

УДК 624.07:534.1

© 1992 г. О. Д. ПРЯХИНА

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ БАЛКИ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Изучается задача о неустановившихся колебаниях упругой балки (балочной плиты) ширины $2b$, контактирующей без трения с полуограниченной средой типа вязкоупругого слоя, полупространства, пакета слоев или слоистого полупространства под действием произвольной вертикальной нагрузки вида $\bar{f}(x, t) = \bar{f}_1(x)\bar{f}(t)$. Предлагается эффективный метод решения указанной задачи, основанный на использовании собственных форм колебаний упругого тела конечных размеров и метода фиктивного поглощения, применяемого для решения интегральных уравнений, возникающих в контактных задачах для полуограниченных сред. В результате удается получить аналитический вид решения в преобразованиях Лапласа. Обращение же последнего строится численно или, используя лемму Жордана, сводится к сумме вычетов плюс интегралы по разрезам. Изучается широкий класс условий закрепления концов балки.

1. Основные уравнения. Указанная задача с помощью интегрального преобразования Фурье по координате x :

$$\bar{\varphi}(\alpha, t) = \int_0^{\infty} \varphi(x, t) e^{i\alpha x} dx$$

и интегрального преобразования Лапласа по времени t :

$$\bar{\bar{\varphi}}(\alpha, s) = \int_0^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha, t) e^{-st} dt$$

при условии полного контакта балки с основанием и учетом нулевых начальных условий сводится к системе дифференциального и интегрального уравнений (в безразмерных параметрах):

$$\beta u^{IV}(x, p) + RHp^2 u(x, p) = f(x, p) - q(x, p) \quad (1.1)$$

$$u(x, p) = \int_{-a}^a k(x - \xi) q(\xi, p) d\xi \quad (1.2)$$

$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha, p) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

$$R = \rho_0 / \rho, \quad M = \mu / E_0, \quad H = h_0 / h, \quad \beta = H^3 / (12M), \quad x = \bar{x} / h, \quad a = b / h, \\ p^2 = e^{-i\tau} \rho s^2 h^2 / \mu, \quad \tau^2 = \mu t^2 / (\rho h^2)$$

Здесь ρ_0 , h_0 , E_0 — соответственно плотность, толщина и модуль Юнга балки, а ρ , h , μ — плотность, толщина и модуль упругости среды; $u(x, p)$, $f(x, p)$, $q(x, p)$ — преобразования Лапласа по времени t соответственно от

прогиба $\bar{u}(x, \tau)$ (отнесенного к h), нагрузки $\bar{f}(x, \tau)$ и нормальных напряжений $\bar{q}(x, \tau)$, возникающих в области контакта (отнесенных к μ); γ — параметр вязкости среды (коэффициент потерь на внутреннее трение в материале по Е. С. Сорокину [1]). Для балочной плиты $\beta = = H^3/[12M(1-\nu_0^2)]$, ν_0 — коэффициент Пуассона.

Функция $K(\alpha, p)$ для различных типов слоистых сред имеет тот же вид, что и в соответствующих задачах об установившихся колебаниях при замене частоты колебаний Ω на ip , i — мнимая единица. $K(\alpha, p)$ допускает представление в виде бесконечного произведения по нулям z_k и полюсам p_k [2]:

$$K(\alpha, p) = \varphi_0(\alpha, p) \prod_{k=1}^{\infty} [\alpha^2 - z_k^2(p)] [\alpha^2 - p_k^2(p)]^{-1}$$

Для вязкоупругого основания все нули, полюсы являются комплексными.

Кроме того, рассматриваются следующие граничные условия на концах балки $x = \pm a$ для дифференциального уравнения (1.1): 1) концы балки свободны $\partial^2 u / \partial x^2 = \partial^3 u / \partial x^3 = 0$, 2) жесткая заделка на концах $u(x, p) = \partial u / \partial x = 0$, 3) шарнирное опирание $u = \partial^2 u / \partial x^2 = 0$, 4) скользящая заделка $\partial u / \partial x = \partial^3 u / \partial x^3 = 0$.

2. Метод построения общего решения. Решение задачи ищем в виде

$$u(x, p) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(p) \varphi_k(x) \quad (2.1)$$

Не нарушая общности, рассмотрим два случая нагрузки $f(x, p)$: симметричной по x (задача I) и кососимметричной (задача II). Для заданной нагрузки $f(x, p) = f_1(x)f_2(p)$ общее решение будет суперпозицией задач I и II.

Задача I. При симметричном нагружении функции $\varphi_k(x)$, удовлетворяющие граничным условиям 1) — 4), берем соответственно в виде

1) $\varphi_1 = 1$, $\varphi_k = \text{ch } \theta_k x / \text{ch } \theta_k a + \cos \theta_k x / \cos \theta_k a$, $k = 2, 3, \dots$ 2) $\varphi_k = \text{ch } \theta_k x / \text{ch } \theta_k a - \cos \theta_k x / \cos \theta_k a$, $k = 1, 2, 3, \dots$, 3) — 4) $\varphi_k = \cos \theta_k x$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Задача II. При кососимметричном нагружении $\varphi_k(x)$ берутся в виде нечетных функций, т. е. $\text{ch } \theta_k x$ следует заменить на $\text{sh } \theta_k x$, а $\cos \theta_k x$ на $\sin \theta_k x$.

Для задач I — 1, I — 2, II — 1, II — 2 θ_k определяются из следующего трансцендентного уравнения, вид которого определяется граничными условиями на концах балки $x = \pm a$:

$$\text{th } \theta_k a \pm \text{tg } \theta_k a = 0$$

Здесь и в дальнейшем знак плюс соответствует симметричному случаю, минус — кососимметричному.

Для задач I — 3, II — 4: $\theta_k = \pi(2k-1)/(2a)$, для задач I — 4, II — 3: $\theta_k = = \pi(k-1)/a$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)

Решение $q(x, \eta)$ интегрального уравнения (1.2) $Kq = u$ для установившихся колебаний строится методом фиктивного поглощения [3] в аналитическом виде и для правой части уравнения $u(x, \eta) = e^{-i\eta x}$ получено в [4]. По аналогии [4, 5] нетрудно убедиться в том, что в преобразованиях Фурье и Лапласа решения уравнений $Kq^+ = \cos \eta x$ и $Kq^- = \sin \eta x$ для нестационарной задачи будут иметь следующий вид:

$$Q^\pm(p, \alpha, \eta) = s_0 \left\{ f_s^\pm(\alpha, \eta) - \sum_{k=1}^N c_k(p, \eta) [f_1(\alpha, p, x_k) \pm \right.$$

$$\pm f_1(\alpha, p, -x_k) \Big] \Big\} (\alpha^2 + B^2)^{-1/2} K^{-1}(\alpha, p) / 2 \quad (2.2)$$

$$f_3^\pm(\alpha, \eta) = f_2(\alpha, \eta) \pm f_2(-\alpha, \eta) + f_2(-\alpha, -\eta)$$

$$f_2(\alpha, \eta) = i e^{i(\alpha - \eta)a} \left[((B + i\alpha)(B - i\eta))^{1/2} \operatorname{erf}(2a(B + i\alpha))^{1/2} + (B^2 + \eta^2)^{1/2} (\operatorname{erf}(2a(B - i\eta))^{1/2} - 1) \right] / (\eta - \alpha)$$

$$f_1(\alpha, p, x) = (B + i\alpha)^{1/2} e^{i\alpha a} F(\alpha, p, x) + (B - i\alpha)^{1/2} e^{-i\alpha a} F(-\alpha, p, -x)$$

$$F(\alpha, p, x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{i p_j(a-x)} (B - i p_j)^{-1/2} (2 p_j (p_j + \alpha))^{-1}$$

$$\alpha_j = \prod_{k=1}^N [p_j^2(p) - z_k^2(p)] \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N [p_j^2(p) - p_k^2(p)]^{-1}$$

$$s_0 = 1 \text{ для } Q^+, \quad s_0 = i \text{ для } Q^-$$

Согласно методу фиктивного поглощения, x_k — точки, делящие интервал $(0, a)$ на равные отрезки, $B \gg 1$; erf — интеграл вероятности. Неизвестные $c_k(p, \eta)$ определяются из следующей системы линейных алгебраических уравнений ($k, l = 1, 2, \dots, N$):

$$\sum_{k=1}^N c_k(p, \eta) [f_1(z_l, p, x_k) \pm f_1(z_l, p, -x_k)] = f_3^\pm(z_l, \eta) \quad (2.3)$$

Применив обратное преобразование Фурье к функциям $Q^\pm(p, \alpha, \eta)$ (2.2), получим решения $q^\pm(x, p, \eta)$ интегральных уравнений $Kq^+ = \cos \eta x$ и $Kq^- = \sin \eta x$ также в аналитическом виде. Подставляя (2.4) в исходные уравнения (1.1), умножая обе части полученного соотношения на соответствующие функции $\varphi_n(x)$ и интегрируя от $-a$ до a , получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $b_k(p)$:

$$(\theta_n^4 \beta + RH p^2) \Delta_n b_n(p) + \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk}(p) b_k(p) = f_n(p), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

$$f_n(p) = \int_{-a}^a f(x, p) \varphi_n(x) dx, \quad \Delta_n = \int_{-a}^a \varphi_n^2(x) dx$$

Элементы матрицы d_{nk} зависят от параметра преобразования Лапласа p и выражаются через функции $Q^\pm(p, \alpha, \eta)$ (2.2) следующим образом: условие 1):

$$d_{nk} = \{ Q^\pm(p, i\theta_n, i\theta_k) (\operatorname{ch} \theta_n a \operatorname{ch} \theta_k a)^{-1} + Q^\pm(p, \theta_n, i\theta_k) (\cos \theta_n \operatorname{ch} \theta_k a)^{-1} + Q^\pm(p, i\theta_n, \theta_k) (\cos \theta_k a \operatorname{ch} \theta_n a)^{-1} + Q^\pm(p, \theta_n, \theta_k) (\cos \theta_k a \cos \theta_n a)^{-1} \} s_0^{-1}$$

при этом для задачи I $d_{11} = Q^+(p, 0, 0)$, $d_{n1} = Q^+(p, i\theta_n, 0) / \operatorname{ch} \theta_n a + Q^+(p, \theta_n, 0) / \cos \theta_n a$, $d_{n1} = d_{1k}$

для задачи II $d_{11} = d_{n1} = d_{1k} = 0$:

условие 2):

$$d_{nk} = \{ Q^\pm(p, i\theta_n, i\theta_k) (\operatorname{ch} \theta_n a \operatorname{ch} \theta_k a)^{-1} - Q^\pm(p, \theta_n, i\theta_k) (\cos \theta_n a \operatorname{ch} \theta_k a)^{-1} - Q^\pm(p, i\theta_n, \theta_k) (\operatorname{ch} \theta_n a \cos \theta_k a)^{-1} + Q^\pm(p, \theta_n, \theta_k) (\cos \theta_n a \cos \theta_k a)^{-1} \} s_0^{-1}$$

условия 3) — 4):

$$d_{nk} = Q^\pm(p, \theta_n, \theta_k) / s_0$$

Равнодействующая контактных давлений в преобразованиях Лапласа будет определяться формулой

$$Q(p) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(p) d_{1k}(p) \quad (2.5)$$

для симметричной нагрузки и обращается в нуль в кососимметричном случае.

Для получения окончательного решения задачи при нестационарных колебаниях необходимо выполнить обратное преобразование Лапласа

$$\bar{u}(x, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} u(x, p) e^{p\tau} dp$$

Из физических условий задачи следует, что определитель системы (2.4) не имеет корней в правой полуплоскости $\text{Re } p > 0$ и интеграл по прямой, параллельной мнимой оси, можно заменить интегралом по мнимой оси, а затем заменой $p = i\Omega$ интеграл обращения Лапласа сводится к интегралу Фурье

$$\bar{u}(x, \tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \int_0^{\infty} \text{Re}[b_k(i\Omega)] \cos \Omega \tau d\Omega \quad (2.6)$$

$$\bar{Q}(\tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \text{Re}[b_k(i\Omega) d_{1k}(i\Omega)] \cos \Omega \tau d\Omega$$

Для построения приближенного решения $u(x, p)$, $Q(p)$ в (2.1), (2.5) и (2.4) достаточно взять всего несколько членов ряда, чтобы обеспечить заданную точность, поскольку коэффициенты $b_k(p)$ быстро стремятся к нулю с ростом параметра k .

Отметим, что чем меньше жесткость балки, тем больше число членов разложения необходимо учитывать. Для абсолютно жесткого штампа $k=1$ ($\theta_1=0$). С ростом параметра p коэффициенты $b_k(p)$ также быстро убывают в силу убывания $f_n(p)$. Степень убывания $f_n(p)$ определяется видом нагрузки.

Преимуществом подхода, основанного на использовании формул (2.6), перед другими способами численного обращения Лапласа является то, что его точность обуславливается точностью вычисления интегралов от осциллирующих функций и малые погрешности нахождения функций $b_k(i\Omega)$ при дискретных значениях Ω в (2.6) не вызывают сколь угодно больших изменений функций $\bar{u}(x, \tau)$, $\bar{Q}(\tau)$. В настоящей работе применяется метод Файлона [6].

3. Численный анализ. Численный анализ проводился для упругой балки, контактирующей без трения с вязкоупругой полосой толщины h с жестко заземленной нижней гранью. Известно [5], что для системы балка — упругая полоса в случае гармонических колебаний существуют так называемые B -резонансы — изолированные частоты Ω_k , на которых функция $u(x, i\Omega)$ (т. е. $b_k(i\Omega)$) обращается в бесконечность. Эти частоты расположены в области $\Omega < \pi/2$ и имеют место, начиная с некоторого соотношения толщин балки и полосы H . При введении вязкости особенности на вещественной оси исчезают, но будет иметь место ограниченный рост подынтегральной функции $u(x, i\Omega)$ при значениях Ω , близких к резонансам системы балка — упругая полоса. Чем больше толщина (масса) балки, тем на-

γ	$H=1$	$H=10$	$H=20$	$H=30$
0,1	2,04+i0,041	0,829+i0,003	0,596+i0,001	0,489+i0,0006
0,2	2,04+i0,093	0,829+i0,006	0,596+i0,002	0,489+i0,001
0,4	2,04+i0,187	0,829+i0,01	0,596+i0,004	0,489+i0,002

блюдается более крутой рост подынтегральной функции и тем большее число разбиений на участке $(0, \pi/2)$ требуется для достижения заданной точности интегралов в (2.6).

Установлено, что при значениях безразмерного параметра $\Omega < \pi/2$ вклад слагаемых, содержащих множитель $c_k(p, \eta)$ в решение (2.2) ничтожно мал и, следовательно, необходимость в решении системы (2.3) отпадает, что существенно ускоряет время счета. Слагаемые, содержащие c_k , необходимо учитывать при $\Omega > \pi/2$, в этой же области подынтегральная функция быстро убывает с ростом Ω . В связи с этим достаточно небольшого числа разбиений по Ω . Фигура иллюстрирует влияние внутреннего трения на вертикальные перемещения балки на вязкоупругой полосе при нестационарном воздействии $\bar{f}(t) = te^{+\alpha t}$ ($\alpha=1$) при следующих значениях параметров: $a=1, H=1/2, R=1, x=0, M=0,0001; \gamma=0,1; 0,2; 0,3; 0,4$. Очевидно, что имеет место колебательный процесс относительно равновесного положения с затуханием и чем больше внутреннее трение, тем больше затухание.

Численный анализ системы (2.4) показал, что определитель системы имеет столько комплексных корней в верхней полуплоскости, каков его порядок. Напомним, что система (2.4) решается методом урезания в силу быстрого убывания $b_k(i\Omega)$ с ростом k .

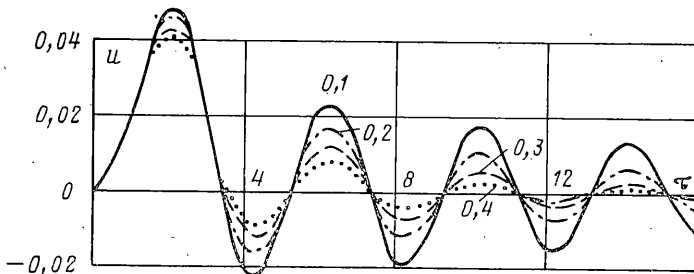
Для вычисления комплексных корней используется принцип аргумента. В таблице приведены значения первого корня Ω_1 определителя системы (2.4) в зависимости от толщины H и параметра вязкости γ .

В этом случае вычисление интегралов (2.6) сводится к сумме вычетов

$$\bar{u}(x, \tau) \approx \sum_k \text{res}[u(x, i\Omega_k) e^{i\Omega_k \tau}] + \sum_j \text{res}[u(x, i s_j) e^{i s_j \tau}]$$

Здесь первая сумма — вычеты в полюсах, соответствующих комплексным корням Ω_k определителя системы (2.4), вторая сумма представляет собой вычеты в полюсах функции $f(x, i\Omega)$.

Очевидно, что первое слагаемое в последнем выражении соответствует свободным затухающим колебаниям системы балка — вязкоупругая полоса и не зависит от вида заданной нагрузки $\bar{f}(x, \tau)$ ($\text{Re } \Omega_k$ — безразмерная частота свободных колебаний, а $\text{Im } \Omega_k$ отвечает за затухание колебательного процесса), второе слагаемое отвечает вынужденным колебаниям и существенно зависит от вида приложенной к балке нагрузки.



Этот подход вычисления интегралов (2.6) более выгоден чем численный. Трудности, связанные с поиском комплексных корней, окупаются физической наглядностью. Так, из поведения корней с ростом толщины балки (см. таблицу) очевидно, что увеличение параметра H ведет к увеличению периода колебаний и уменьшению затухания $\bar{u}(x, \tau)$. Изменение вязкости γ не меняет значение $\operatorname{Re} \Omega_n$, а $\operatorname{Im} \Omega_n$ увеличивается с ростом γ . Поэтому увеличение γ не меняет периода колебаний, но ведет к увеличению затухания колебаний, что подтверждает результат, полученный численно (фигура).

Заметим, что для системы абсолютно жесткий штамп — упругая полоса существует один вещественный корень определителя $\Omega \in (0, \pi/2)$:

$$-2aRH\Omega^2 + d_{11}(i\Omega) = 0$$

поэтому $\bar{u}(\tau)$ будет описывать осциллирующие, но не затухающие при $\tau \rightarrow \infty$ колебания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сорокин Е. С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 131 с.
2. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
3. Бабешко В. А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
4. Бабешко В. А., Пряжина О. Д. Метод фиктивного поглощения в плоских динамических задачах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 477—484.
5. Ворович Е. И., Пряжина О. Д. Об одном эффективном методе решения задачи о колебаниях упругой балки на упругом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 96—101.
6. Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Колебания и волны в слоистых средах. М.: Наука, 1990. 224 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
23.VIII.1990