МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1992

УДК 539.3

© 1992 г. А. М. ХЛУДНЕВ

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФОРМАХ РАЗРЕЗОВ В ПЛАСТИНЕ

Рассматривается пластина, срединная плоскость которой занимает ограниченную область с гладкой внешней границей $\partial\Omega$. Предполагается, что пластина имеет разрез, форма которого может меняться. Ставится задача: среди всех разрезов с фиксированными концами указать такой, форма которого является экстремальной в том смысле, что смещения пластины отличаются от заданных как можно больше. Говоря другими словами, на заданном множестве функций, описывающих форму разреза, определен функционал, характеризующий отклонение смещений от заранее заданных. Требуется указать такую форму разреза, чтобы функционал принимал наибольшее значение. Рассматриваются разрезы конечной длины, концы которых лежат как внутри заданной области, так и разрезы, один конец которых может выходить на границу $\partial\Omega$. В каждом из этих случаев обосновывается возможность выбора экстремальной формы разреза.

1. Разрезы с концами, лежащими внутри области. Рассмотрим вертикальный по толщине пластины разрез. Пусть его концы расположены в точках $x=a$, $x=b$ на оси x. Форма разреза описывается уравнением $y=\varepsilon\varphi(x)$ с фиксированной функцией $\varphi(x)$ и параметром ε. На первом этапе исследуем зависимость решения от ε. Задача выбора экстремальных форм разрезов будет поставлена ниже. Пусть срединная плоскость пластины занимает область $\Omega_\varepsilon=\Omega\setminus\Gamma_\varepsilon$, где Γ_ε – график функции $y=\varepsilon\varphi(x)$. Обозначим через w^ε нормальный прогиб пластины, через $W^\varepsilon=(w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon)$ – вектор касательных перемещений и введем в рассмотрение билинейные формы

$$b_\varepsilon(D^2w, D^2u)=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\{w_{xx}u_{xx}+w_{yy}u_{yy}+\sigma(w_{xx}u_{yy}+w_{yy}u_{xx}+2(1-\sigma)w_{xy}u_{xy}\}\,d\Omega_\varepsilon$$

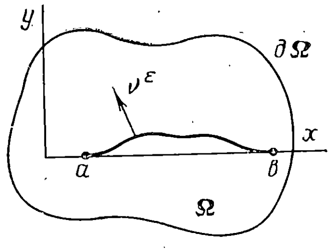
$$B_\varepsilon(\alpha(W),\quad \alpha(U))=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\{\alpha_{11}(W)\alpha_{11}(U)+\alpha_{22}(W)\alpha_{22}(U)+$$
$$+\sigma\alpha_{11}(W)\alpha_{22}(U)+\sigma\alpha_{22}(W)\alpha_{11}(U)+2(1-\sigma)\alpha_{12}(W)\alpha_{12}(U)\}\,d\Omega_\varepsilon$$

Здесь $\alpha(W)$ – тензор малых деформаций, $\alpha_{ij}(W)={}^1/_2(\partial w_i/\partial x_j+\partial w_j/\partial x_i)$, $x_1\equiv x$, $x_2\equiv y$; σ – коэффициент Пуассона, $0<\sigma<{}^1/_2$. Обозначим через f и F заданные внешние нагрузки на пластину. Пусть

$$(f,w)_\varepsilon=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}fw\,d\Omega_\varepsilon,\quad (F,W)_\varepsilon=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}FW\,d\Omega_\varepsilon$$

Предположим, что берега разреза могут расходиться. Множество точек контакта при этом заранее задавать не будем. Это множество является одним из неизвестных в задаче. Пусть $\nu^\varepsilon=(\nu_1^\varepsilon, \nu_2^\varepsilon)$ – вектор нормали к кривой $y=\varepsilon\varphi(x)$ (см. фиг. 1). Обозначим через W_+^ε значение вектора касательных перемещений W^ε на берегу разреза, соответствующему направлению ν^ε; W_-^ε – значение W^ε на противоположном берегу; $[W^\varepsilon]=W_+^\varepsilon-W_-^\varepsilon$. Условие непроникания берегов запишем в виде

$$[W^\varepsilon]\nu^\varepsilon\geqslant 0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon. \tag{1}$$



Фиг. 1

Отметим, что прогиб w^ε также принимает, вообще говоря, различные значения на берегах разреза. На границе $\partial\Omega$ для простоты выберем условие жесткого защемления:

$$w^\varepsilon=\partial w^\varepsilon/\partial n=W^\varepsilon=0 \tag{2}$$

Отметим здесь, что постановки задач теории упругости с условиями непроникания вида (1) обсуждались в [1]; их исследование проводилось в [2]. Случай неупругого деформирования рассматривался в [3]. По поводу других постановок задач для пластин с разрезами (трещинами) можно обратиться к [4] и указанной там библиографии.

Пусть $H_0^{2,\varepsilon}(\Omega_\varepsilon)$ обозначает замыкание в норме $H^2(\Omega_\varepsilon)$ гладких финитных в окрестности $\partial\Omega$ функций, а $K_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)$ — множество вектор-функций W^ε, принадлежащих $H^1(\Omega_\varepsilon)$ и удовлетворяющих условиям (1), (2). Задачу о равновесии пластины с заданной формой разреза $y=\varepsilon\varphi$ можно сформулировать как вариационную. Именно, требуется найти функции $w^\varepsilon\in H_0^{2,\varepsilon}(\Omega_\varepsilon)$ и $W^\varepsilon\in K_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)$, минимизирующие функционалы энергии

$$^1/_2 b_\varepsilon(D^2w, D^2w)-(f, w)_\varepsilon,\quad ^1/_2 B_\varepsilon(\alpha(W), \alpha(W))-(F, W)_\varepsilon$$

соответственно на множествах $H_0^{2,\varepsilon}(\Omega_\varepsilon)$ и $K_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)$. Сформулированные задачи минимизации эквивалентны следующим:

$$b_\varepsilon(D^2w^\varepsilon, D^2w_0^\varepsilon)=(f, w_0^\varepsilon)_\varepsilon \quad \forall w_0^\varepsilon\in H_0^{2,\varepsilon}(\Omega_\varepsilon) \tag{3}$$

$$W^\varepsilon\in K_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon):\ B_\varepsilon(\alpha(W^\varepsilon), \alpha(W_0^\varepsilon)-\alpha(W^\varepsilon))\geqslant$$
$$\geqslant(F, W_0^\varepsilon-W^\varepsilon)_\varepsilon\ \forall \overline{W}^\varepsilon\in K_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon) \tag{4}$$

Соотношение (4) — суть вариационное неравенство. Отметим, что функции w^ε и W^ε определяются из (3) и (4) независимо.

Для того, чтобы исследовать поведение решения при $\varepsilon\to0$, поступим следующим образом. Осуществим отображение области Ω_ε на фиксированную область Ω_0 с помощью преобразования, которое будет задано явно. Предположим, что $\varphi\in H_0^3(a, b)$. Продолжим функцию φ вне интервала (a, b) нулем. Пусть Ω_1, Ω_2 такие области, что $\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$, $\overline{\Omega}_2\subset\Omega$, $\Gamma_\varepsilon\subset\Omega_1$ при всех малых ε. Выберем функцию $h\in C_0^\infty(\Omega_2)$ так, чтобы $h\equiv1$ на Ω_1 и рассмотрим преобразование независимых переменных

$$x^\vee=x,\quad y^\vee=y-\varepsilon\varphi h \tag{5}$$

с положительным для всех $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ якобианом $J_\varepsilon=1-\varepsilon\varphi h_y$. Преобразование (5) взаимно однозначно отображает область Ω_ε на Ω_0. Пусть $u^\varepsilon(x^\vee, y^\vee)\equiv w^\varepsilon(x, y)$, $U^\varepsilon(x^\vee, y^\vee)\equiv W^\varepsilon(x, y)$. Уравнение (3) и неравенство (4) можно записать в новых переменных. При этом структура полученных соотношений зависит от преобразования (5). Выпишем для примера одну из вторых производных функции w^ε:

$$w^\varepsilon_{xx}=u^\varepsilon_{x^\vee x^\vee}-2\varepsilon u^\varepsilon_{x^\vee y^\vee}(\varphi h)_x+\varepsilon^2u^\varepsilon_{y^\vee y^\vee}(\varphi h)_x^2-\varepsilon u^\varepsilon_{y^\vee}(\varphi h)_{xx} \tag{6}$$

Правая часть здесь представлена в виде суммы главного слагаемого $u^{\varepsilon}_{x^\vee x^\vee}$ и членов пропорциональных ε^i, $i\geqslant 1$. По такой же схеме преобразуются и соотношения (3), (4) (см. ниже (9), (10)). Получим теперь оценку решений w^ε. В уравнении (3) в качестве $\overline{w}^\varepsilon$ возьмем w^ε. Тогда

$$b_\varepsilon(D^2w^\varepsilon, D^2w^\varepsilon)\leqslant \|f\|_{0,\Omega_\varepsilon}\|w^\varepsilon\|_{0,\Omega_\varepsilon} \tag{7}$$

где $\|\cdot\|_{s,\Omega_\varepsilon}$ — норма функции в $H^s(\Omega_\varepsilon)$. Отсюда нетрудно вывести $\|w^\varepsilon\|_{2,\Omega_\varepsilon}\leqslant$ $\leqslant c$ равномерно по ε. Полученное неравенство означает

$$\|u^\varepsilon\|_{2,\Omega_0}\leqslant c \tag{8}$$

с постоянной c, не зависящей от ε. При этом уравнение (3) примет вид

$$b_0(q_\varepsilon D^2u^\varepsilon, q_\varepsilon D^2\overline{u})-(q_\varepsilon^2 f_\varepsilon\overline{u})_0=\varepsilon\int\limits_{\Omega_0} g(x^\vee, y^\vee, \varepsilon, D^\beta u^\varepsilon, D^\beta\overline{u})\,q_\varepsilon d\Omega_0 \quad \forall\overline{u}\in H_0^{2,0}(\Omega_0) \tag{9}$$

где $q_\varepsilon=J_\varepsilon^{-1/2}$, $f_\varepsilon(x^\vee, y^\vee)=f(x, y)$, причем функция g зависит линейно от $D^\beta u^\varepsilon$, $D^\beta\overline{u}$, $|\beta|\leqslant 2$. Что касается неравенства (4), то в переменных $x^\vee$, $y^\vee$ оно имеет вид

$$U^\varepsilon\in K_\varepsilon^1(\Omega_0):\quad B_0(q_\varepsilon\alpha(U^\varepsilon),\ q_\varepsilon\alpha(\overline{U}^\varepsilon)-q_\varepsilon\alpha(U^\varepsilon))-(q_\varepsilon^2F_\varepsilon\overline{U}^\varepsilon-U^\varepsilon)_0\geqslant$$
$$\geqslant\varepsilon\int\limits_{\Omega_0} G(x^\vee, y^\vee, \varepsilon, D^\beta U^\varepsilon, D^\beta\overline{U}^\varepsilon)\,q_\varepsilon^2 d\Omega_0 \quad \forall\overline{U}^\varepsilon\in K_\varepsilon^1(\Omega_0) \tag{10}$$

Здесь $|\beta|\leqslant 1$. Зависимость функции G от $D^\beta U^\varepsilon$, $D^\beta\overline{U}^\varepsilon$ вообще говоря, нелинейная. Характер этой зависимости определяется структурой вариационного неравенства (4). Отметим, в частности, что «старшими» являются квадратичные члены от $D^\beta U^\varepsilon$. В то же время перед всеми слагаемыми, содержащими $D^\beta U^\varepsilon$ и $D^\beta\overline{U}^\varepsilon$, стоит в качестве множителя ε^i, $i\geqslant 1$. Из неравенства (10) следует

$$B_0(q_\varepsilon\alpha(U^\varepsilon),\ q_\varepsilon\alpha(U^\varepsilon))\leqslant(q_\varepsilon^2F_\varepsilon, U^\varepsilon-\overline{U}^\varepsilon)_0+ \tag{11}$$
$$+B_0(q_\varepsilon\alpha(U^\varepsilon), q_\varepsilon\alpha(\overline{U}^\varepsilon))-\varepsilon\int\limits_{\Omega_0} G(x^\vee, y^\vee, \varepsilon, D^\beta U^\varepsilon, D^\beta\overline{U}^\varepsilon)\,q_\varepsilon^2\, d\Omega_0$$

Воспользуемся неравенством Корна для области $\Omega_0 \Sigma_{i,j=1}^2\|\alpha_{ij}(U^\varepsilon)\|^2_{0,\Omega_0}\geqslant$ $\geqslant\|U^\varepsilon\|^2_{1,\Omega_0}$ с постоянной c, не зависящей от ε. В то же время в силу неравенства $q_\varepsilon>1/2$, справедливого при малых ε, имеем $B_0(q_\varepsilon\alpha(U^\varepsilon),\ q_\varepsilon\alpha(U^\varepsilon))\geqslant$ $\geqslant c\Sigma_{i,j=1}^n\|\alpha_{ij}\geqslant(U^\varepsilon)\|^2_{0,\Omega_0}$. Отметим также, что нулевой элемент принадлежит $K_\varepsilon^1(\Omega_0)$ при всех ε. Таким образом, из (11) при $\overline{U}^\varepsilon=0$ следует оценка U^ε:

$$\|U^\varepsilon\|_{1,\Omega_0}\leqslant c \tag{12}$$

равномерная по ε, $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$. Для того чтобы осуществить предельный переход при $\varepsilon\to 0$ в (9), (10), нам понадобится следующее вспомогательное утверждение о сходимости: для любого элемента $\overline{U}\in K_0^1(\Omega_0)$ можно построить последовательность $\overline{U}^\varepsilon\in K_\varepsilon^1(\Omega_0)$ такую, что $\overline{U}^\varepsilon\to\overline{U}$ сильно в $H^1(\Omega_0)$. Действительно. Пусть $\overline{U}=(\overline{u}_1, \overline{u}_2)$. Положим $\overline{U}^\varepsilon=\overline{U}+(0, \varepsilon\varphi_x h\overline{u}_1)$, где функция h выбирается так же, как и в (5). Тогда функция $\overline{U}^\varepsilon$ будет удовлетворять всем необходимым условиям. В самом деле, включение $\overline{U}\in K_0^1(\Omega_0)$ означает справедливость неравенства $[\overline{u}_2]\geqslant 0$ на Γ_0. В то же время принадлежность $\overline{U}^\varepsilon$ множеству $K_\varepsilon^1(\Omega_0)$ означает $[\overline{u}_1^\varepsilon](-\varepsilon\varphi_x)+$

$+[\bar{u}_2^\varepsilon]\geqslant 0$ на Γ_0. Ясно, что построенная функция $\bar{U}^\varepsilon$ будет удовлетворять этому неравенству. Сходимость $\bar{U}^\varepsilon$ к $\bar{U}$ очевидна.

Пользуясь оценками (8), (12), выберем из последовательностей u^ε, U^ε подпоследовательности, которые будем обозначать прежним образом и для которых при $\varepsilon\to 0$: $u^\varepsilon\to u$ слабо в $H^2(\Omega_0)$, $U^\varepsilon\to U$ слабо в $H^1(\Omega_0)$. Отметим, что $q_\varepsilon\to 1$ сильно в $L^2(\Omega)$. После перехода к пределу в (9) будем иметь

$$b_0(D^2u,\ D^2\bar{u})=(f,\ \bar{u})_0\quad \forall\bar{u}\in H_0^{2,0}(\Omega_0) \tag{13}$$

Для того чтобы осуществить переход к пределу в (10), воспользуемся установленным выше утверждением. Выберем произвольный фиксированный элемент $\bar{U}\in K_0^1(\Omega_0)$ и построим последовательность функций $\bar{U}^\varepsilon\in K_\varepsilon^1(\Omega_0)$, сильно сходящуюся к $\bar{U}$. После перехода к верхнему пределу в обеих частях (10) получим

$$B_0(\alpha(U),\ \alpha(\bar{U})-\alpha(U))\geqslant(F,\ \bar{U}-U)_0\quad \forall\bar{U}\in K_0^1(\Omega_0),\ U\in K_0^1(\Omega_0) \tag{14}$$

Итак, установлено утверждение: из последовательности решений $w^\varepsilon=u^\varepsilon$, $W^\varepsilon=U^\varepsilon$ задачи (3), (4) можно выбрать подпоследовательности, слабо сходящиеся к u, U соответственно, причем u, U удовлетворяют (13), (14).

Полученный результат можно использовать для отыскания экстремальных форм разрезов. Постановка такой задачи состоит в следующем. Пусть задано выпуклое, ограниченное и замкнутое множество Φ в $H_0^3(a,b)$. Каждый элемент $\varphi\in\Phi$ определяет форму разреза $y=\varphi(x)$, $x\in(a,\ b)$. При этом можно найти решение задач вида (3), (4), дающих прогибы w_φ и касательные перемещения W_φ. Пусть $\Omega_\varphi=\Omega\setminus\Gamma_\varphi$, Γ_φ — график функции $y=\varphi(x)$, а w_0, W_0 — заданные прогиб и касательные смещения. Считаем, что w_0 и W_0 принадлежат $L^2(\Omega)$. Требуется найти такую функцию $\varphi\in\Phi$, чтобы функционал $J(\varphi)=\|w_\varphi-w_0\|_{0,\Omega_\varphi}+\|W_\varphi-W_0\|_{0,\Omega_\varphi}$ принимал максимальное значение. Таким образом, речь идет о выборе разреза, при котором отклонение w_φ, W_φ от w_0, W_0 является наибольшим. Отметим здесь, что задача определения формы трещины в двумерном случае на основе других критериев рассматривалась в [5]. Пространство функций, аналогичное $H_0^{2,\varepsilon}(\Omega_\varepsilon)$ и соответствующее $y=\varphi(x)$ будем в данном случае обозначать через $H_0^{2,\varphi}(\Omega_\varphi)$. Кроме того, множество функций W, удовлетворяющих неравенству $[W]\nu^\varphi\geqslant 0$ на Γ_φ и обращающихся в ноль на $\partial\Omega$, обозначаем $K_\varphi^1(\Omega_\varphi)$. Здесь $\nu^\varphi=(-\varphi_x,\ 1)/\sqrt{1+\varphi_x^2}$ — нормаль к Γ_φ. При каждой функции $\varphi\in\Phi$ прогиб w_φ и касательные перемещения W_φ однозначно определяются из соотношений

$$b_\varphi(D^2w_\varphi,\ D^2\bar{w})=(f,\ \bar{w})_\varphi\quad \forall\bar{w}\in H_0^{2,\varphi}(\Omega_\varphi) \tag{15}$$

$$B_\varphi(\alpha(W_\varphi),\ \alpha(\bar{W})-\alpha(W_\varphi))\geqslant$$
$$\geqslant(F,\ \bar{W}-W_\varphi)_\varphi\quad \forall\bar{W}\in K_\varphi^1(\Omega_\varphi) \tag{16}$$

Знак φ при обозначении билинейных форм и в правых частях (15), (16) означает, что интегрирование производится по области Ω_φ. Выбор экстремальной формы разреза заключается в решении задачи

$$\sup_{\varphi\in\Phi} J(\varphi) \tag{17}$$

Покажем, что существует функция $\varphi\in\Phi$, решающая задачу (17). Пусть φ^n — максимизирующая последовательность. В силу ограниченности множества Φ она является ограниченной в $H_0^3(a,b)$. Не уменьшая общности, предполагаем $\varphi^n\to\varphi$ слабо в $H_0^3(a,\ b)$. Учитывая теоремы вложения, можно считать $|\varphi_{xx}^n-\varphi_{xx}|<1/n$ на $(a,\ b)$. При каждом φ^n можно найти

$w^n \equiv w_{\varphi^n}$ и $W^n \equiv W_{\varphi^n}$ из соотношений

$$b_{\varphi^n}(D^2 w^n, D^2 \overline{w}^n) = (f, \overline{w}^n)_{\varphi^n} \quad \forall \overline{w}^n \in H_0^{2,\varphi^n}(\Omega_{\varphi^n}) \tag{18}$$

$$B_{\varphi^n}(\alpha(W^n),\ \alpha(\overline{W}^n) - \alpha(W^n)) \geqslant$$
$$\geqslant (F,\ \overline{W}^n - W^n)_{\varphi^n} \quad \forall \overline{W}^n \in K_{\varphi^n}^1(\Omega_{\varphi^n}) \tag{19}$$

Выберем области Ω_1, Ω_2 и функцию h как и ранее, считая $\Gamma_{\varphi^n} \subset \Omega_1$ при всех n, и сделаем преобразование независимых переменных, аналогичное (5): $x^\vee = x$, $y^\vee = y + (\varphi - \varphi^n)h$. Функции φ и φ^n при этом считаются продолженными вне (a, b) нулем. Согласно сказанному преобразование независимых переменных можно записать в виде $x^\vee = x$, $y^\vee = y - \psi_n h/n$, где функции $\psi_n = n(\varphi^n - \varphi)$ ограничены в $C^2[a, b]$. При этом область Ω_{φ^n} взаимно однозначно отобразится на Ω_φ с положительным при достаточно больших n якобианом $J_n = 1 - \psi_n h_y/n$. Далее можно рассуждать так же, как и при доказательстве утверждения о сходимости u^ε, U^ε, записав (18), (19) в переменных $x^\vee$, $y^\vee$ и используя оценки решения, осуществить переход к пределу при $n \to \infty$. В переменных $x^\vee$, $y^\vee$ соотношения (18), (19) запишутся следующим образом

$$b_\varphi(q_n D^2 u^n, q_n D^2 \overline{u}) - (q_n^2 f_n, \overline{u})_\varphi = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega_\varphi} g\left(x^\vee, y^\vee, \frac{1}{n}, D^\beta u^n, D^\beta \overline{u}\right) q_n^2 \, d\Omega_\varphi$$
$$\forall \overline{u} \in H_0^{2,\varphi}(\Omega_\varphi) \tag{20}$$

$$B_\varphi(q_n \alpha(U^n),\ q_n \alpha(\overline{U}^n) - q_n \alpha(U^n)) - (q_n^2 F_n, \overline{U}^n - U^n)_\varphi \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega_\varphi} G\left(x^\vee, y^\vee, \frac{1}{n}, D^\beta U^n, D^\beta \overline{U}^n\right) q_n^2 \, d\Omega_\varphi \quad \forall \overline{U}^n \in K_{\varphi^n}^1(\Omega_\varphi) \tag{21}$$

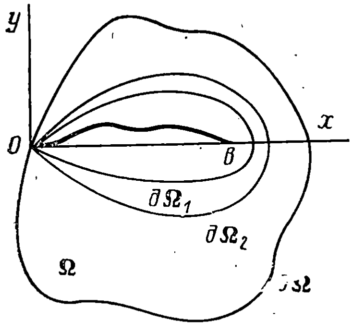
Здесь $q_n = J_n^{-1/2}$. Оценки решения u^n, U^n будут иметь вид $\|u^n\|_{2,\Omega_\varphi} \leqslant c$, $\|U^n\|_{1,\Omega_\varphi} \leqslant c$ с постоянными, не зависящими от n. Выберем из последовательностей u^n, U^n подпоследовательности, которые будем обозначать прежним образом, слабо сходящиеся к $u \in H_0^{2,\varphi}(\Omega_\varphi)$ и $U \in K_\varphi^1(\Omega_\varphi)$ соответственно. Кроме того, не уменьшая общности можно считать u^n, $U^n \to u$, U сильно в $L^2(\Omega_\varphi)$. Заметим, что для произвольного элемента $\overline{U} \in K_\varphi^1(\Omega_\varphi)$ можно построить последовательность $\overline{U}^n \in K_{\varphi^n}^1(\Omega_\varphi)$ такую, что $\overline{U}^n \to \overline{U}$ сильно в $H^1(\Omega_\varphi)$. Этот факт доказывается так же как и доказанное ранее утверждение о возможности выбора сходящейся последовательности $\overline{U}^\varepsilon$. Используя сделанные замечания, перейдем к пределу при $n \to \infty$ в (20), (21). Получим

$$b_\varphi(D^2 u,\ D^2 \overline{u}) = (f,\ \overline{u})_\varphi \quad \forall \overline{u} \in H_0^{2,\varphi}(\Omega_\varphi)$$
$$B_\varphi(\alpha(U),\ \alpha(\overline{U}) - \alpha(U)) \geqslant (F,\ \overline{U} - U)_\varphi \quad \forall \overline{U} \in K_\varphi^1(\Omega_\varphi)$$

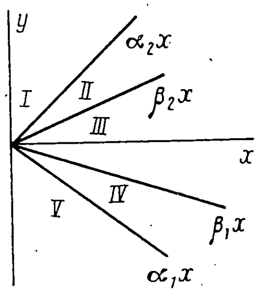
Это означает, что предельные функции u, U соответствуют разрезу с формой $y = \varphi(x)$, т. е. $u \equiv u_\varphi$, $U \equiv U_\varphi$. Пусть $w_{0n}(x^\vee, y^\vee) = w_0(x, y)$, $W_{0n}(x^\vee, y^\vee) \equiv W_0(x, y)$. Тогда

$$d \equiv \sup_{\overline{\varphi} \in \Phi} J(\overline{\varphi}) = \overline{\lim}\, J(\varphi^n) = \overline{\lim}\, \{\| w^n - w_0 \|_{0, \Omega_{\varphi^n}} + \| W^n - W_0 \|_{0, \Omega_{\varphi^n}}\} =$$
$$= \overline{\lim}\, \{\| q_n(u^n - w_{0n}) \|_{0, \Omega_\varphi} + \| q_n(U^n - W_{0n}) \|_{0, \Omega_\varphi}\} =$$
$$= \| u_\varphi - w_0 \|_{0, \Omega_\varphi} + \| U_\varphi - W_0 \|_{0, \Omega_\varphi} = J(\varphi)$$

Следовательно, построенная функция φ доставляет максимум функционалу I на Φ и, таким образом, решает задачу (17). Утверждение доказано. Добавим, что среди всех разрезов, форма которых определена уравнением $y = \varphi(x)$, можно указать такой, что отклонение смещений



Фиг. 2



Фиг. 3

w_φ, W_φ от заданных w_0, W_0 будет наименьшим. Отыскание таких разрезов сводится к решению задачи минимизации

$$\inf_{\varphi\in\Phi} J(\varphi) \tag{22}$$

2. Разрезы с концом, выходящим на границу. Пусть по-прежнему $y=\varepsilon\varphi(x)$ — уравнение формы разреза, причем точка $(0, 0)$ является началом разреза, а точка $(b, 0)$ — его концом: $(0, 0)\in\partial\Omega$. В данном случае считаем $\varphi\in H_0^4(0, b)$. Как и ранее, $\Omega_\varepsilon=\Omega\setminus\Gamma_\varepsilon$, Γ_ε — график функции $y=\varepsilon\varphi$. Прогиб w^ε и касательные перемещения W^ε определяются из соотношений:

$$w^\varepsilon\in H_0^{2,\varepsilon}(\Omega_\varepsilon),\quad W^\varepsilon\in K_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon);$$

$$b_\varepsilon(D^2w^\varepsilon, D^2\bar{w})=(f, \bar{w})_\varepsilon\quad \forall\bar{w}\in H_0^{2,\varepsilon}(\Omega_\varepsilon) \tag{23}$$

$$B_\varepsilon(\alpha(W^\varepsilon), \alpha(\overline{W})-\alpha(W^\varepsilon))\geqslant(F, \overline{W}-W^\varepsilon)_\varepsilon\quad \forall\overline{W}\in K_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon) \tag{24}$$

Сначала исследуем поведение решения при $\varepsilon\to0$. Выберем области Ω_1, $\Omega_2\subset\Omega$ так, как показано на фиг. 2; $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ — их границы. Пусть $h\equiv1$ в Ω_1, $h\equiv0$ вне Ω_2, $h\in C^\infty(\Omega)$, $\Omega_1\subset\Omega$. Такой выбор можно осуществить, если уравнения границ $\partial\Omega_2$, $\partial\Omega_1$ вблизи $x=0$ взять соответственно в виде $y=\alpha_2x$, $y=\alpha_1x$, $y=\beta_2x$, $y=\beta_1x$, $\beta_2>0$, $\beta_1<0$, α_i, β_i — const, $\alpha_2>\beta_2>\beta_1>\alpha_1$. Действительно, если ввести обозначения для областей $I-V$ вблизи $x=0$ так, как указано на фиг. 3, то функцию h можно выбрать следующим образом: $h\equiv0$ в областях I, V; $h\equiv1$ в области III; $h(x, y)=\exp\{1-(\alpha_2-\beta_2)^2x^2/[(\alpha_2-\beta_2)^2x^2-(y-\beta_2x)^2]\}$ в области II; $h(x, y)=\exp\{1-(\alpha_1-\beta_1)^2x^2/[(\alpha_1-\beta_1)^2x^2-(y-\beta_1x)^2]\}$ в области IV. Согласно включению $\varphi\in H_0^4(0, b)$ имеем $\varphi(x)=o(x^2)$, $\varphi_x(x)=o(x)$, $\varphi_{xx}(x)=o(1)$. Поэтому функция φh и ее производные до второго порядка включительно ограничены при $x\to0$, $(x, y)\in\Omega$. Рассмотрим преобразование независимых переменных, переводящее область Ω_ε в Ω_0:

$$\check{x}=x,\quad \check{y}=y-\varepsilon\varphi h \tag{25}$$

Якобиан этого преобразования $J_\varepsilon=1-\varepsilon\varphi h_y$ с учетом сказанного больше нуля при всех малых ε, $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$. Дальнейшие рассуждения в целом аналогичны тем, которые мы использовали при доказательстве сходимости решения в случае, когда концы разреза находятся внутри области. Соотношения (23), (24) можно записать в переменных $\check{x}$, $\check{y}$. Оценки решения $u^\varepsilon\equiv w^\varepsilon$, $U^\varepsilon\equiv W^\varepsilon$ имеют вид $\|u^\varepsilon\|_{2,\Omega_0}+\|U^\varepsilon\|_{1,\Omega_0}\leqslant c$. Как и ранее, с их помощью можно осуществить переход к пределу при $\varepsilon\to0$. Таким образом, имеет место следующее утверждение: из последовательности решений u^ε, U^ε можно выбрать подпоследовательности, обозначаемые прежним образом, и такие, что $u^\varepsilon \to u$ слабо в $H_0^{2,0}(\Omega_0)$, $U^\varepsilon \to U$ слабо в $H^1(\Omega_0)$, причем u, U удовлетворяют соотношениям

$$b_0(D^2u, D^2\bar{u}) = (f, \bar{u})_0 \quad \forall \bar{u} \in H_0^{2,0}(\Omega_0);$$

$$B_0(\alpha(U), \alpha(\bar{U}) - \alpha(U)) \geqslant (F, \bar{U} - U)_0$$

$$\forall \bar{U} \in K_0^1(\Omega_0); \quad U \in K_0^1(\Omega_0).$$

Рассмотрим теперь вопрос о выборе экстремальной формы разреза. Пусть $y = \varphi(x)$ — уравнение формы разреза, начинающегося в точке $(0, 0)$ и заканчивающегося в точке $(b, 0)$. Для всех $\varphi \in \Phi$ можно найти решение задачи

$$w_\varphi \in H_0^{2,\varphi}(\Omega_\varphi), \qquad W_\varphi \in K_\varphi^1(\Omega_\varphi)$$

$$b_\varphi(D^2w_\varphi, D^2\bar{w}) = (f, \bar{w})_\varphi \qquad \forall \bar{w} \in H_0^{2,\varphi}(\Omega_\varphi) \tag{26}$$

$$B_\varphi(\alpha(W_\varphi), \alpha(\bar{W}) - \alpha(W_\varphi)) \geqslant$$

$$\geqslant (F, \bar{W} - W_\varphi)_\varphi \quad \forall \bar{W} \in K_\varphi^1(\Omega_\varphi) \tag{27}$$

В данном случае Φ — произвольное непустое выпуклое, замкнутое и ограниченное множество в $H_0^4(0, b)$. Определим функционал $J(\varphi) = \|w_\varphi - w_0\|_{0,\Omega_\varphi} + \|W_\varphi - W_0\|_{0,\Omega_\varphi}$. Требуется найти такую функцию $\varphi \in \Phi$, чтобы

$$J(\varphi) \geqslant J(\bar{\varphi}) \quad \forall \bar{\varphi} \in \Phi \tag{28}$$

Естественно предполагаем, что при каждом $\varphi \in \Phi$ график функции $y = \varphi(x)$ не выходит на границу $\partial\Omega$. Существует функция $\varphi \in \Phi$, доставляющая максимум функционалу J на Φ. Для доказательства выберем максимизирующую последовательность φ^n. Можно считать, не уменьшая общности $\varphi^n \to \varphi$ слабо в $H_0^4(0, b)$, $|\varphi_{xx}^n - \varphi_{xx}| < 1/n$ на (o, b). Функцию h построим так же как и при доказательстве предыдущего утверждения, выбирая области Ω_1, Ω_2 с аналогичными требованиями. Преобразование независимых переменных имеет вид $\check{x} = x$, $\check{y} = y + (\varphi - \varphi^n)h$. Якобиан этого преобразования положителен при больших n. Дальнейшие рассуждения в принципиальном плане ничем не отличаются от тех, которые использовались ранее. Укажем также, что аналогично можно рассмотреть задачу выбора такой формы разреза, при котором смещения отличаются от заранее заданных как можно меньше. Для этого требуется решить задачу минимизации

$$\inf_{\varphi \in \Phi} J(\varphi)$$

В заключение отметим, что рассматриваемая в статье задача имеет многочисленные механические приложения. В частности, при рациональном проектировании оболочек с конструктивными прорезями, различного рода оболочек-вставок с прорезями в средних слоях, при изготовлении оболочек, используемых в машиностроении, строительстве, в случаях когда требуется минимизировать напряжения в конструкциях и т. д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кравчук А. С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 466–474.
2. *Хлуднев А. М.* К проблеме контакта линейного упругого тела с упругими и жесткими телами (вариационный подход) // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 999–1005.
3. *Арутюнян Н. Х., Шойхет Б. А.* Асимптотическое поведение решения краевой задачи теории ползучести неоднородных стареющих тел с односторонними связями // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 3. С. 31–48.
4. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
5. *Баничук Н. В.* Определение формы криволинейной трещины методом малого параметра // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 2. С. 130–137.

Новосибирск

Поступила в редакцию 15.V.1989