость (данная ситуация аналогична случаю полуустойчивого предельного цикла).

5. Финальные движения диска. Определим характер движения диска при $t\to+\infty$. Пусть в начальный момент времени $t=t_0$ изменяющаяся часть механической энергии диска

$$H={}^1/_2my_G^{\cdot 2}+{}^1/_2J\varphi^{\cdot 2}+mg(y-R+r+r\sin\varphi)\qquad(5.1)$$

равна H_0, при этом $y_0=R$, $y_0^{\cdot}=0$. Возможны два случая:

1) При изменении угла φ от 0 до 2π (т. е. при полном обороте диска) выполнено условие (2.3); в этом случае диск совершает периодическое движение при непрерывном контакте, или находится в устойчивом ($\varphi={}^3/_2\pi$) или неустойчивом ($\varphi=\pi/2$) равновесии, или совершает асимптотическое движение к неустойчивому положению равновесия.

2) Если неравенство (2.3) нарушается при $\varphi=\varphi_0$, то движение при $\varphi>\varphi_0$ сопровождается прыжками диска над опорой.

Выясним, при каких значениях H_0 реализуется тот или иной из этих случаев.

Поскольку при $y=R$ выполняется равенство $y_G^{\bullet}=r\varphi^{\bullet}\cos\varphi$, а диссипация энергии отсутствует, то угловую скорость диска можно определить из интеграла энергии (5.1):

$$\varphi^{\bullet}=(2H_0-2mgr-2mgr\sin\varphi)^{1/2}(J+mr^2\cos^2\varphi)^{-1/2} \tag{5.2}$$

Подставляя значение (5.2) в формулу (2.3), получим после преобразований

$$2rH_0\sin\varphi\leqslant gJ+mr^2g(1+\sin\varphi)^2 \tag{5.3}$$

Неравенство (5.3) всегда выполнено на интервале $\varphi\in(\pi, 2\pi)$, так как в (5.1) $H_0\geqslant 0$; на интервале $\varphi\in[0, \pi]$ это неравенство принимает вид

$$2rH_0/g\leqslant(J+mr^2)/\sin\varphi+mr^2\sin\varphi+2mr^2 \tag{5.4}$$

Правая часть в формуле (5.4) монотонно убывает с ростом $\sin\varphi$, достигая своего наименьшего значения при $\varphi=\pi/2$; следовательно, случай 1) безотрывного контакта реализуется при условии

$$H_0\leqslant {}^1/_2 gJ/r+2mgr \tag{5.5}$$

При выполнении неравенства (5.5) определение движения диска сводится к решению уравнения (5.2).

Заметим, что при фиксированных значениях m, J энергия, необходимая для отрыва диска от опоры, достигает минимума при $r={}^1/_4 J/m$, т. е. «наибольшей прыгучестью» обладает такой диск, у которого расстояние между геометрическим центром и центром масс равно половине радиуса инерции.

При противоположном знаке неравенства (5.5) движение диска при $t>t_0$ сопровождается прыжками. Если величина H_0 равна энергии диска в одном из периодических безударных движений (3.8), т. е.

$$H_0=h_n={}^1/_2 gr^{-1}(mr^2+J)\sin^{-1}\varphi_0^{(n)}+{}^1/_2 mgr\sin\varphi_0^{(n)}+mgr$$

где угол $\varphi_0^{(n)}$ определяется из уравнения (3.7), то при $t>t_0$ движение описывается формулой (3.8), при этом энергия системы сохраняется. При $n=0$ получаем $\varphi_0^{(0)}=\pi/2$, поэтому значение h_0 совпадает с правой частью формулы (5.5).

В случае, когда величина H_0 не равна ни одному из чисел h_n, движение диска при $t>t_0$ по теореме 1 сопровождается ударами об опору и диссипацией энергии. Значение H_1 энергии после первого удара можно вычислить, определяя угол φ_1 и величину $dy/d\varphi|_{\varphi=\varphi_1}$ из формул (3.3) при условии $y=R$, а затем используя равенство $y^{\bullet+}=-\varkappa y^{\bullet-}$. Если оказывается, что $H_1\leqslant h_0$, то после первого удара диск движется без отрыва от опоры, в противном случае он через некоторое время совершает второй прыжок и т. д.

Может оказаться, что энергия диска после некоторого удара окажется близкой и несколько большей величины h_n при каком-то номере n. Тогда по теореме 2 в последующем движении траектория $y(\varphi)$ асимптотически стремится к периодической траектории (3.8).

Возможен и еще один случай бесконечного числа ударов: если после некоторого удара энергия диска окажется равной $h_0+\Delta h$, $\Delta h>0$. В этом случае можно повторить ход рассуждений п. 4, полагая $\varphi_0=\varphi_1=\pi/2$. Частные производные функции (4.2) будут иметь при $\varphi_0'=\varphi_0$, $\varphi_1'=\varphi_1$ вид

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi_0'}=\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi_0'^2}=\frac{\partial^3 F}{\partial\varphi_0'^3}=0,\quad \frac{\partial^4 F}{\partial\varphi_0'^4}\neq 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi_1'}=\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi_1'^2}=\frac{\partial^3 F}{\partial\varphi_1'^3}=0,\quad \frac{\partial^4 F}{\partial\varphi_1'^4}\neq 0$$

откуда $\varphi_1'-\varphi_1=O(\varphi_0'-\varphi_0)$, $y^{\cdot}(\varphi_1^{\cdot})=O((\varphi_0'-\varphi_0)^3)$. Поэтому диссипация энергии при возобновлении контакта равна $\Delta h_0-\Delta h_1=O((\varphi_0'-\varphi_0)^6)$, в то время как в силу равенства (3.9) $\Delta h_0=O(\sin\varphi_0'-\sin\varphi_0)=O((\varphi_0'-\varphi_0)^2)$. Объединим полученные результаты в виде следующего утверждения.

Теорема 3. При $t\to+\infty$ движение диска принадлежит к одному из перечисленных ниже типов:

1) начиная с некоторого момента времени t_0 диск непрерывно соприкасается с опорой, при этом его энергия неизменна и не превышает величины h_0.

2) Начиная с некоторого момента времени, диск совершает одно из движений с периодическими безударными прыжками (3.8), при этом его энергия неизменна и равна h_n.

3) Диск совершает бесконечноударное движение, сопровождающееся диссипацией энергии. Предельной траекторией является одно из движений (3.8) (при этом энергия диска стремится к величине h_n), или к траектории $y\equiv R$, соответствующей значению энергии h_0.

Доказательство. Существование данных трех типов движений показано выше. Покажем, что они исчерпывают все возможности. Действительно, если диск испытывает при $t>t_0$ лишь конечное число соударений, то по теореме 1 движение относится к типам 1) или 2). В случае бесконечноударного движения последовательность $\{H_n\}$ значений энергии диска после каждого удара является монотонно убывающей, следовательно, существует $\lim\limits_{\to\infty} H_n=h^*$.

Если $h^*=h_n$ при некотором n, $n=0, 1, 2, \ldots$, то мы получаем движение третьего типа. Если же $h^*\neq h_n$ и $h^*>h_0$, то для соответствующих значению h^* углов начала и конца прыжка φ_0^* и φ_1^* вследствие теоремы 1 будем иметь $y^{\cdot}(\varphi_1^*)\neq 0$. Поэтому диссипация энергии при каждом соударении не стремится к нулю, что противоречит сходимости последовательности $\{H_n\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Routh E. J.* Dynamics of a system of rigid bodies. Pt. 2. L.: Mc Millan, 1884. 343 p.
2. *Schiehlen W., Gao J.* Simulation des Stossfreien Hupfens. // ZAMM. 1989. Bd. 69. No. 5. S. 302–303.
3. *Appell P.* Traite de mecanique rationelle. T. 2. Paris: Gauthier – Villars, 1953. 575 p.

Москва

Поступила в редакцию 25.VI.1990