

$\varphi_{1к} = 130^\circ$ с различными комбинациями геометрических размеров роликов. В моменты фиксации створок между собой производился пересчет их угловых скоростей из условий равенства моментов количества движения системы до и после фиксации.

На фиг. 3 показаны расположения створок СБ в моменты их фиксации между собой при соотношении радиусов роликов

$$R_i/R_2 = 2; 1,56; 1; 1 \quad (7)$$

Видно, что движение системы является неупорядоченным, велик размах маховых перемещений конца последней створки и последовательность их фиксации — 4, 3, 2, 1. Для упорядоченного движения створок требуется обеспечить иную последовательность их фиксации — 1, 2, 3, 4, при этом к моменту поворота корневой створки на угол $\varphi_{1к}$ должны быть выполнены ограничения по угловым положениям остальных створок и усилию натяжения пружины

$$\varphi_* - \Delta\varphi < \varphi_2 < \varphi_*, \quad \varphi_{1к} - 2\Delta\varphi < \varphi_3 < \varphi_{1к} \quad (8)$$

$$\varphi_* - 4\Delta\varphi < \varphi_4 < \varphi_* - \Delta\varphi, \quad P_1 < P < P_2$$

$$\varphi_* = \pi - \varphi_{1к}, \quad \Delta\varphi = 15^\circ,$$

$$(P_1 + P_2) = (0,2 \div 0,25) P_H, \quad P_1 - P_2 = (0,02 \div 0,025) P_H$$

С помощью ЭВМ был организован поиск геометрических размеров R_i , обеспечивающих требуемую последовательность фиксации створок 1, 2, 3, 4 и выполнение ограничений (8). После перебора примерно 10^4 вариантов, потребовавших 2,5 часов машинного времени на ЕС-1060, искомые соотношения определились как близкие к следующим

$$R_i/R_2 = 4; 2; 2,4; 1 \quad (9)$$

На фиг. 4 представлены результаты расчетов раскрытия СБ с радиусами роликов, отвечающими этому соотношению. Сравнение результатов этих двух расчетов показало, что взаимные угловые скорости створок в моменты фиксации их между собой уменьшаются при использовании (9) в несколько раз по сравнению с (7), существенно снижая тем самым нагрузки на силовые элементы каркасов. На фиг. 3, 4 цифрами 1, 2 обозначены траектории центра масс конструкции и ее раскрытое положение. Время t дано в секундах, а координаты x, y — в метрах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гвамичава А. С., Кошелев В. А. Строительство в космосе. М.: Знание, 1984. 64 с./ Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Космонавтика, астрономия», № 9.
2. Newmark N. M. A method of computation for structural dynamics // J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs. 1959. V. 85. No. 3. P. 67-94.
3. Уай Б., Фурумото Н., Бенерджи Э. К., Барбе П. М. Моделирование и расчет динамики разрывания панелей солнечных батарей космического аппарата. Аэрокосмич. техника. 1987. № 5. С. 161-169.

Москва

Поступила в редакцию
10.II.1990

УДК 539.3

© 1992 г. М. Б. ГРИБОВА, Б. М. НУЛЛЕР

КРУЧЕНИЕ СОСТАВНОГО ЦИЛИНДРА, ОСЛАБЛЕННОГО НАДРЕЗОМ

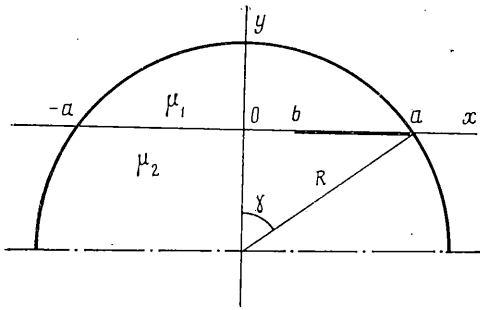
Рассматривается задача Сен-Венана о кручении составного кругового цилиндра, ослабленного надрезом по линии раздела материалов. Решение получено в явном виде.

Пусть граница сечения цилиндра радиуса R (фиг. 1) в биполярных координатах α, β , связанных с декартовыми x, y формулами

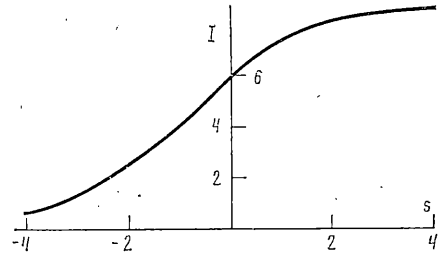
$$\begin{aligned} x &= h \sin \alpha, \quad y = h \sin \beta \\ h &= a(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^{-1}, \quad a = R \sin \gamma \end{aligned} \quad (1)$$

определяются дугами окружности $\beta = \gamma$ при $y > 0$ и $\beta = \gamma - \pi$ при $y < 0$; $-\infty < \alpha < \infty$, $0 < \gamma < \pi$.

Граница раздела материалов — хорда $y = \beta = 0$, $-\infty < \alpha < \infty$ надрезана на участке $b < x \leq a$, или $s < \alpha < \infty$, $s = \ln [(a+b)(a-b)^{-1}]$. Требуется найти напряжения в цилиндре по заданному углу закручивания θ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Решение аналогичной задачи [1] для однородного цилиндра было построено при помощи функции напряжений Прандтля. Здесь в связи с необходимостью сращивать перемещения на линии эту функцию использовать не удалось.

Возьмем более сложное решение, выражающееся через функции кручения Сен-Венана $\Phi_j(\alpha, \beta)$ в виде [2]:

$$\begin{aligned} u_j &= \theta \Phi_j, \quad \Delta \Phi_j = 0 \\ \tau_{\alpha z}^j &= \theta \mu_j (x \cos \beta + h^{-1} \partial \Phi_j / \partial \beta) \\ \tau_j &= \tau_{\beta z}^j = \theta \mu_j (y \operatorname{ch} \alpha - h^{-1} \partial \Phi_j / \partial \alpha) \end{aligned} \quad (2)$$

где $j=1$ при $y > 0$, $j=2$ при $y < 0$, θ — угол закручивания, Δ — оператор Лапласа, μ_j — модули сдвигов материалов, u_j , $\tau_{\alpha z}^j$, $\tau_{\beta z}^j$ — упругие перемещения и напряжения.

Выпишем основные и смешанные граничные условия для каждого сегмента s_j , образующего сечение цилиндра

$$\tau_1(\alpha, \gamma) = \tau_2(\alpha, \gamma - \pi) = 0 \quad (3)$$

$$\tau_1(\alpha, 0) - \tau_2(\alpha, 0) = 0, \quad \alpha \in (-\infty, \infty)$$

$$\tau_j(\alpha, 0) = 0, \quad \alpha \in (s, \infty), \quad u_1(\alpha, 0) = u_2(\alpha, 0), \quad \alpha \in (-\infty, s)$$

Вводя новые переменные $v_j(\varphi, \beta) = \Phi_j(\alpha, \beta) + xy$, $\varphi = \alpha - s$, в силу (1)–(3) получим

$$\partial^2 v_j / \partial \varphi^2 + \partial^2 v_j / \partial \beta^2 = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} v_{j\beta}'(\varphi, \gamma_j) &= 2a^2 \sin \gamma \operatorname{sh}(\varphi + s) [\operatorname{ch}(\varphi + s) - (-1)^j \cos \gamma]^{-3} \\ \gamma_j &= \gamma - \pi(j-1) \end{aligned} \quad (5)$$

$$v_{1\beta}'(\varphi, 0) = \lambda v_{2\beta}'(\varphi, 0), \quad \lambda = \mu_2 \mu_1^{-1}, \quad \varphi \in (-\infty, \infty)$$

$$v_1(\varphi, 0) = v_2(\varphi, 0), \quad \varphi \in (-\infty, 0)$$

$$v_{1\beta}'(\varphi, 0) = 0, \quad \varphi \in (0, \infty) \quad (6)$$

Подставив в основные условия (5) решение уравнения (4) в форме интегралов Лапласа

$$v_j(\varphi, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L (A_j(p) \cos \beta p + B_j(p) \sin \beta p) e^{p\varphi} dp \quad (7)$$

где контур L расположен правее мнимой оси, получим

$$A_j = B_2 \operatorname{ctg} p \gamma_j - F_j (p \sin p \gamma_j)^{-1}, \quad B_1 = B_2 \lambda \quad (8)$$

$$F_j = \frac{2\pi a^2 p e^{s p} (-1)^j}{\sin \pi p \sin \gamma} (-p \sin \gamma \cos p \gamma_j + \cos \gamma \sin p \gamma_j)$$

Смешанные условия (6) при подстановке в них (7), (8) приводят к уравнению Винера — Хопфа

$$v^+(p) = K(p) v^-(p) + C(p), \quad p \in L$$

$$v^+(p) = \int_0^{\infty} [v_1(\varphi, 0) - v_2(\varphi, 0)] e^{-p\varphi} d\varphi v^-(p) = \int_{-\infty}^{\infty} v_{1\beta}'(\varphi, 0) e^{-p\varphi} d\varphi = B_2 p \quad (9)$$

$$K(p) = p^{-1} (\operatorname{ctg} \gamma_2 p - \lambda \operatorname{ctg} \gamma_1 p)$$

$$C(p) = p^{-1}(F_1 \sin^{-1} \gamma_1 p - F_2 \sin^{-1} \gamma_2 p) = 2\pi a^2 p e^{sp} (\sin \gamma_1 p \sin \gamma_2 p)^{-1}$$

Запишем коэффициент уравнения (9) в виде

$$\begin{aligned} K(p) &= K_1(p) K_2(p) \\ K_1(p) &= -\frac{1+\lambda}{p} \operatorname{ctg}(\pi-\gamma) p \\ K_2(p) &= \frac{1}{1+\lambda} (1-\lambda \operatorname{ctg} \gamma_1 p \operatorname{ctg}^{-1} \gamma_2 p) \end{aligned} \quad (10)$$

Факторизуя функцию $K_1(p) = K_1^+(p) [K_1^-(p)]^{-1}$ при помощи гамма-функций, а функцию $K_2(p) = K_2^+(p) [K_2^-(p)]^{-1}$ строго положительную на мнимой оси $p=iq$, убывающую при $q \rightarrow \pm\infty$, как $1+O[\exp(-2\gamma|q|)] + O[\exp(2\gamma-2\pi)|q|^2]$ методом Ф. Д. Гахова [3], получим

$$\begin{aligned} K_1^+(p) &= -\frac{(1+\lambda)\Gamma(1+\kappa p)}{\kappa p^2 \Gamma(1/2+\kappa p)} \\ K_2^+(p) &= \exp \left[-\frac{\ln K_2(p)}{2} \delta + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln K_2(t) dt}{t-p} \right] \\ \kappa &= 1-\gamma/\pi, \operatorname{Re} p > 0 \end{aligned} \quad (11)$$

где $\delta=0$, если $\operatorname{Re} p > 0$; если $p=iq$, то $\delta=1$, интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Оценивая при $p \rightarrow \infty$ функции $K^\pm(p) = K_1^\pm(p) K_2^\pm(p)$ и полагая $K(p) = K^+(p) [K^-(p)]^{-1}$, можно проверить, что однородное решение задачи (9), согласно теореме абелева типа для интегрируемых напряжений $\tau_{\beta z}(s, 0)$, содержит одну произвольную постоянную A .

Общее решение уравнения (9) в указанном классе напряжений имеет вид

$$v^-(p) = K^-(p) \left[A + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{C(t) dt}{K^+(t)(t-p)} \right] \quad (12)$$

хотя в исходной механической постановке задачи нет фактора, определяющего A ; единственным источником деформации цилиндра служит угол закручивания θ , уже введенный в решение.

Покажем, что в общем случае каждое слагаемое (12) и решение в целом порождает посторонние сосредоточенные продольные равные и противоположно направленные силы T , приложенные к берегам надреза в угловых точках $x=a$, и найдем A из условия $T=0$.

Величину T можно определить как главный вектор напряжений $\tau_{\alpha z}^j$ на любой дуге $\alpha = \text{const}$, $0 \leq \beta \leq \gamma$ или $\alpha = \text{const}$, $\gamma - \pi \leq \beta \leq 0$, $\alpha \in (s, \infty)$ и, в частности, по формуле

$$T = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\gamma \tau_{\alpha z}(\alpha, \beta) d\beta \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha z}(\alpha, \beta) &= \int_L \left\{ \lambda \left[AK^-(p) + \frac{K^-(p)}{2\pi i} \int_L \frac{C(t) dt}{K^+(p)(t-p)} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos(\gamma-\beta) p + F_1(p) \cos \beta p \right\} \frac{e^{sp}}{\sin \gamma p} dp \end{aligned} \quad (14)$$

Разложим интеграл (14) в ряд по вычетам в полюсах $p=p_k$ функции $(\sin \gamma p)^{-1}$, лежащих слева от L . Поскольку предел (13) каждого члена ряда, содержащего экспоненту $e^{p_k \beta}$ при $p_k < 0$ равен 0, то и вычет в точке $p=0$ при $T=0$ должен быть равен нулю. Отсюда следует, что

$$A = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{C(t) dt}{K^+(p)t}$$

Крутящий момент, приложенный к цилиндру, выражается формулой

$$M = \theta \sum_{j=1}^2 \mu_j \left[\iint_{S_j} (x^2 + y^2) dx dy + \iint_{S_j} \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx dy \right]$$

которая после вычисления первого интеграла по сегментам принимает вид

$$M = \theta \left\{ \frac{\pi a^4 (3 - 2 \sin^2 \gamma)}{\sin^4 \gamma} (\mu_1 + \mu_2) + \frac{a^4}{6 \sin^4 \gamma} (\mu_2 - \mu_1) \times \right. \\ \left. \times [3(1 + 2 \cos^2 \gamma) \sqrt{1 - \gamma^2} + 9 \cos \gamma \sin \gamma] + \sum_{j=1}^2 \mu_j \iint_{S_j} \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx dy \right\}$$

Касательные напряжения τ на продолжении надреза имеют особенность и по теореме абелева типа выражаются асимптотической формулой

$$\tau_1(\alpha, 0) \sim N(\alpha - s)^{-1/2}, \quad \alpha \rightarrow s + 0 \quad (15)$$

$$N = - \frac{\theta \mu_2 a \kappa (1 + \operatorname{ch} s)}{\sqrt{\pi}(\lambda + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^3 e^{st} \Gamma(1/2 + t\kappa)}{\sin t\gamma \sin t(\gamma - \pi)} \times \\ \times \frac{\{1 - \lambda \operatorname{ctg} t\kappa [\operatorname{ctg} t(\gamma - \pi)]^{-1}\}}{\Gamma(1 + t\kappa) \exp \theta(t)} dt$$

$$\theta(t) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \{1 - \lambda \operatorname{ctg} \gamma z [\operatorname{ctg}(\gamma - \pi) z]^{-1}\}}{z - t} dz$$

При $\gamma = \pi/2$ коэффициент интенсивности напряжений N упрощается [4]:

$$N = - \frac{4\theta \mu_2 R}{\pi^2 \sqrt{2\pi}(\lambda + 1)} I(s)$$

$$I(s) = - (1 + \operatorname{ch} s) i \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{st} \Gamma(1/2 + t/2) \Gamma(1 + t/2) \Gamma^2(1 - t/2) dt \quad (16)$$

причем функция $I(s)$ не зависит от λ .

График этой функции показан на фиг. 2. Он позволяет найти N по формуле (16) для радиального надреза при любых s и λ . При $s=0$ (надрез сделан до центра круга) интеграл (16) выражается через элементарные функции, величина $N = -32\sqrt{2} [15\pi(\lambda + 1)]^{-1} \theta \mu_2 R$ при $\mu_2 = \mu_1$ совпадает с [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грибова М. Б., Нуллер В. М. Кручение кругового цилиндра, ослабленного продольным плоским нерадиальным надрезом // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 80-83.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
4. Вейгмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
14.V.1990