МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1992

УДК 534.011

© 1992 г. Е. Л. ГОЛУБ, М. И. ПАВЛИНОВ

ДИНАМИКА НЕСИММЕТРИЧНОГО ЖЕСТКОГО РОТОРА В ОПОРАХ С ВРАЩАЮЩИМИСЯ УПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Получены уравнения малых колебаний несимметричного жесткого ротора в опорах с несимметричными вращающимися упругими элементами. Показано, что в ряде случаев неустойчивость колебаний ротора, связанная с его несимметрией, может быть устранена за счет несимметрий опор или при наличии достаточного демпфирования в опорах. Проведен анализ вынужденных колебаний.

1. Уравнения движения. Пусть вертикальный ротор массой m, абсолютно жесткий по изгибу, кручению и растяжению — сжатию вращается с постоянной угловой скоростью ω. Ротор поддерживается двумя опорами, расположенными на расстоянии l друг от друга. Верхняя опора удалена на расстояние l_1 от центра масс ротора, нижняя опора — на расстояние l_2 от центра масс.

Вводится система координат $O\eta\zeta\xi$, перемещающаяся вместе с ротором. Начало координат O фиксируется на центральной линии опор, вдоль которой направлена и ось вращения ξ. В системе координат, жестко связанной с ротором и с началом в точке C, вследствие неуравновешенности, координаты центра масс ротора $(e_\eta, e_\zeta, 0)$, а углы поворота главных центральных осей инерции ротора $\eta_0\zeta_0\xi_0(\gamma_\eta, \gamma_\zeta, 0)$. Моменты инерции ротора $J_{\eta0}$, $J_{\zeta0}$, $J_{\xi0}$ относительно главных центральных осей инерции в общем случае отличаются друг от друга.

Опоры включают в себя несимметричные упругие элементы, вращающиеся синхронно с ротором. Поэтому коэффициенты радиальной жесткости опор $c_{\eta1}$, $c_{\zeta1}$ и $c_{\eta2}$, $c_{\zeta2}$ (здесь и далее индекс 1 относится к верхней опоре, а индекс 2 — к нижней), а также коэффициенты угловой жесткости $M_{\eta1}$, $M_{\zeta1}$ и $M_{\eta2}$, $M_{\zeta2}$ относительно осей η и ζ соответственно не равны. Далее, опора характеризуется коэффициентами радиального демпфирования b_1, b_2, тангенциального демпфирования b_{01}, b_{02}, углового демпфирования L_1, L_2 и вихревого демпфирования L_{01}, L_{02}. Наконец, со стороны нижней опоры на ротор действует аксиальная сила F_a, направленная вверх.

Пусть ротор совершает малые колебания. Мерой его поперечных колебаний являются перемещения точки C u_η и u_ζ, а угловых колебаний — углы поворота φ_η, φ_ζ. Используя стандартную процедуру, изложенную, например, в [1], можно получить уравнения движения ротора в рассматриваемом случае

$$J_{\eta0}\ddot{\varphi}_\eta+L\dot{\varphi}_\eta+L_0\varphi_\zeta-B\dot{u}_\zeta+M_{\eta0}\varphi_\eta-M_0\varphi_\zeta-F_0u_\eta-F_\zeta u_\zeta=$$
$$=(J_{\zeta0}-J_{\xi0})\omega^2\gamma_\eta-mge_\zeta \quad (1.1)$$

$$J_{\zeta0}\ddot{\varphi}_\zeta-L_0\dot{\varphi}_\eta+L\dot{\varphi}_\zeta+B\dot{u}_\eta+M_0\varphi_\eta+M_{\zeta0}\varphi_\zeta+F_\eta u_\eta-F_0u_\zeta= \quad (1.2)$$
$$=(J_{\eta0}-J_{\xi0})\omega^2\gamma_\zeta+mge_\eta$$

$$m\ddot{u}_\eta+b\dot{u}_\eta-b_0\dot{u}_\zeta+B\dot{\varphi}_\zeta+c_{\eta0}u_\eta-c_0u_\zeta+F_0\varphi_\eta+F_\eta\varphi_\zeta=m\omega^2e_\eta \quad (1.3)$$

$$m\ddot{u}_\zeta+b_0\dot{u}_\eta+b\dot{u}_\zeta-B\dot{\varphi}_\eta+c_0u_\eta+c_{\zeta0}u_\zeta-F_\zeta\varphi_\eta+F_0\varphi_\zeta=m\omega^2e_\zeta \quad (1.4)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) выражают теорему о моменте количества движения, а уравнения (1.3) и (1.4) — теорему о количестве движения. Здесь

$$L=L_1+L_2+b_1l_1^2+b_2l_2^2 \tag{1.5}$$

$$L_0=(J_{\xi0}-J_{\zeta0}-J_{\eta0})\omega, \quad B=b_1l_1-b_2l_2$$

$$M_{\eta0}=M_{\eta1}+M_{\eta2}+c_{\zeta1}l_1^2+c_{\zeta2}l_2^2+m_0gl_1-F_\alpha l-(J_{\zeta0}-J_{\xi0})\omega^2$$

$$M_{\zeta0}=M_{\zeta1}+M_{\zeta2}+c_{\eta1}l_1^2+c_{\eta2}l_2^2+mgl_1-F_a l-(J_{\eta0}-J_{\xi0})\omega^2$$

$$M_0=[L_1-L_{01}+L_2-L_{02}+(b_1-b_{01})l_1^2+(b_2-b_{02})l_2^2]\omega$$

$$F_\eta=c_{\eta1}l_1-c_{\eta2}l_2, \quad F_\zeta=c_{\zeta1}l_1-c_{\zeta2}l_2$$

$$F_0=[(b_1-b_{01})l_1-(b_2-b_{02})l_2]\omega$$

$$b=b_1+b_2, \quad b_0=2m\omega$$

$$c_{\eta0}=c_{\eta1}+c_{\eta2}-m\omega^2, \quad c_{\zeta0}=c_{\zeta1}+c_{\zeta2}-m\omega^2$$

$$c_0=(b_1-b_{01}+b_2-b_{02})\omega$$

Из (1.1)—(1.5) следует, что при выполнении условий

$$b_1l_1=b_2l_2, \quad b_{01}l_1=b_{02}l_2, \quad c_{\eta1}l_1=c_{\eta2}l_2, \quad c_{\zeta1}l_1=c_{\zeta2}l_2 \tag{1.6}$$

угловые и поперечные колебания независимы друг от друга.

2. Характеристическое уравнение. Рассмотрим свободные колебания ротора. Характеристическое уравнение, отвечающее системе дифференциальных уравнений (1.1)—(1.4) в случае идеально отбалансированного ротора имеет вид

$$a_0\lambda^8+a_1\lambda^7+a_2\lambda^6+a_3\lambda^5+a_4\lambda^4+a_5\lambda^3+a_6\lambda^2+a_7\lambda+a_8=0 \tag{2.1}$$

$$a_0=m^2J_{\eta0}J_{\zeta0}, \quad a_1=m^2L(J_{\eta0}+J_{\zeta0})+2mbJ_{\eta0}J_{\zeta0},$$

$$\begin{aligned}a_2={}&m^2(M_{\zeta0}J_{\eta0}+M_{\eta0}J_{\zeta0}+L^2+L_0^2)+J_{\eta0}J_{\zeta0}[m(c_{\eta0}+c_{\zeta0})+b^2+b_0^2]+\\&+m(2bL-B^2)(J_{\eta0}+J_{\zeta0}), \quad a_3=m^2[L(M_{\eta0}+M_{\zeta0})-2L_0M_0]+\\&+m[L(c_{\eta0}+c_{\zeta0})(J_{\eta0}+J_{\zeta0})+2b(M_{\zeta0}J_{\eta0}+M_{\eta0}J_{\zeta0}+L^2+L_0^2)-2B(BL+J_{\eta0}F_\eta+\\&+J_{\zeta0}F_\zeta)]+(J_{\eta0}+J_{\zeta0})[L(b^2+b_0^2)-bB^2]+J_{\eta0}J_{\zeta0}[b(c_{\eta0}+c_{\zeta0})+2b_0c_0],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_4={}&m^2(M_{\eta0}M_{\zeta0}+M_0^2)+m\{2b[L(M_{\eta0}+M_{\zeta0})-2L_0M_0]-\\&-2B[L(F_\eta+F_\zeta)-2L_0F_0]-B^2(M_{\eta0}+M_{\zeta0})-J_{\eta0}(F_\eta^2-F_0^2)-J_{\zeta0}(F_\zeta^2-F_0^2)\}+\\&+L(J_{\eta0}+J_{\zeta0})[b(c_{\eta0}+c_{\zeta0})+2b_0c_0]+J_{\eta0}J_{\zeta0}(c_{\eta0}c_{\zeta0}+c_0^2)+[m(c_{\eta0}+c_{\zeta0})+\\&+b^2+b_0^2](M_{\zeta0}J_{\eta0}+M_{\eta0}J_{\zeta0}+L^2+L_0^2)+B^4-B^2(c_{\zeta0}J_{\eta0}+c_{\eta0}J_{\zeta0}+2bL+2b_0L_0)-\\&-2B[J_{\eta0}(bF_\eta+b_0F_0)+J_{\zeta0}(bF_\zeta+b_0F_0)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_5={}&m[2b(M_{\eta0}M_{\zeta0}+M_0^2)-2B(M_{\eta0}F_\eta+M_{\zeta0}F_\zeta+2M_0F_0)-L(F_\eta^2+F_\zeta^2-2F_0^2)+\\&+2L_0F_0(F_\eta+F_\zeta)]-J_{\eta0}[b(F_\eta^2-F_0^2)+2b_0F_0F_\eta]-J_{\zeta0}[b(F_\zeta^2-F_0^2)+\\&+2b_0F_0F_\eta]+L(J_{\eta0}+J_{\zeta0})(c_{\eta0}c_{\zeta0}+c_0^2)+[b(c_{\eta0}+c_{\zeta0})+2b_0c_0](M_{\zeta0}J_{\eta0}+\\&+M_{\eta0}J_{\zeta0}+L^2+L_0^2)+[L(M_{\eta0}+M_{\zeta0})-2L_0M_0][m(c_{\eta0}+c_{\zeta0})+b^2+b_0^2]+\\&+2B^3(F_\eta+F_\zeta)-B^2[L(c_{\eta0}+c_{\zeta0})+2L_0c_0+b(M_{\eta0}+M_{\zeta0})-2b_0M_0]-\\&-2B[J_{\eta0}(c_{\zeta0}F_\eta+c_0F_0)+J_{\zeta0}(c_{\eta0}F_\zeta+c_0F_0)+(bL+b_0L_0)(F_\eta+F_\zeta)+2(b_0L-bL_0)F_0]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_6={}&(c_{\eta0}c_{\zeta0}+c_0^2)(M_{\zeta0}J_{\eta0}+M_{\eta0}J_{\zeta0}+L^2+L_0^2)+(M_{\eta0}M_{\zeta0}+M_0^2)\times\\&\times[m(c_{\eta0}+c_{\zeta0})+b^2+b_0^2]+[b(c_{\eta0}+c_{\zeta0})+2b_0c_0][L(M_{\eta0}+M_{\zeta0})-\\&-2L_0M_0]-m[M_{\eta0}(F_\eta^2-F_0^2)+M_{\zeta0}(F_\zeta^2-F_0^2)+2M_0F_0(F_\eta+F_\zeta)]-\\&-J_{\eta0}(c_{\zeta0}F_\eta^2-c_{\eta0}F_0^2+2c_0F_\eta F_0)-J_{\zeta0}(c_{\eta0}F_\zeta^2-c_{\zeta0}F_0^2+2c_0F_\zeta F_0)+\\&+B^2[(F_\eta+F_\zeta)^2+2(F_0^2+F_\eta F_\zeta)-M_{\eta0}c_{\zeta0}-M_{\zeta0}c_{\eta0}+2M_0c_0]-\end{aligned}$$

$$
\begin{gathered}
-2B\{L(c_{\eta 0}F_\zeta+c_{\zeta 0}F_\eta+2c_0F_0)-L_0[(c_{\eta 0}+c_{\zeta 0})F_0-c_0(F_\eta+F_\zeta)]+\\
+b(M_{\eta 0}F_\eta+M_{\zeta 0}F_\zeta+2M_0F_0)+b_0[(M_{\eta 0}+M_{\zeta 0})F_0-M_0(F_\eta+F_\zeta)]\}-\\
-bL(F_\eta^2+F_\zeta^2-2F_0^2)-2(b_0L-bL_0)(F_\eta+F_\zeta)F_0-2b_0L_0(F_\eta F_\zeta-F_0^2)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
a_7=(c_{\eta 0}c_{\zeta 0}+c_0^2)[L(M_{\eta 0}+M_{\zeta 0})-2L_0M_0]+(M_{\eta 0}M_{\zeta 0}+M_0^2)\times\\
\times[b(c_{\eta 0}+c_{\zeta 0})+2b_0c_0]-2B\{c_{\eta 0}(M_{\zeta 0}F_\zeta+M_0F_0)+c_{\zeta 0}(M_{\eta 0}F_\eta+M_0F_0)+\\
+c_0[(M_{\eta 0}+M_{\zeta 0})F_0-M_0(F_\eta+F_\zeta)]+(F_\eta+F_\zeta)(F_\eta F_\zeta+F_0^2)\}-\\
-L[c_{\eta 0}(F_\zeta^2-F_0^2)+c_{\zeta 0}(F_\eta^2-F_0^2)+2c_0F_0(F_\eta+F_\zeta)]+\\
+2L_0[(c_{\eta 0}F_\zeta+c_{\zeta 0}F_\eta)F_0-c_0(F_\eta F_\zeta-F_0^2)]-b[M_{\eta 0}(F_\eta^2-F_0^2)+\\
+M_{\zeta 0}(F_\zeta^2-F_0^2)+2M_0F_0(F_\eta+F_\zeta)]-2b_0[(M_{\eta 0}F_\eta+M_{\zeta 0}F_\zeta)F_0-M_0(F_\eta F_\zeta-F_0^2)]\\
a_8=(c_{\eta 0}c_{\zeta 0}+c_0^2)(M_{\eta 0}M_{\zeta 0}+M_0^2)+(F_\eta F_\zeta-F_0^2)^2-c_{\eta 0}(M_{\zeta 0}F_{\zeta 0}^2-M_{\eta 0}F_0^2+\\
+2M_0F_\zeta F_0)-c_{\zeta 0}(M_{\eta 0}F_\eta^2-M_{\zeta 0}F_0^2+2M_0F_\eta F_0)-2c_0[(M_{\eta 0}F_\eta+M_{\zeta 0}F_\zeta)F_0-\\
-M_0(F_\eta F_\zeta-F_0^2)]
\end{gathered}
$$

В [2] исследовалась динамика ротора, расположенного посередине между двумя идентичными опорами с пренебрежимо малыми угловыми характеристиками. При этом условия (1.6) выполняются, что дало возможность рассмотреть поперечные и угловые колебания ротора по отдельности. Было установлено, что неустойчивость движения вызывается неравенством экваториальных моментов инерции ротора, несимметрией радиальной жесткости опор и тангенциальным демпфированием. Аналогичным образом можно показать, что в рассматриваемом случае причинами неустойчивости могут быть также несимметрия угловой жесткости и вихревое демпфирование. Уравнение (2.1) позволяет найти соответствующие области неустойчивости и тогда, когда поперечные и угловые колебания ротора связаны. Для этой цели можно использовать стандартные программы нахождения корней полиномов или определения знаков их действительной части по критерию Рауса — Гурвица.

3. Влияние несимметрии жесткости опор на устойчивость движения. В [3] исследовались угловые колебания несимметричного тяжелого гироскопа с опорой в окрестности центра масс. Была проведена классификация гироскопов и установлены области неустойчивости угловых колебаний для каждого типа. Результаты исследования представлены в чрезвычайно удобном для использования виде таблицы Граммеля.

Далее, в [4] рассматривались угловые колебания одноопорного несимметричного ротора с закрепленной точкой и несимметрией угловой жесткости вращающихся упругих элементов опоры. Было установлено, что устойчивость ротора зависит от взаимной ориентации несимметрии ротора и опоры. Однако, результаты этой работы не были систематизированы и представлены в удобном для использования виде.

Математическая модель динамики ротора, построенная в п. 1, дает возможность обобщить результаты, полученные в [3, 4]. Пусть выполняются условия (1.6), а также отсутствуют все виды демпфирования в опорах. Устойчивость поперечных колебаний для данного случая рассматривалась в [2]. Характеристическое уравнение, отвечающее системе уравнений (1.1)—(1.2), описывающих угловые колебания, в отсутствие моментной неуравновешенности имеет вид

$$
\begin{gathered}
J_{\eta 0}J_{\zeta 0}\lambda^4+\{J_{\eta 0}[M_\zeta-(J_{\eta 0}-J_{\xi 0})\omega^2]+J_{\zeta 0}[M_\eta-(J_{\zeta 0}-J_{\xi 0})\omega^2]+\\
+(J_{\xi 0}-J_{\zeta 0}-J_{\eta 0})^2\omega^2\}\lambda^2+[M_\zeta-(J_{\eta 0}-J_{\xi 0})\omega^2][M_\eta-(J_{\zeta 0}-J_{\xi 0})\omega^2]=0
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
M_\eta=M_{\eta 1}+M_{\eta 2}+c_{\zeta 1}l_1^2+c_{\zeta 2}l_2^2+mgl_1-F_al\\
M_\zeta=M_{\zeta 1}+M_{\zeta 2}+c_{\eta 1}l_1^2+c_{\eta 2}l_2^2+mgl_1-F_al
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

n	ω	n	ω	n	ω
1	$0,\ \infty$	8	$0,\ \omega_1$	15	$0,\ \omega_2;\ \omega_1,\ \infty$
2	$\omega_2,\ \infty$	9	$\omega_2,\ \omega_1$	16	$0,\ \omega_1;\ \omega_2,\ \infty$
3	$\omega_1,\ \infty$	10	$\omega_3,\ \omega_2$	17	$\omega_3,\ \infty$
4	$\omega_3,\ \omega_2;\ \omega_1,\ \infty$	11	$\omega_1,\ \omega_2$	18	$\omega_1,\ \infty$
5	$\omega_1,\ \infty$	12	нет	19	$\omega_3,\ \infty$
6	$\omega_3,\ \omega_1;\ \omega_2,\ \infty$	13	$\omega_3,\ \omega_2$	20	$\omega_2,\ \infty$
7	$\omega_2,\ \infty$	14	нет	21	$\omega_3,\ \infty$

Анализ уравнения (3.1) показывает, что имеются три кратические частоты

$$\omega_1=[M_\eta/(J_{\zeta 0}-J_{\xi 0})]^{1/2},\quad \omega_2=[M_\zeta/(J_{\eta 0}-J_{\xi 0})]^{1/2},$$
$$\omega_3=[(J_{\zeta 0}(J_{\zeta 0}-J_{\xi 0})(2J_{\eta 0}-J_{\xi 0})\omega_1^2+J_{\eta 0}(J_{\eta 0}-J_{\xi 0})(2J_{\zeta 0}-J_{\xi 0})\omega_2^2-$$
$$-2\{J_{\eta 0}J_{\zeta 0}(J_{\eta 0}-J_{\xi 0})(J_{\zeta 0}-J_{\xi 0})[(J_{\zeta 0}-J_{\xi 0})\omega_1^2+J_{\eta 0}\omega_2^2][J_{\zeta 0}\omega_1^2+$$
$$+(J_{\eta 0}-J_{\xi 0})\omega_2^2]\}^{1/2})/J_{\xi 0}^2(J_{\xi 0}-J_{\zeta 0}-J_{\eta 0})]^{1/2} \tag{3.2}$$

Следуя Граммелю, будем именовать роторы, у которых $J_{\eta 0}<J_{\zeta 0}<J_{\xi 0}$ короткоосными, роторы, у которых $J_{\eta 0}<J_{\xi 0}<J_{\zeta 0}$ среднеосными, роторы, у которых $J_{\xi 0}<J_{\eta 0}<J_{\zeta 0}$ длинноосными. По аналогии с Граммелем, если частота ω_3 вещественная, ротор называется толстым, если частота ω_3 комплексная, ротор называется тонким, если выполняется условие $M_\eta>0$, $M_\zeta>0$, ротор называется висящим, если $M_\eta<0$, $M_\zeta<0$ — выпрямленным. Кроме случаев, упомянутых в [3], будем рассматривать еще и такие, когда $M_\eta>0$, $M_\zeta<0$, и тогда ротор будем называть полувисящим, а также, когда $M_\eta<0$, $M_\zeta>0$, и тогда ротор будем называть полувыпрямленным. Наконец, ротор, у которого $\omega_1>\omega_2$, будем называть бегущим, а ротор, у которого $\omega_1<\omega_2$ — замедленным.

С учетом изложенного выше, а также (3.2), результаты исследования характеристического уравнения (3.1) можно представить в форме таблицы. Чтобы сделать таблицу компактной, присвоим каждому типу ротора свои номер n. Короткоосным роторам присваиваются следующие номера: висящему — 1, полувисящему — 2, полувыпрямленному — 3, выпрямленному бегущему толстому — 4, выпрямленному бегущему тонкому — 5, выпрямленному замедленному толстому — 6, выпрямленному замедленному тонкому — 7. Среднеосным роторам назначаются номера: висящему — 8, полувисящему бегущему — 9, полувисящему замедленному толстому — 10, полувисящему замедленному тонкому — 11, полувыпрямленному — 12, выпрямленному толстому — 13, выпрямленному тонкому — 14. Номера длинноосных роторов: висящий бегущий — 15, висящий замедленный — 16, полувисящий толстый — 17, полувисящий тонкий — 18, полувыпрямленный толстый — 19, полувыпрямленный тонкий — 20, выпрямленный — 21. В графе ω указаны области устойчивости по угловой скорости.

Таблица в случае симметрии вращающихся упругих элементов опор переходит в таблицу Граммеля [3]. Она подтверждает сделанные в [4] выводы о влиянии взаимной ориентации несимметрии ротора и упругих элементов опор, а также конкретизирует эти выводы. Легко видеть, что при прочих равных условиях наибольшей областью устойчивости обладает висящий ротор, а из висящих роторов — короткоосный. Длинноосный висящий ротор также возможно стабилизировать при любых угловых скоростях, если подобрать несимметрию вращающихся упругих элементов таким образом, чтобы $\omega_1=\omega_2$.

4. Влияние демпфирования в опорах на устойчивость движения. В [2] была найдена область неустойчивости поперечных колебаний ротора, связанных с несимметрией вращающихся упругих элементов опор.

Была также установлена величина радиального демпфирования, при которой эта область неустойчивости исчезает. Представляет практический интерес решение аналогичной задачи для области неустойчивости угловых колебаний, связанной с неравенством экваториальных моментов инерции.

Пусть выполняются условия (1.6), и все коэффициенты жесткости и демпфирования положительны. Пусть далее имеет место $M_{\eta 1}=M_{\zeta 1}=M_1$, $M_{\eta 2}=M_{\zeta 2}=M_2$, $c_{\eta 1}=c_{\zeta 1}=c_1$, $c_{\eta 2}=c_{\zeta 2}=c_2$, $I_{01}=I_{02}=0$, $b_{01}=b_{02}=0$. Наконец, будет рассматриваться только случай висящего ротора. Тогда характеристическое уравнение, отвечающее системе дифференциальных уравнений (1.1)—(1.2) примет вид

$$J_{\eta 0}J_{\zeta 0}\lambda^4+L(J_{\eta 0}+J_{\zeta 0})\lambda^3+\{J_{\eta 0}[M-(J_{\zeta 0}-J_{\xi 0})\omega^2]+$$
$$+J_{\zeta 0}[M-(J_{\zeta 0}-J_{\xi 0})\omega^2]+(J_{\xi 0}-J_{\zeta 0}-J_{\eta 0})^2\omega^2+L^2\}\lambda^2+L[2M+$$
$$+(J_{\eta 0}+J_{\zeta 0})\omega^2]\lambda+[M-(J_{\eta 0}-J_{\xi 0})\omega^2]\,[M-(J_{\zeta 0}-J_{\xi 0})\omega^2]+L^2\omega^2=0$$

$$M=M_1+M_2+c_1l_1^2+c_2l_2^2+mgl-F_al>0$$

Анализ этого уравнения показывает, что короткоосный ротор устойчив при любых угловых скоростях, среднеосный — в диапазоне от 0 до ω_1, длинноосный — в диапазоне от 0 до ω_1 и от ω_2 до ∞. Здесь $\omega_{1,2}=[(M(J_{\eta 0}+J_{\zeta 0}-2J_{\xi 0})-L^2\mp\{[M(J_{\eta 0}+J_{\zeta 0}-2J_{\xi 0})-L^2]^2-4M^2(J_{\eta 0}-J_{\xi 0})(J_{\zeta 0}-J_{\xi 0})\}^{1/2})/2(J_{\eta 0}-J_{\xi 0})(J_{\zeta 0}-J_{\xi 0})]^{1/2}$.

Условия асимптотической устойчивости угловых колебаний, в случае отсутствия демпфирования переходят в условие устойчивости висящего тяжелого гироскопа, изложенные в [3].

Демпфирование в опорах уменьшает область неустойчивости угловых колебаний ротора. При этом в случае среднеосного ротора граница неустойчивости смещается в область более высоких угловых скоростей. Далее, если выполняется условие $L>[M(J_{\zeta 0}-J_{\xi 0})]^{1/2}-[M(J_{\eta 0}-J_{\xi 0})]^{1/2}$, область неустойчивости у длинноосного ротора отсутствует.

5. **Вынужденные колебания ротора.** В заключение рассматриваются стационарные колебания ротора, возбужденные его неуравновешенностью. Тогда поперечные перемещения точки C ротора и углы поворота определяются из системы уравнений

$$M_{\eta 0}\varphi_\eta-M_0\varphi_\zeta-F_0u_\eta-F_\zeta u_\zeta=(J_{\zeta 0}-J_{\xi 0})\,\omega^2\gamma_\eta-mge_\zeta$$

$$M_0\varphi_\eta+M_{\zeta 0}\varphi_\zeta+F_\eta u_\eta-F_0u_\zeta=(J_{\eta 0}-J_{\xi 0})\,\omega^2\gamma_\zeta+mge_\eta$$

$$F_0\varphi_\eta+F_\eta\varphi_\zeta+c_{\eta 0}u_\eta-c_0u_\zeta=m\omega^2e_\eta,\quad -F_\zeta\varphi_\eta+F_0\varphi_\zeta+c_0u_\eta+c_{\zeta 0}u_\zeta=m\omega^2e_\zeta \qquad (5.1)$$

При отсутствии демпфирования в опорах, колебания в плоскостях $\eta O\xi$ и $\zeta O\xi$ независимы (для случая, когда угловые параметры опор пренебрежимо малы, это было отмечено в [5]). Демпфирование связывает колебания в этих плоскостях. Далее, как следует из (5.1) и (1.5), присутствие тангенциального и вихревого демпфирования в опорах при рассматриваемых вынужденных колебаниях равнозначно простому снижению уровня радиального и углового демпфирования соответственно. Наконец, из (5.1) следует, что при достаточно большой угловой скорости ω имеет место $\varphi_\eta\approx-\gamma_\eta$, $\varphi_\zeta\approx-\gamma_\zeta$, $u_\eta\approx-e_\eta$, $u_\zeta\approx-e_\zeta$, т. е. рассматриваемый ротор обладает свойством самоцентрирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Митропольский Ю. А.* Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. Киев: Изд-во АН УССР, 1955. 284 с.
2. ***Диментберг Ф. М.*** Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 247 с.
3. *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применения. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 352 с.
4. *Крэнделл С., Броузенс Р.* Об устойчивости вращения ротора, обладающего несимметрией инерции и несимметрией жесткости вала // Тр. амер. о-ва инж.-механиков. Прикл. механика. 1961. Т. 28. № 4. С. 97–101.
5. *Gladwell G. M. L., Stammers C. W.* On the stability of an unsymmetrical bearings // J. Sound and Vibrat. 1966. V. 3. No 3. P. 221–232.

Минск

Поступила в редакцию
26.VI.1990